Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
Dr. Christian Schulz, Dr. Simon Gog
Michael Axtmann

3. Übungsblatt zu Algorithmen II im WS 2016/2017

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS16.php
{christian.schulz,michael.axtmann,sanders,simon.gog}@kit.edu

Musterlösungen

Aufgabe 1 (*Analyse: Äquivalenzrelation*)

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ und folgende Relation

$$v \overset{*}{\longleftrightarrow} w \qquad \text{gdw.} \qquad \text{es gibt Pfade } \langle v, \ldots, w \rangle \text{ und } \langle w, \ldots, v \rangle \text{ in } G$$

für $v, w \in V$.
Zeigen Sie, dass $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ eine Äquivalenzrelation ist.

Musterlösung:
Um nachzuweisen, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, müssen *Reflexivität*, *Symmetrie* und *Transitivität* der Relation gezeigt werden:

Reflexivität:
Alle Pfade $\langle v \rangle$ mit $v \in V$ existieren per Definition.

Symmetrie:
Sei $v, w \in V$ mit $v \overset{*}{\longleftrightarrow} w$. Dann gibt es Pfade $\langle v, \ldots, w \rangle$ und $\langle w, \ldots, v \rangle$ in G. Damit gilt $w \overset{*}{\longleftrightarrow} v$.

Transitivität:
Sei $u, v, w \in V$ mit $u \overset{*}{\longleftrightarrow} v$ und $v \overset{*}{\longleftrightarrow} w$. Dann gibt es Pfade $\langle u, \ldots, v \rangle$ und $\langle v, \ldots, w \rangle$ in G und somit auch einen Pfad $\langle u, \ldots, v, \ldots, w \rangle$. Analog zeigt man, dass es einen Pfad $\langle w, \ldots, u \rangle$ in G gibt. Damit folgt $u \overset{*}{\longleftrightarrow} w$. Also ist $\overset{*}{\longleftrightarrow}$ transitiv.

Aufgabe 2 (*Analyse+Entwurf: Artikulationspunkte (*)*)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph. Ein Knoten v des Graphen G wird als *Gelenkpunkt* bezeichnet, wenn dessen Entfernen die Zahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.

a) Zeigen Sie, dass es in jedem Graphen G *ohne Gelenkpunkte* und mit $|V| \geq 3$ immer mindestens ein Knotenpaar $(i, j),\ i, j \in V,\ i \neq j$ gibt, so dass zwei Pfade $P_1 = \langle i, \ldots, j \rangle$ und $P_2 = \langle i, \ldots, j \rangle$ existieren, die bis auf die Endpunkte knotendisjunkt sind, d.h.: $P_1 \cap P_2 = \{i, j\}$.

b) Beweisen Sie in jedem Graphen G *mit Gelenkpunkten* die Existenz eines Knotens v, für den gilt: Man kann einen Knoten w entfernen, so dass es von v aus keine Pfade mehr zu mindestens der Hälfte der verbleibenden Knoten gibt.

c) Zeigen Sie, dass in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ stets ein Knoten v existiert, so dass G nach Entfernen von v weiterhin zusammenhängend ist.

d) Vervollständigen Sie den angegebenen allgemeinen DFS-Algorithmus, so dass er in $O(|V| + |E|)$ alle Gelenkpunkte eines ungerichteten Graphen berechnet. Geben Sie an, was die Funktionen `init`, `root(s)`, `traverseTreeEdge(v,w)`, `traverseNonTreeEdge(v,w)` und `backTrack(u,v)` machen.
Überlegen Sie sich zunächst, wie Sie mit Hilfe der DFS-Nummerierung Gelenkpunkte erkennen können.

```
Depth-first search of graph G = (V, E)
unmark all nodes
init
for all s ∈ V do
    if s is not marked then
        mark s
        root(s)
        DFS(s,s)
    end if
end for

procedure DFS(u,v : NodeID)
    for all (v, w) ∈ E do
        if w is marked then
            traverseNonTreeEdge(v,w)
        else
            traverseTreeEdge(v,w)
            mark w
            DFS(v,w)
        end if
    end for
    backtrack(u,v)
end procedure
```

Hinweis: Diese Aufgabe war Teil der Nachklausur Algorithmen II im letzten Semester!

Musterlösung:

a) Sei v kein Gelenkpunkt. Da G ein zusammenhängendener, ungerichteter Graph mit $|V| \geq 3$ ist, existieren zwei zu v benachbarte Knoten i und j mit $i \neq j$. Ein Weg zwischen i und j geht offensichtlich über den Pfad $P_1 = \langle i, v, j \rangle$. Wird v nun entfernt, fallen die Kanten (i, v) und (v, j) weg. G bleibt zusammenhängend, sonst wäre v ein Gelenkpunkt. Dies bedeutet, dass es einen weiteren Pfad P_2 zwischen i und j geben muß und dass dieser disjunkt zu P_1 ist, da Knoten v nicht mehr vorhanden ist.

b) Sei w ein Gelenkpunkt. Dann zerfällt G nach Wegnahme von v in zwei oder mehr Komponenten. Eine Komponente K hat die minimale Anzahl von Knoten unter allen Komponenten. Da es mindestens zwei Komponenten gibt und K die kleinere ist, kann K nicht mehr als $|K| := \frac{|V \setminus \{v\}|}{2}$ Knoten besitzen. Wählt man aus K einen Knoten v, so hat dieser offensichtlich zu weniger als der Hälfte der verbleibenden Knoten einen Pfad.

