Karlsruher Institut für Technologie

Übung 3 – Algorithmen II

Michael Axtmann – *michael.axtmann@kit.edu*

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS16.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

Organisatorisches

Übungsblätter

- Lösung von Blatt 1 ab Donnerstag online
- Übungsblatt 2 ab nächsten Dienstag online

Inhalt

Themenübersicht für heute

- Suche in Graphen
  - Dijkstras Algorithmus
  - Bidirektionale Suche
  - A^*-Suche

Suche in Graphen

Kürzeste-Wege-Suche

Eigenschaften

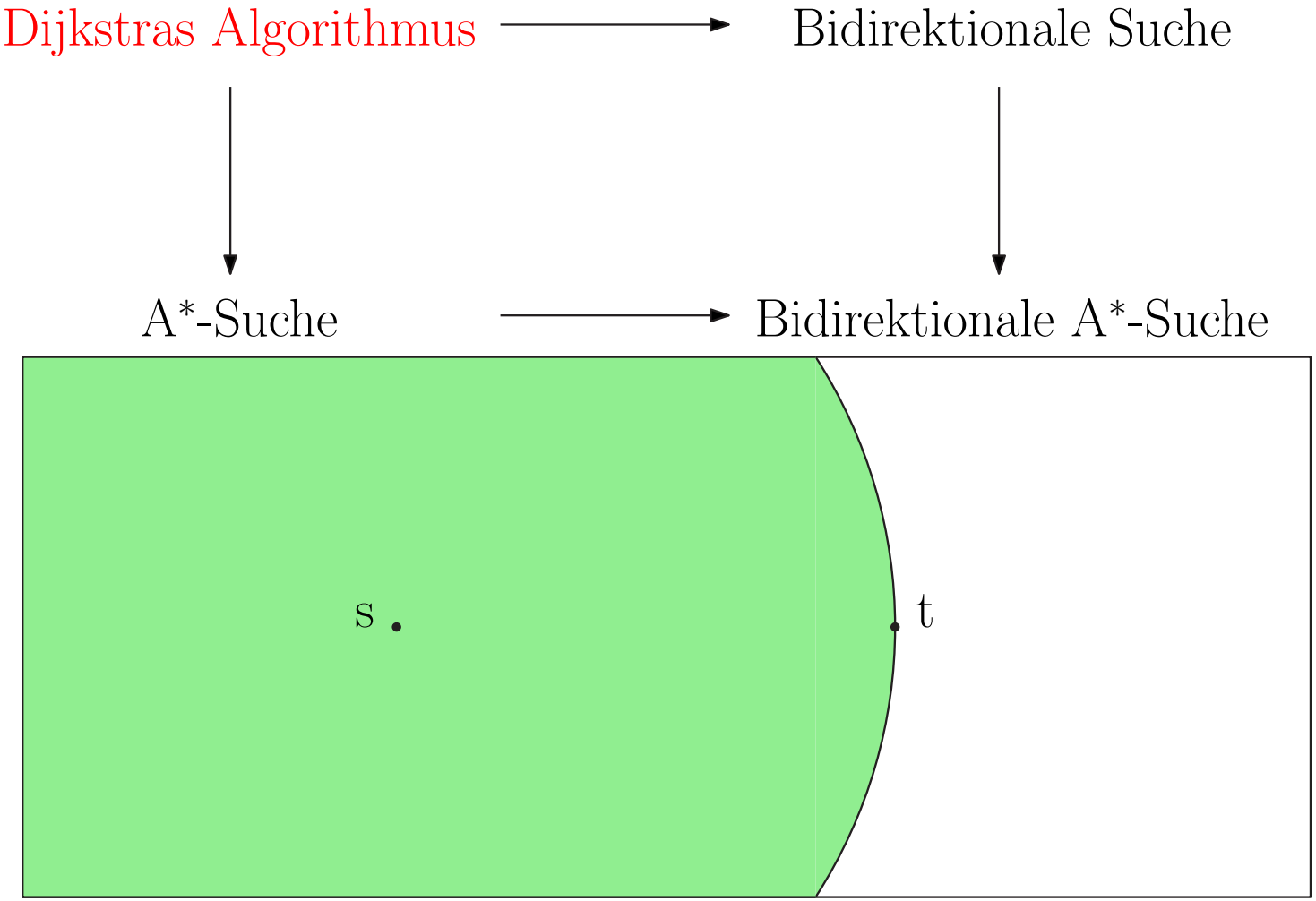
- gegeben
  - Graph $G = (V, E)$
  - Kantengewichte $c(u, v) : E \to \mathbb{R}_0^+$
- betrachte Suche von Start s nach Ziel t (One-to-One Query)
  $\to$ kürzeste Distanz $\mu(s, t)$ bestimmen

