Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
Dr. Christian Schulz, Dr. Simon Gog
Michael Axtmann

2. Übungsblatt zu Algorithmen II im WS 2016/2017

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS16.php
{christian.schulz,michael.axtmann,sanders,simon.gog}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Kleinaufgaben: A* Suche*)

a) Sei pot(·) eine gültige Potentialfunktion für die A* Suche nach Knoten t in Graph $G(V,\ E)$. Überprüfen Sie, ob

$$\text{pot}^c = \text{pot} + c,\ c = const.$$

ebenfalls eine gültige Potentialfunktion darstellt.

b) Kann es vorkommen, dass eine A* Suche mehr Knoten absucht als eine Suche mit Dijkstra's Algorithmus für die gleiche Anfrage? Begründen Sie warum nicht oder geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 2 (*Rechnen: Monotone ganzzahlige* Priority Queues)

Bei einer Ausführung von *Dijkstra's Algorithmus* wird folgender Ausschnitt an *Priority Queue* Operationen protokolliert:

...

- `insert(a, 06 [00110] )` (Parameter: Knotenbezeichnung, Distanz [Distanz binär])
- `insert(b, 10 [01010] )`
- `insert(c, 07 [00111] )`
- `deleteMin()`
- `deleteMin()`
- `insert(d, 12 [01100] )`
- `deleteMin()`
- `insert(e, 16 [10000] )`

...

Zusätzlich wissen Sie, dass das maximale Kantengewicht im Graphen $C = 6$ beträgt und dass vor der ersten protokollierten Operation das letzte enthaltene Element aus der *Priority Queue* entfernt wurde. Dieses hatte den Wert $min = 5$.

a) Führen Sie die Operationen auf einer *Bucket Queue* aus. Geben Sie den Zustand der Datenstruktur nach jeder Operation an.

b) Wieviele *Buckets* werden für eine Ausführung auf einem *Radix Heap* benötigt? Führen Sie die Operationen auf einem *Radix Heap* aus. Geben Sie den Zustand der Datenstruktur und den Wertebereich der *Buckets* nach jeder Operation an.

Aufgabe 3 (*Analyse: Laufzeit von Dijkstra's Algorithmus*)

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V,\ E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, sowie eine Kantengewichtungsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_0^+$.

a) Beweisen Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass für $m = \Omega(n \log n \log\log n)$ Dijkstra's Algorithmus mit einem *binary heap* eine durchschnittliche Laufzeit von $O(m)$ besitzt.

b) Eine spezielle *Priority Queue* habe folgende Laufzeiteigenschaften:

   - `insert`: $O(\log n)$
   - `decreaseKey`: $O(1)$
   - `deleteMin`: $O(\sqrt{m})$

   (ob eine Datenstruktur mit diesen Eigenschaften existiert und Dijkstra's Algorithmus mit ihr korrekt arbeitet, ist eine andere Frage, aber wir nehmen für diese Aufgabe an es ginge :-))

   Geben Sie eine kleinste obere Schranke für die Laufzeit von Dijkstra's Algorithmus unter Verwendung dieser *Priority Queue* an. Unter welcher Bedingung an das Verhältnis der Anzahl Knoten n zu Kanten m wird die Laufzeit linear in der Eingabegröße? Die Eingabe erfolgt in Form einer Adjazenzliste.

c) Geben Sie eine Klasse von Graphen an, für welche die Anzahl an `deleteMin` Operationen in Dijkstra's Algorithmus von einem beliebigen Knoten s zu einem beliebigen erreichbaren Knoten t linear von der minimalen Pfadlänge $\mu(s, t)$ abhängt. Für die Klasse von Graphen muss weiter $m = \Theta(n \log n)$ gelten.

Aufgabe 4 (*Entwurf:* All Pairs Shortest Paths)

Sie sind von der Finanzaufsichtsbehörde beauftragt worden, einen Algorithmus zu entwickeln, der Unregelmäßigkeiten im Devisenhandel möglichst zeitnah aufdecken kann. Zu diesem Zweck erhalten Sie die aktuellen direkten Wechselkurse $w_{i,j}$ von Währung i nach Währung j für alle gehandelten Währungen. Dabei bedeutet z.B. $w_{i,j} = 4$, dass man für 1 Einheit aus Währung i genau 4 Einheiten aus Währung j erhält. Eine Unregelmäßigkeit tritt dann auf, wenn eine Möglichkeit existiert, eine Währung i in eine Währung j über mehrere Zwischenwechsel zu tauschen, so dass der Ertrag der Wechsel weniger als die Hälfte des direkten Wechsels von Währung i nach j erzielt. Auf Rückfrage versichert Ihnen Ihr Auftraggeber außerdem, dass eine geldgenerierende Schleife (leider) nicht auftreten kann.

a) Formulieren Sie das Problem als graphentheoretisches Problem. D.h. bilden Sie die gegebenen Informationen auf Knoten und Kanten eines Graphen ab und interpretieren Sie die gestellte Aufgabe als Problem auf dem von Ihnen definierten Graphen.

b) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der das Problem löst.

c) Erweitern Sie Ihren Algorithmus, so dass er auch die Folge an Wechseln ausgeben kann, die eine Unregelmäßigkeit verursacht.

d) Ihr Algorithmus muss k Währungen überwachen. Geben Sie eine Laufzeit für Ihren Algorithmus an, die nur von k abhängt.