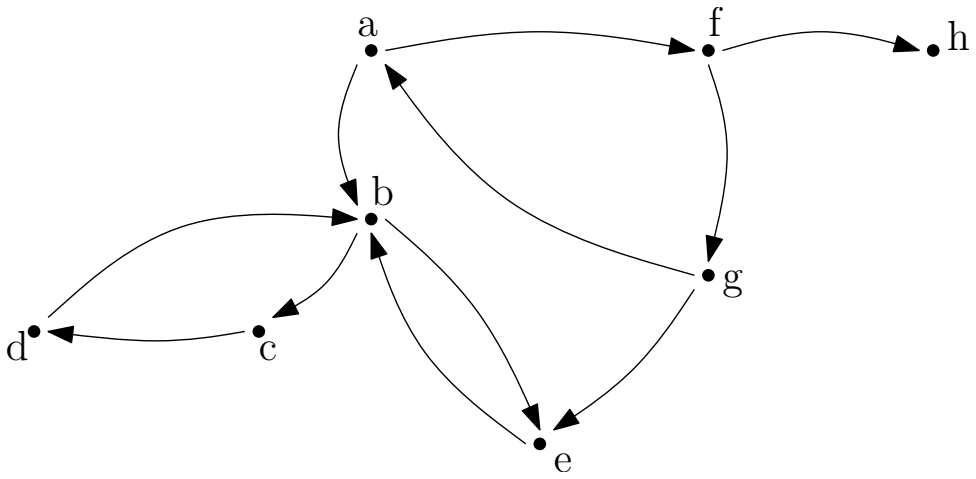
c) Betrachte einen spannenden Baum des Graphen G. Jeder Blattknoten dieses Baumes kann entfernt werden ohne dass der Graph zerfällt.

d) Das Problem kann per DFS gelöst werden. Folgende Beobachtung liefert den Schlüssel zur Lösung: Ein Knoten v ist immer dann ein Gelenkpunkt, wenn er keinen anderen Knoten erreichen kann, der eine niedrigere DFS-Nummer besitzt. Um dies festzustellen, müssen im DFS-Algorithmus die minimal erreichbaren DFS-Nummern aller Unterbäume nach oben propagiert werden. Der Startknoten der DFS ist allerdings ein Sonderfall und nur Gelenkpunkt, wenn er mindestens zwei Kanten im DFS-Baum besitzt.

```
init:                        dfsPos= 1; finishingTime= 1; rootTreeEdgeCount= 0

root(s):                     dfsNum[s]=dfsPos++; minimum[s] = dfsNum[s]; tree_root = s

traverseTreeEdge(v,w):       dfsNum[w]:=dfsPos++; minimum[w] = dfsnum[w]
                             if( v == tree_root )
                               rootTreeEdgeCount++

traverseNonTreeEdge(v,w):    minimum[v] = min( dfsNum[w], minimum[v] )
backtrack(u,v):              minimum[u] = min( minimum[u], minimum[v] )
                             if( minimum[v] ≥ dfsNum[u] )
                               if ( tree_root ≠ u )
                                 output(u)
                               if ( tree_root == u && rootTreeEdgeCount == 2)
                                 output(u)
```

Aufgabe 3 (*Rechnen: SCC mit Tiefensuche*)

Gegeben sei folgender Graph $G = (V, E)$:



Führen Sie den Algorithmus zur Bestimmung aller starken Zusammenhangskomponenten aus der Vorlesung auf dem Graph G aus. Geben Sie nach jedem Schritt den Zustand von `oReps`, `oNodes` und `component` an.

Musterlösung:

Schritt 1: `root(a)`

`oReps`	a
`oNodes`	a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 2: `traverseTreeEdge(a,b)`

`oReps`	b a
`oNodes`	b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 3: `traverseTreeEdge(b,c)`

`oReps`	c b a
`oNodes`	c b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 4: `traverseTreeEdge(c,d)`

`oReps`	d c b a
`oNodes`	d c b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 5: `traverseNonTreeEdge(d,b)`

`oReps`	b a
`oNodes`	d c b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 6, 7: `backtrack(c,d)`, `backtrack(b,c)`

`oReps`	b a
`oNodes`	d c b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 8: `traverseTreeEdge(b,e)`

`oReps`	e b a
`oNodes`	e d c b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 9: `traverseNonTreeEdge(e,b)`

`oReps`	b a
`oNodes`	e d c b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
`component[w]`	-	-	-	-	-	-	-	-

(Fortsetzung auf nächster Seite)

Musterlösung:

Schritt 10: `backTrack(b,e)`

oReps	b a
oNodes	e d c b a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	-	-	-	-	-	-	-

Schritt 11: `backTrack(a,b)`

oReps	a
oNodes	a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	-

Schritt 12: `traverseTreeEdge(a,f)`

oReps	f a
oNodes	f a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	-

Schritt 13: `traverseTreeEdge(f,h)`

oReps	h f a
oNodes	h f a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	-

Schritt 14: `backtrack(f,h)`

oReps	f a
oNodes	f a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	h

Schritt 15: `traverseTreeEdge(f,g)`

oReps	g f a
oNodes	g f a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	h

Schritt 16: `traverseNonTreeEdge(g,e)`

oReps	g f a
oNodes	g f a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	h

Schritt 17: `traverseNonTreeEdge(g,a)`

oReps	a
oNodes	g f a

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	h

Schritt 18: `backtrack(f,g)`, `backtrack(a,f)`

oReps	a
oNodes	g f a

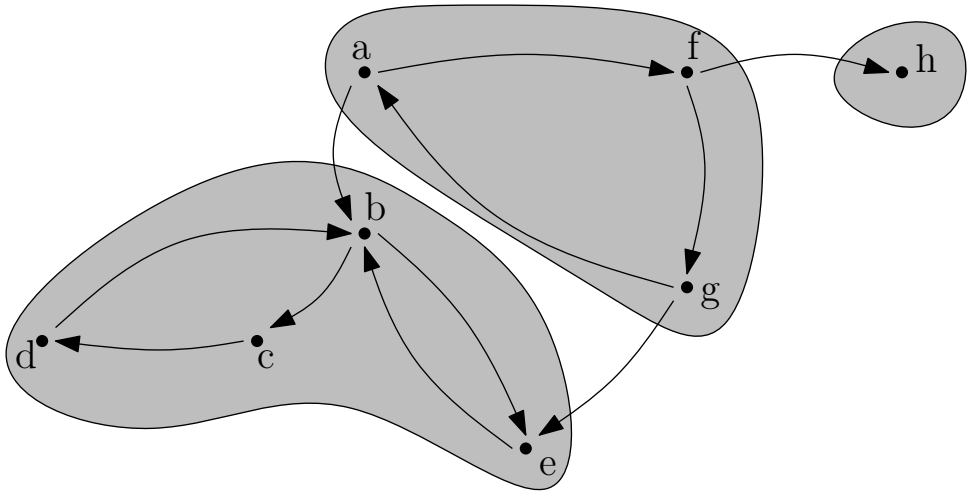
w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	-	b	b	b	b	-	-	h

Schritt 19: `backtrack(a,a)`

oReps	
oNodes	

w	a	b	c	d	e	f	g	h
component[w]	a	b	b	b	b	a	a	h

Die starken Zusammenhangskomponenten sind also wie folgt:



Aufgabe 4 (*Kleinaufgaben: Eigenschaften von Flüssen*)

a) Nach Vorlesung ist eine gültige Distanzfunktion $d(\cdot)$ für *Dinics Algorithmus* gegeben durch:

- $d(t) = 0$
- $d(u) \leq d(v) + 1 \quad \forall\ (u, v) \in G_f$

Zeigen Sie, falls $d(s) \geq n$, existiert kein *augmentierender Pfad*.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit von *Dinics Algorithmus* für Graphen mit Kantengewichten gleich 1 (*unit edgeweights*) in $O((n+m)\sqrt{m})$ liegt. Vergleichen Sie diese Laufzeit zum *Ford Fulkerson Algorithmus*. Für welche Graphen mit *unit edgeweights* ist welcher der beiden Algorithmen schneller?

c) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, in dem maximale Flüsse berechnet werden sollen. Sei $e = (i, j) \in E$ ebenso wie $e' = (j, i) \in E$, d. h. G besitzt ein Paar entgegengesetzter Kanten. Außerdem sei $c(e) \geq c(e')$. Widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

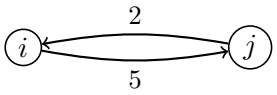
Entfernt man e' aus E und reduziert $c(e) := c(e) - c(e')$, ändert sich der maximale Fluss nicht, d. h. man kann entgegengesetzte Kanten a-priori (für beliebige s und t) gegeneinander aufrechnen.

Musterlösung:

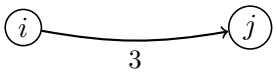
a) Ein Pfad in einem Graphen kann höchstens n unterschiedliche Knoten haben. Betrachte nun einen beliebigen augmentierenden Pfad in G_f. Für jede Kante auf diesem Weg wächst die Distanz für s höchstens um eins. Folglich kann ein augmentierender Pfad nur $d(s) \leq n - 1$ bedeuten.

b) Auf Graphen mit Kantengewichten gleich 1 ist die Laufzeit des *Ford Fulkerson Algorithmus* in $O(nm)$ (da $U = 1$!). *Dinics Algorithmus* ist damit schneller als der *Ford Fulkerson Algorithmus* falls $O((n+m)\sqrt{m}) < O(nm)$. Ausgerechnet ergibt sich $n > O(\frac{m}{\sqrt{m}-1}) = O(\sqrt{m})$.

c) Rechnet man die Kanten in folgendem Graph gegeneinander auf,



so ergibt sich



Für $s := j$ und $t := i$ ist kein Fluss mehr möglich, während im Originalgraphen ein maximaler Fluss von 2 möglich war. Dies ist somit ein Gegenbeispiel zur Behauptung.