Hinweis: $\log ab = \log a + \log b$.

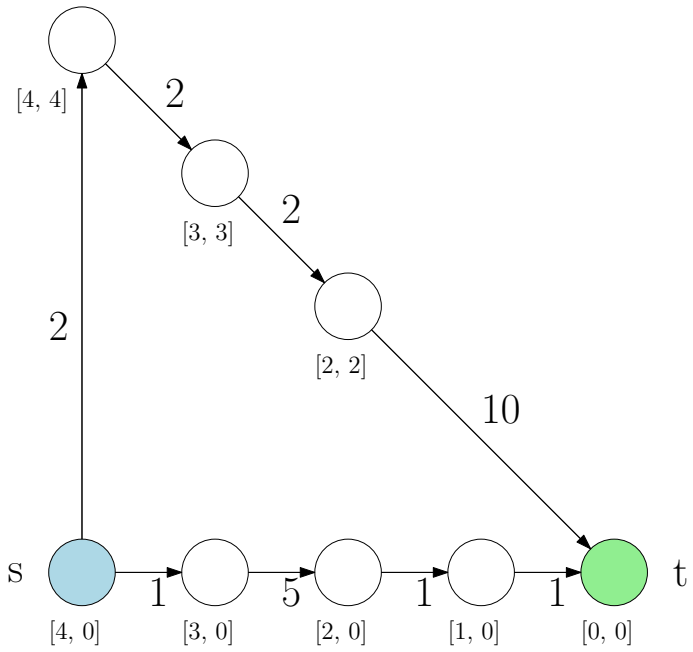
Aufgabe 5 (*Rechnen: A* Suche*)

Gegeben sei der unten abgebildete Graph. An den Kanten sind Kosten für die Nutzung der Verbindung eingetragen und die Knoten tragen Ortskoordinaten.

a) Ergänzen Sie den gegebenen Graphen um Knotenpotentiale für eine A* Suche von s nach t. Verwenden Sie Knoten t als Landmarke und die Manhatten-Distanz ($\hat{=}$ Einsnorm $||\cdot||_1$) als Abschätzung für die Entfernung zum Ziel.
Hinweis: $||\cdot||_1 : ||(x_1, y_1), (x_2, y_2)||_1 = y_2 - y_1 + x_2 - x_1$.

b) Tragen Sie die reduzierten Kantengewichte in den Graphen ein.

c) Wieviele `deleteMin` Operationen führt die A* Suche auf dem Graphen aus? Wieviele eine normale Suche mit Dijkstra's Algorithmus?

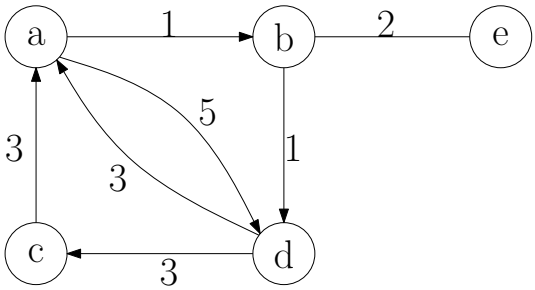


Aufgabe 6 (*Einführung+Analyse: Bidirektionaler Dijkstra*)

In Vorlesung und Saalübung wurde eine bidirektionale Variante von Dijkstra's Algorithmus angesprochen, die in dieser Aufgabe näher untersucht werden soll.

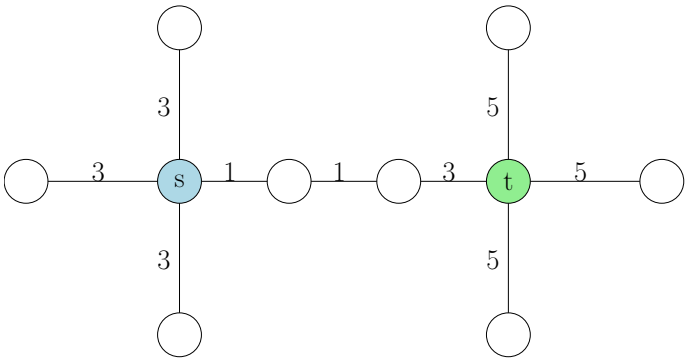
Zur Wiederholung:
Gegeben sei –wie üblich– ein gerichteter Graph $G = (V,\ E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, sowie eine Kantengewichtungsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_0^+$. Gesucht ist der kürzeste Pfad $p = \langle s, \ldots, t\rangle$ zwischen zwei Punkten $s,\ t \in V$.
Eine bidirektionale Suche löst dieses Problem wie folgt: Es werden zwei unidirektionale Suchen mit Dijkstra's Algorithmus gestartet. Die *Vorwärtssuche* beginnt bei Knoten s und operiert auf dem normalen Graphen G, auch *Vorwärtsgraph* genannt. Die *Rückwärtssuche* beginnt bei Knoten t und operiert auf dem *Rückwärtsgraph* $G^r = (V, E^r)$ mit Kantengewichtungsfunktion c^r. Dieser Graph entsteht aus G durch Umkehrung aller Kanten. Der Algorithmus scannt abwechselnd einen Knoten in der Vorwärtssuche und in der Rückwärtssuche, beginnend mit der Vorwärtssuche.
Wird während des Scans von Knoten u Kante $(u,\ v)$ relaxiert, so wird überprüft, ob die Distanz $d_{\text{forward}}[v] + d_{\text{backward}}[v]$ kleiner ist als die momentan minimale gefundene Distanz von s nach t und diese gegebenenfalls angepasst ($d_{\text{forward}}[v]$ gibt die bisher kürzeste gefundene Distanz von s nach v in der Vorwärtssuche und $d_{\text{backward}}[v]$ die bisher kürzeste gefundene Distanz von v nach t in der Rückwärtssuche an).
Sobald ein Knoten in einer Richtung gescannt werden soll, der bereits in der anderen Richtung gescannt worden ist, kann die Suche beendet werden (*Abbruchbedingung*). Die aktuelle minimale gefundene Distanz ist dann die tatsächliche minimale Distanz zwischen s und t.