Aufgabe 5 (*Rechnen: Segmentierung mit Flüßen (*)s*)

Wir betrachten einen einfachen Fall für Bildbearbeitung. Die Vorder-/Hintergrundsegmentierung. Das Ziel dieses Prozesses ist es, ein Bild in Vorder und Hintergrund zu zerlegen. Die Transformation dafür weißt jedem Pixel $p_{i,j}$ des Bildes einen Knoten $v_{i,j}$ im Graphen zu. Für jedes Paar von benachbarten Pixeln $p_{i,j}$ und $p_{k,l}$ ($|i-k|+|j-l|=1$) fügen wir eine ungerichtete Kante $(v_{i,j}, v_{k,l})$ ein. Zusätzlich fügen wir je einen Knoten s für Vordergrund (Quelle) und einen Knoten t für Hintergrund (Senke) ein. Von Knoten s existiert eine gerichtete Kante zu jedem Knoten $p_{i,j}$ und von jedem Knoten $p_{i,j}$ existiert eine gerichtete Kante zu Knoten p. Wir definieren darüber hinaus folgende Kantengewichte:

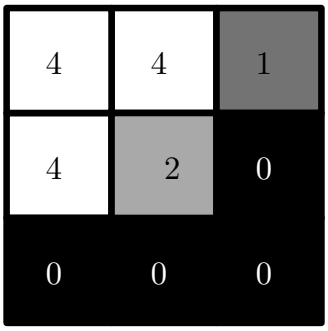
$$c(e=(u,v)) = \begin{cases} p_v(v) & u = s \\ p_h(u) & v = t \\ f(u,v) & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wobei mit $p_v(x)$ die Wahrscheinlichkeit gegeben ist, dass x Vordergrundknoten ist, mit $p_h(x)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Hintergrundknoten und mit $f(x,y)$ eine Penaltyfunktion für das Trennen der beiden Knoten x und y. Für ein Graustufenbild B definieren wir
$p_v(x,y) = B[x,y]^2$, $p_h(x,y) = (4 - B[x,y])^2$ sowie $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (4 - |B[x_1,y_1] - B[x_2,y_2]|)^2$.
Hinweis: Diese Modellierung ist nur ein Beispiel und keine allgemeingültige Modellierung. Sie soll nur verdeutlichen wie Flow Alglorithmen für andere Probleme eingesetzt werden können.

a) Geben Sie den Flussgraphen für das unten angegebene Graustufenbild an.

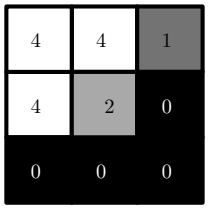
b) Führen Sie einen augmenting Path Algorithmus auf dem entstandenen Graphen aus.

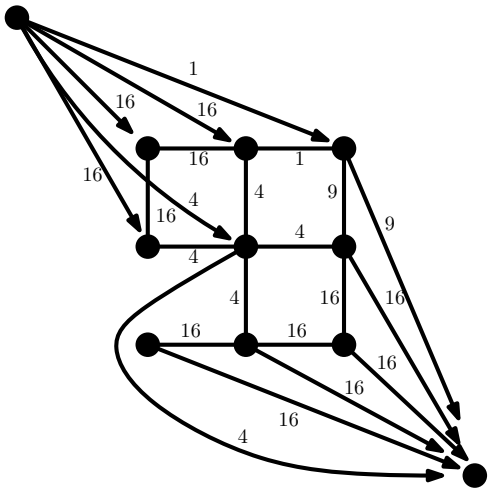
c) Wie würde die Segmentierung in Vorder- und Hintergrund im Bild als Ergebnis aussehen?



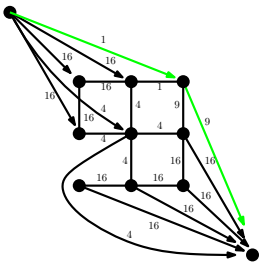
Musterlösung:

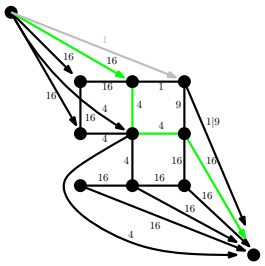
a) Als Transformation ergibt sich folgender Graph. Kanten ohne Kapazität wurden weggelassen.

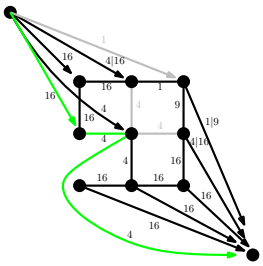


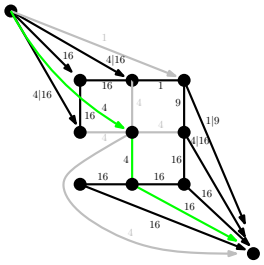


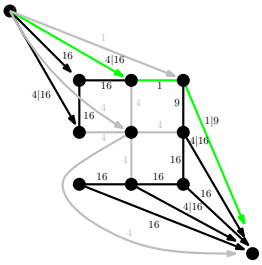
b) Der Algorithmus wird skizziert durch folgende Schritte:

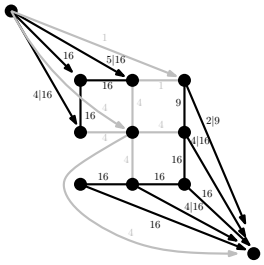


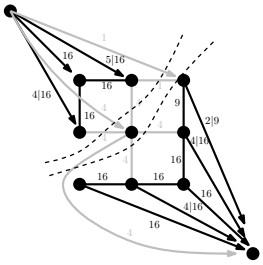




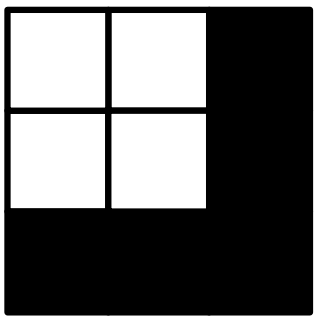


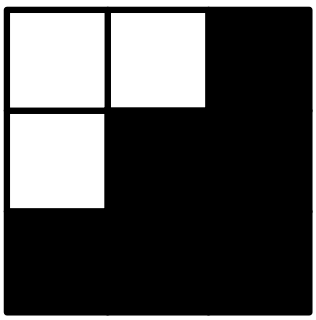






c) Die beiden gleichwertigen Lösungen nach unserer Modellierung sind:





Aufgabe 6 (*Analyse: Königs Theorem*)

Das *Theorem von König* besagt, dass in jedem bipartiten Graphen $G = (V,\ E)$ die Größe eines Matchings größter Wertigkeit (*maximum-cardinality matching*) gleich der Größe einer minimalen Knotenüberdeckung (*minimal vertex cover*) ist.

Vertex Cover:
Ein *Vertex Cover* ist definiert als eine Teilmenge der Knoten $S \subseteq V$, so dass für alle Kanten $e = (u, v) \in E$ gilt $u \in S \vee v \in S$. Ein *minimales Vertex Cover* besitzt unter allen korrekten die kleinste Teilmenge an Knoten S.

Matching:
Ein *Matching* ist definiert als eine Teilmenge von Kanten $S \subseteq E$, so dass jeder Knoten $v \in V$ Endpunkt von höchstens einer Kante in S ist. Eine *maximales Matching* besitzt unter allen korrekten die größte Teilmenge an Kanten S.

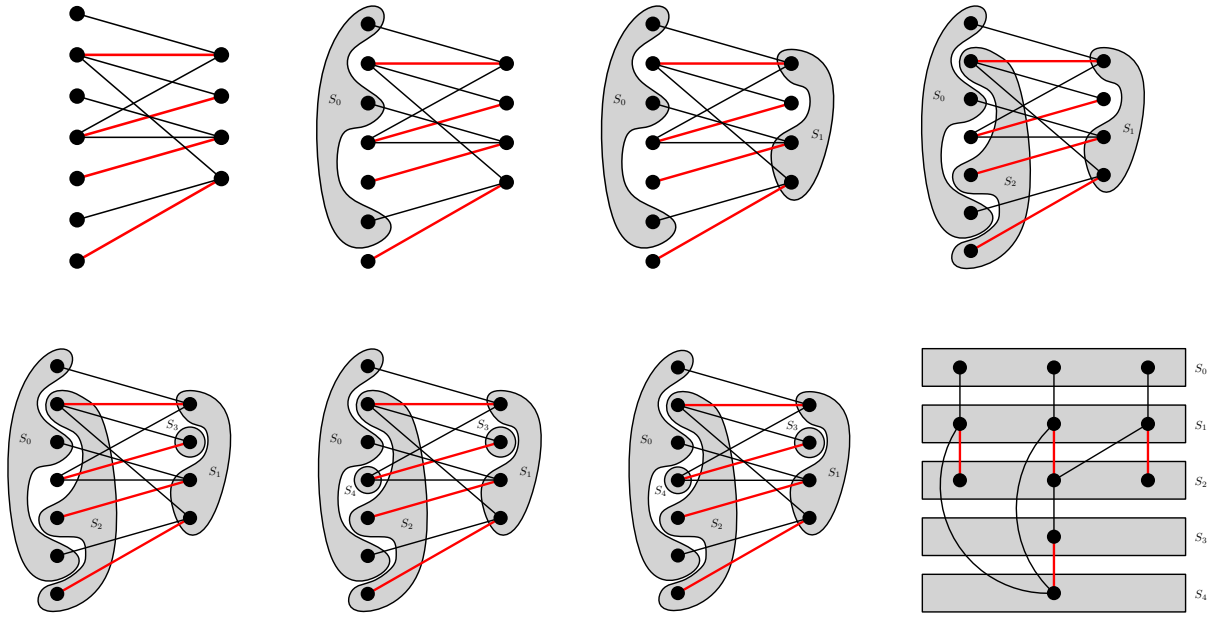
Bipartiter Graph:
Ein bipartiter Graph enthält ausschließlich Kanten zwischen disjunkten Teilmengen der Knotenmenge: $e \in E \leftrightarrow (u, v) \in S \times T,\ V = S \cup T,\ S \cap T = \varnothing$.