a) Zeichnen Sie den Rückwärtsgraph G^r zum angegebenen Graphen. Geben Sie die Kantengewichte $c(a,d)$, $c^r(a,d)$ sowie $c(b,e)$, $c^r(b,e)$ an.



(Kante (b,e) ist eine bidirektionale [bzw. ungerichtete] Kante)

b) Geben Sie an, in welcher Reihenfolge der unten angegebene Graph durchlaufen wird.

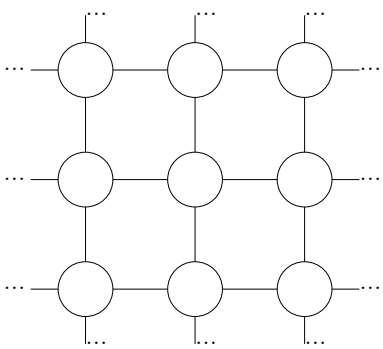


c) Zeigen Sie, dass die Abbruchbedingung korrekt ist.

d) Wann kann es passieren, dass die Suche nach dem Scan von Knoten u beendet wird, dieser aber nicht Teil des kürzesten Weges ist. Geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 7 (*Analyse: Bidirektionaler Dijkstra*)

a) Gegeben sei ein Gittergraph G mit allen Kantengewichten gleich 1. Wieviele Knoten wird eine bidirektionale Suche besuchen in Abhängigkeit von Abstand d zwischen Start und Ziel? Wieviele die unidirektionale Suche?



Beispiel eines Gittergraphen

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem die bidirektionale Suche von s nach t exponentiell weniger Knoten besucht als die unidirektionale Suche.

c) Geben Sie ein Beispiel, in dem die bidirektionale Suche von s nach t mehr Knoten besucht als die unidirektionale Suche.

d) Zeigen Sie, dass die bidirektionale Suche nie mehr als doppelt so viele Knoten besucht als die unidirektionale Suche.

Aufgabe 8 (*Implementierung: A* Algorithmus*)

Implementieren Sie die A* Suche in `C++` mit einer adressierbaren Prioritätsliste Ihrer Wahl (https://github.com/) und der Graph-Datenstruktur aus dem KaHIP[1] Framework.
Laden Sie das Archiv[2] von unserer Website mit 6 Straßennetzwerken herunter. Das Archiv beinhaltet das komplette Straßennetzwerk der USA, aber auch kleinere gewichtete Teilnetzwerke wie das Straßennetzwerk von Colorado und Florida. Die Netzwerke sind im Metis Format gespeichert. Nutzen Sie die Methoden aus dem KaHIP Framework um die Netzwerke einzulesen.
Untersuchen Sie die Vorberechnung von Landmarken auf verschiedenen Netzwerken. Wie lange benötigt die Vorberechnung einer Landmarke für das Colorado Netzwerk im Vergleich zu einer Landmarke für Californien? Begründen Sie die Laufzeiten.
Untersuchen Sie die A* Suche auf dem Straßennetzwerk von Colorado etwas genauer: Berechnen Sie dazu die Landmarke für den Knoten 435653. Nutzen Sie dazu die Implementierung von Dijkstra's Algorithmus aus Übungsblatt 1. Nutzen Sie diese Landmarke und die A* Suche um den kürzesten Weg von Knoten 0 zu Knoten 250351 zu finden. Wie lange benötigt diese Suche im Vergleich zur Suche des kürzesten Wegs von Knoten 250351 zu Knoten 0? Geben Sie eine Begründung für den Laufzeitunterschied an.

Ausgabe: 09.11.2016
Abgabe: keine Abgabe, keine Korrektur

[1] `http://algo2.iti.kit.edu/kahip`
[2] `http://algo2.iti.kit.edu/schulz/graphs.tar.gz`