Beweisen Sie das *Theorem von König*.

Musterlösung:
Für einen bipartiten Graphen $G = (V, E)$ betrachten wir ein maximales Matching M der Größe $k = |M|$. Der Fall eines perfekten Matchings ist trivialerweise korrekt. Für den Fall eines nicht perfekten Matchings konstruieren wir einen Graphen mit mehreren Schichten S_i. Schicht S_0 definieren wir als alle Knoten, die zu keiner gematchten Kante inzident sind. Schicht S_i definieren wir über:

$$S_i = \begin{cases} v \in V : \exists e = (u, v) \in E \setminus M : u \in S_{i-1}, v \notin S_0, \dots S_{i-1} & \text{i ungerade} \\ v \in V : \exists e = (u, v) \in M : u \in S_{i-1}, v \notin S_0, \dots S_{i-1} & \text{i gerade} \end{cases}$$

Komponenten, die auf diese Weise nicht erreicht werden, formen in sich ein perfektes Matching und müssen für den Beweis nicht weiter betrachtet werden. Der Prozess ist hier bildlich dargestellt.



Da M ein maximales Matching ist, kann es in dem Graphen keinen alternierenden Weg geben, dessen Endpunkte ungematched sind. Daraus folgt, dass keine gematchte Kante innerhalb eines Layers S_{2i+1} existieren kann. Für eine Kante $(u, v) \in S_{2i+1}$ könnten wir sonst einen alternierenden Pfad $n_0 \in S_0, \dots, u, v, \dots n_{2(2i+1)+1} \in S_0$ finden. Dabei ist $n_0 \neq n_{2(2i+1)+1}$, da der Pfad ungerade Länge hat und das Matching wäre nicht maximal. Unter dem selben Argument kann keine ungematchte Kante zwischen zwei Knoten eines Layers S_{2i} existieren. Eine gematchte Kante innerhalb eines Layers S_{2i} kann aber ebenso nicht existieren, da jeder Knoten über eine eindeutige gematchte Kante zu einem Vorgängerlevel verbunden ist. Folglich hat jede gematchte Kante genau einen Endpunkt in einem Layer S_{2i+1}. Ebenso hat aber auch jede ungematchte Kante mindestens einen Endpunkt in einem Layer S_{2i+1}.
Folglich ist die Vereinigung über alle S_{2i+1} ein Vertex Cover da alle gematchten Kanten, aber auch ungemachten Kanten abgedeckt sind. Weiter besteht das Vertex Cover aus k Knoten, da jede der k gematchten Kanten genau einen Endpunkt im Vertex Cover besitzt und das Vertex Cover keine ungemachten Knoten beinhaltet, die zu keiner gematchten Kante inzident sind. Ein Vertex Cover besteht aber aus mindestens k Knoten. Andernfalls gäbe es eine Kante im maximalen Matching, die vom Vertex Cover nicht überdeckt wäre, weil ein Knoten im Vertex Cover nur höchstens eine Kante aus dem Matching überdecken kann. Folglich ist die Vereinigung über alle S_{2i+1} ein Vertex Cover, das Vertex Cover besteht aus k Knoten und ist minimal da jedes Vertex Cover mindestens k Knoten beinhalten.

Aufgabe 7 (*Analyse+Entwurf+Rechnen: Grenzüberwachung*)

Eine (eindimensionale) Grenzlinie soll durch ein Sensornetz überwacht werden. Zu diesem Zweck wurde eine große Anzahl an Sensorknoten unregelmäßig an der Grenze ausgebracht. Jeder Knoten kann einen Bereich der Grenze für eine gewisse Zeit proportional zu seiner Batteriekapazität überwachen. Die Grenze gilt als vollständig gesichert, wenn jeder Abschnitt der Grenzlinie von mindestens einem Sensorknoten abgedeckt ist. Aufgrund der großen Menge an Knoten sind ihre Überwachungsbereiche stark überlappend. Daher müssen nicht immer alle Knoten aktiv sein, um eine vollständige Sicherung der Grenze zu gewährleisten. So kann Energie gespart werden und die maximale Dauer der Grenzsicherung erhöht werden.
Durch die unregelmäßige Anbringung der Knoten und durch große Fertigungstoleranzen in der Batteriekapazität und dem Überwachungsbereich (*man hat unbedingt beim billigsten Hersteller einkaufen müssen...*) ist zunächst nicht klar, wie lange die Grenze maximal vollständig gesichert werden kann. Glücklicherweise wurden die Positionen der Knoten und ihre jeweiligen Kapazitäten und Detektionsbereiche protokolliert und können verwendet werden, um diese Frage zu beantworten.

a) In der Vorlesung haben Sie Flussprobleme mit beschränkten Kantenkapazitäten $c(e)$ kennengelernt. Ebenso können Flussprobleme mit beschränkten Knotenkapazitäten $c(v)$ sinnvoll sein. In diesem Fall darf für einen gültigen Fluss die Summe der in den Knoten ankommenden bzw. ausgehenden Flüsse die Kapazität des Knotens nicht überschreiten. Außerdem muss wie bisher für jeden Knoten (außer der Quelle und Senke) die Summe der ankommenden Flüsse gleich der Summe der ausgehenden Flüsse sein.

   Erklären Sie, wie maximale Flüsse mit Knotenkapazitäten berechnet werden können. Begründen Sie kurz, warum Ihr Ansatz einen zulässigen und optimalen Fluss berechnet.

b) Konstruieren Sie ein Flussnetzwerk, das das oben beschriebene Problem der Bestimmung einer maximalen Dauer für die vollständige Grenzüberwachung lösen kann.

   Hinweis: Jeder Knoten entspricht einem Sensorknoten. Batteriekapazität kann als äquivalent zur Flussmenge betrachtet werden.

c) Erstellen Sie ein Flussnetz, das dem folgenden Sensornetz entspricht. Wie lange kann dieses Netz die Grenze im Bereich $[0, 13]$ überwachen? Welche Sensorknoten müssen wann aktiv sein?

   Format der Angaben: $x_{nodeID} = \{[begin\_range, end\_range], capacity\}$

   $x_1 = \{[0, 5], 4\}$
   $x_2 = \{[0, 7], 3\}$
   $x_3 = \{[4, 9], 2\}$
   $x_4 = \{[3, 8], 5\}$
   $x_5 = \{[8, 13], 5\}$
   $x_6 = \{[7, 11], 3\}$
   $x_7 = \{[11, 15], 2\}$

   Hinweis: Bevor Sie langwierig einen maximalen Fluss berechnen, versuchen Sie ihn durch *scharfes Hinschauen* zu bestimmen.

Musterlösung:

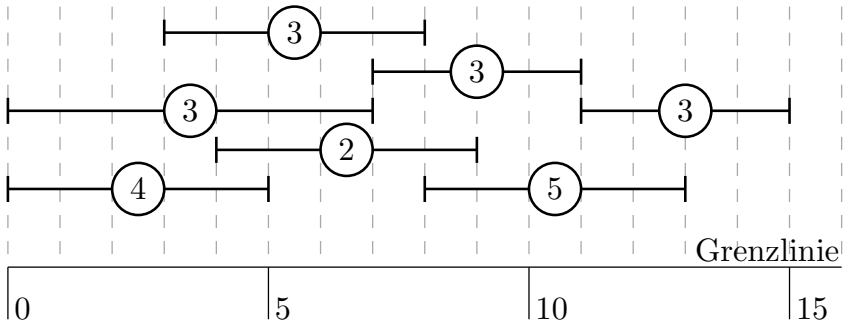
a) Man definiert einen neuen Flussgraph $G' = (V', E')$. Für jeden Knoten $v \in V$ fügt man zwei Knoten v_{in} und v_{out} sowie eine Kante (v_{in}, v_{out}) mit Kapazität $c(v_{in}, v_{out}) = c(v)$ in G' ein. Für jede Kante $(u, v) \in E$ fügt man eine neue Kante (u_{out}, v_{in}) in E' ein. Die Kapazität der Kante wird übernommen (bzw. auf ∞ gesetzt falls sie keine Kapazität hatte).

Nun berechnet man auf G' einen Fluss von s_{in} nach t_{out} und transferiert die Flusswerte zurück auf die Kanten in G. Der Fluss respektiert die Knotenkapazitäten, da sie in G' durch die Kanten (v_{in}, v_{out}) passend beschränkt wurden. Außerdem ist der Fluss optimal. Angenommen es gäbe noch einen augmentierenden Pfad in G, dann gäbe es auch einen in G' und der berechnete Fluss wäre kein maximaler Fluss in G': Die Restkapazitäten der ursprünglichen Kanten sind per Konstruktion gleich zu ihren Entsprechungen in G. Eine zu einem nicht voll ausgelasteten Knoten gehörende Kante hätte ebenfalls noch Restkapazität.

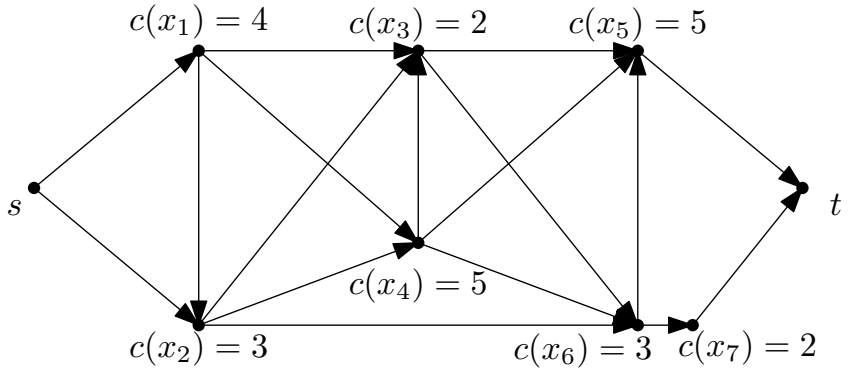
b) Das Flussnetz kann mit Hilfe von Knotenkapazitäten–wie in der letzten Teilaufgabe besprochen–konstruiert werden. Für jeden Sensorknoten x_i fügt man eine Knoten i mit Kapazität $c(i)$ gleich der Batteriekapazität des Sensorknotens ein. Außerdem fügt man eine Quelle s und eine Senke t ein. Anschließend fügt man Kanten (i, j) ein, wenn $x_i.end\_range \in [x_j.start\_range, x_j.end\_range]$ (für s und t entsprechen die *range* Werte dem Anfang und dem Ende des Grenzverlaufs). Alle Kanten sind ohne Kapazität.

Jeder Flusspfad durch das Netz entspricht einer Konfiguration von aktiven Sensorknoten, die den gesamten Grenzverlauf überwachen können und die Flussmenge der Überwachungsdauer für diese Konfiguration. Der gesamte Fluss entspricht der maximalen Überwachungsdauer.

c) Eingezeichnete Überwachungsbereiche und Batteriekapazitäten der Sensorknoten:



Sich ergebendes Flussnetzwerk:



Musterlösung:

c) Durch geschicktes Hinschauen muss man den Flussalgorithmus nicht ausführen und kann direkt eine maximale Überwachungsdauer von 7 ablesen. Diese wird durch folgende Knotenmengen erreicht, die jeweils gleichzeitig für die angegebene Dauer aktiv sind:

aktive Knoten	Dauer
x_1, x_4, x_5	4
x_2, x_4, x_5	1
x_2, x_6, x_7	2

Jede aktive Knotenmenge deckt offensichtlich den kompletten Bereich $[0, 13]$ ab. Fast alle Knoten verbrauchen ihre komplette Energie –aber auch nicht mehr– außer Knoten x_3 (gar nicht verwendet) und x_6 (noch 1 Restkapazität). Mit den restlichen Knoten kann keine weitere vollständige Überdeckung erreicht werden.

Aufgabe 8 (*Implementierung: Ford Fulkerson*)

Implementieren Sie den Algorithmus von Ford Fulkerson in `C++` mit dem KaHIP Framework. Laden Sie sich den KaHIP Fork[1] herunter und wechseln Sie in den Branch FordFulkerson. Beachten Sie, dass die Lösung dieser Aufgabe bereits als neuer Commit im Branch FordFulkerson veröffentlicht wurde. Die leeren Methodenrümpfe sind im Branch FordFulkerson unter `sha=1dddb72` eingecheckt, die Lösung ist im Branch FordFulkerson unter `sha=3a113eb` bereitgestellt. Das KaHIP Framework stellt bereits einen Flussgraph (`lib/data_structure/flow_graph.h`) bereit. Diese Datenstruktur implementiert die Basisfunktionen von Residualgraphen. Erweitern Sie die Funktionalität des Residualgraphen um die Funktionen

```
FlowType getEdgeResFlow(NodeID source, EdgeID e);
bool isSaturated(NodeID source, EdgeID e);
void increaseEdgeFlow(NodeID source, EdgeID e, FlowType flow);
EdgeID get_first_flow_edge(NodeID node);
EdgeID get_next_flow_edge(NodeID node, EdgeID e);
```

Implementieren Sie die Methode

```
Die Funktion FlowType res_graph_dfs(graph& G,
                 std::vector<NodeID>& nodes, std::vector<EdgeID>& edges,
                 const NodeID s, const NodeID t);
```

in der Datei `res_graph_dfs.hpp`. Diese Methode soll einen augmentierenden Pfad von s nach t mittels Tiefensuche suchen. Findet die DFS Suche einen augmentierenden Pfad, so gibt die Methode den maximalen Fluss des gefundenen Pfades zurück. In diesem Fall werden im Vector `nodes` die Knoten auf dem Pfad und im Vector `edges` die dazugehörenden Kanten gespeichert. Die Methode gibt eine Kapazität von 0 zurück, falls kein augmentierender Pfad im Residualgraph gefunden wurde.
Nutzen Sie die DFS Suche um den Ford Fulkerson Algorithmus in der Datei `app/ford_fulkerson/ford_fulkerson.cpp` zu implementieren. Compilieren Sie Ihre Implementierung danach mithilfe des Skripts `compile.sh` und führen Sie den Algorithmus auf der Kommandozeile aus:

```
> ./optimized/maxflow ./examples/flow_graphs/af_shell9.graph.hierarchy.5.h.inp
```

Im Verzeichnis `./examples/flow_graphs/` finden Sie einige Flussgraphen. Testen Sie Ihren Algorithmus zu Beginn mit kleinen Eingabeinstanzen!

Musterlösung:
Die Lösung ist im Branch FordFulkerson unter `sha=3a113eb` bereitgestellt.

[1] `https://github.com/MichaelAxtmann/KaHIP`