Übersicht über verschiedene Varianten

- Dijkstras Algorithmus (auch One-to-All Query)
- Bellmann Ford Algorithmus (auch negative Kantengewichte)
- Bidirektionale Suche (Beschleunigungstechnik)
- A*-Suche (Heuristik, wichtig in KI)
- ...

Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten

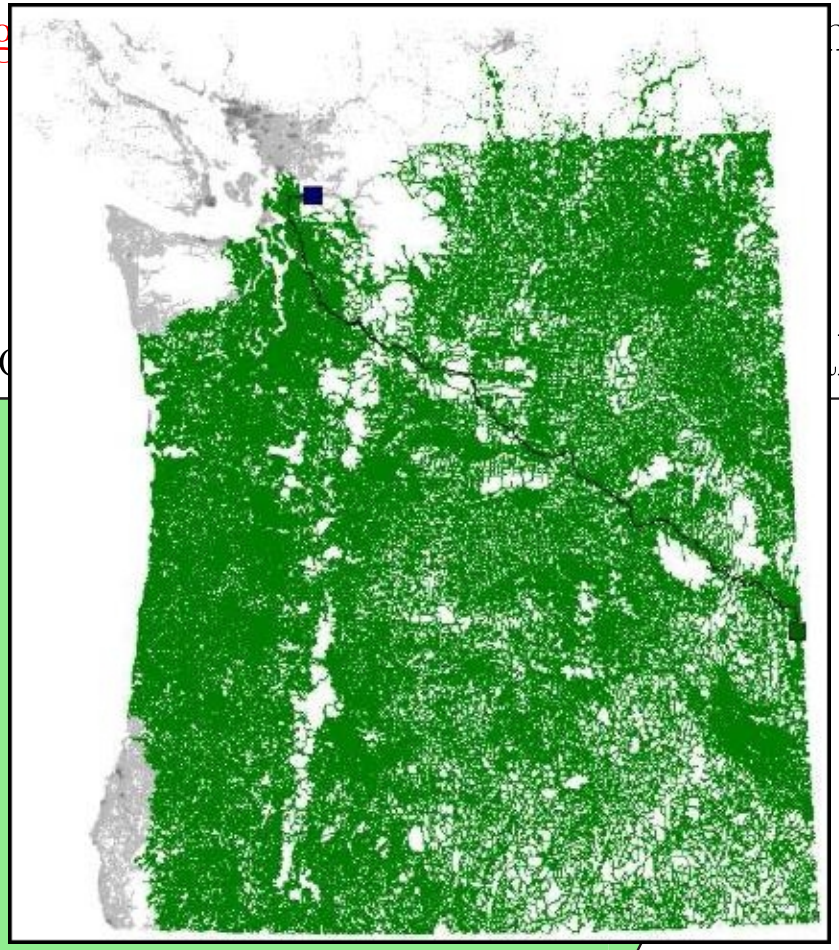


Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten

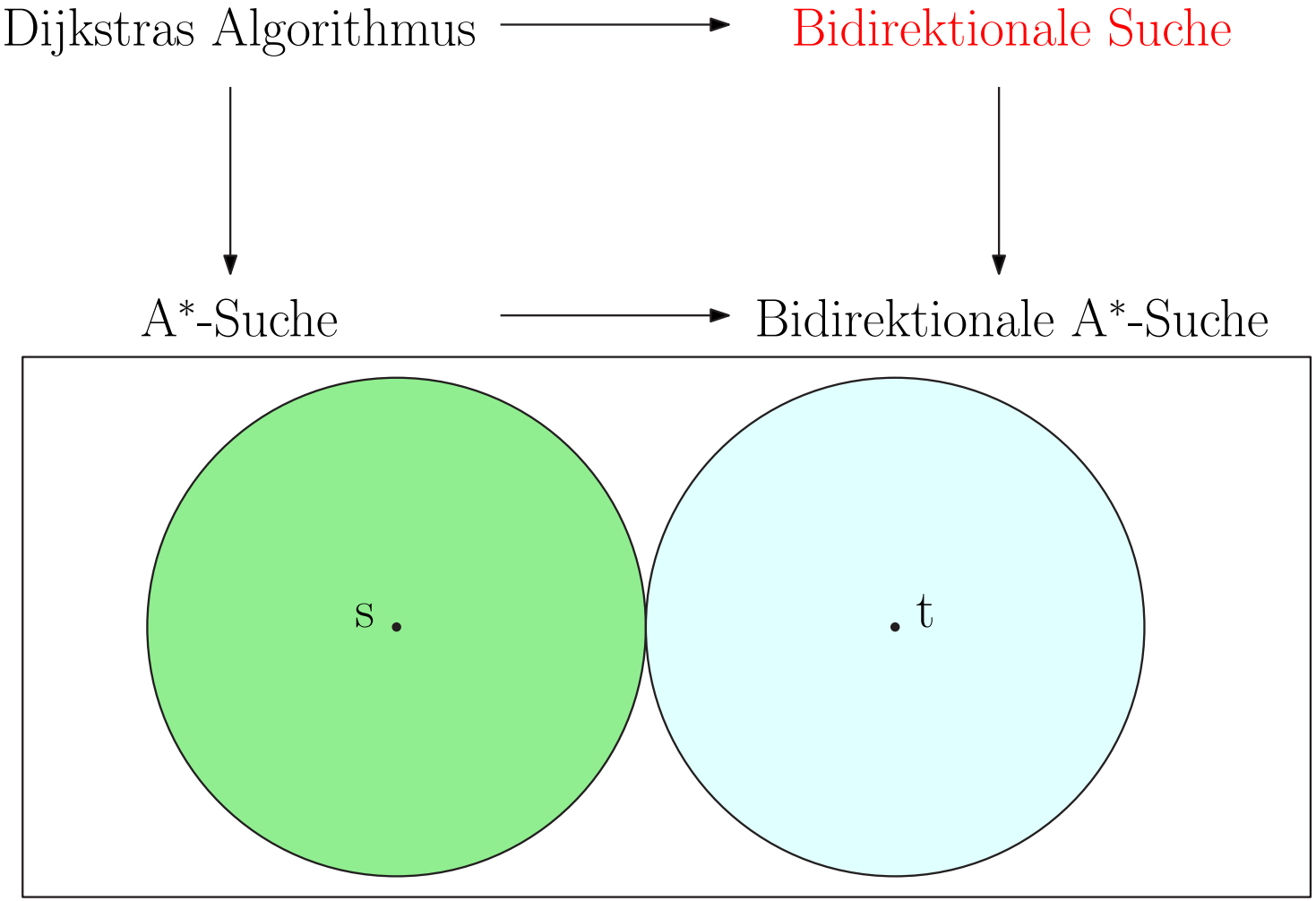
Dijkstras Alg … nale Suche

A*-Suc … le A*-Suche



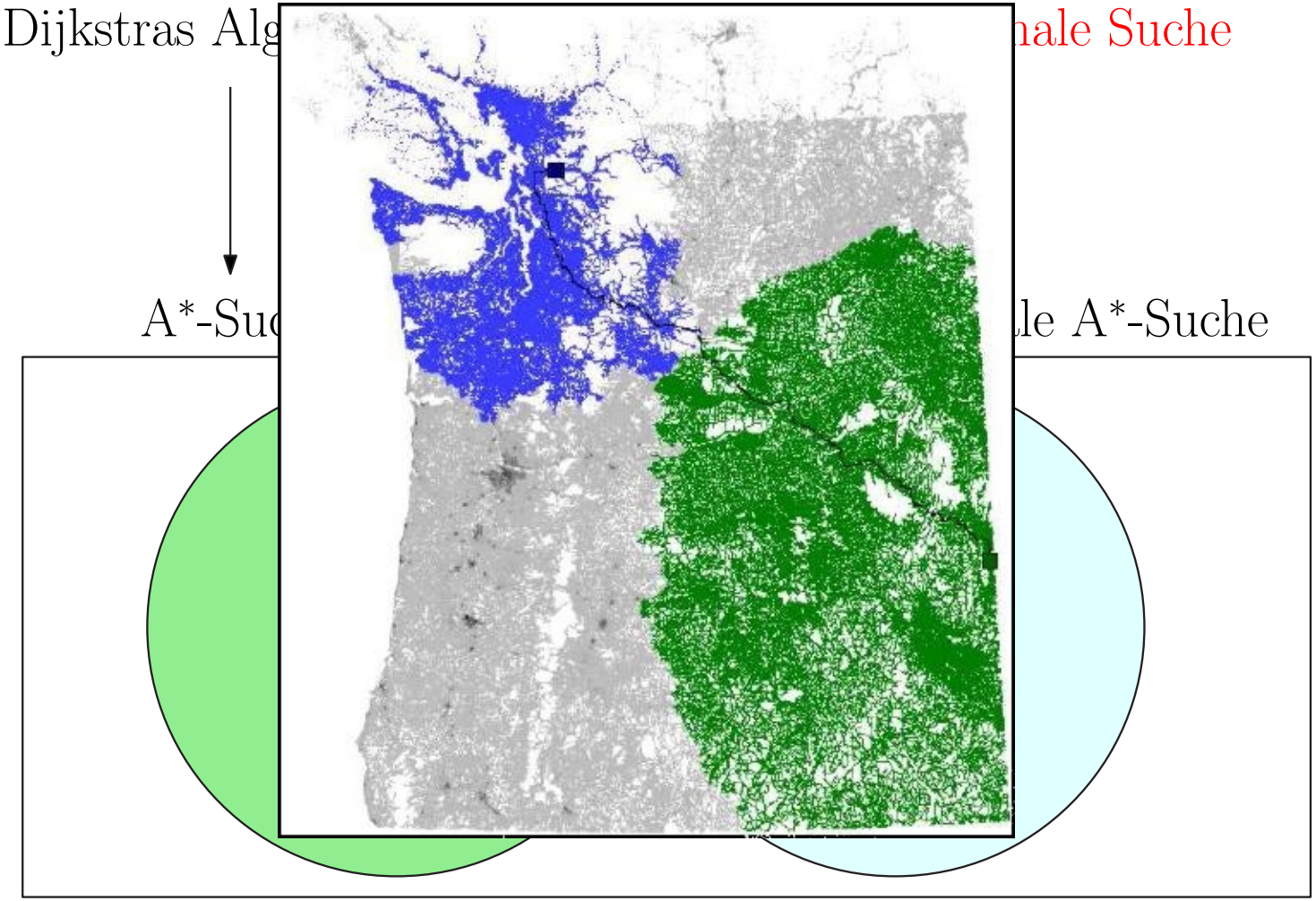
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



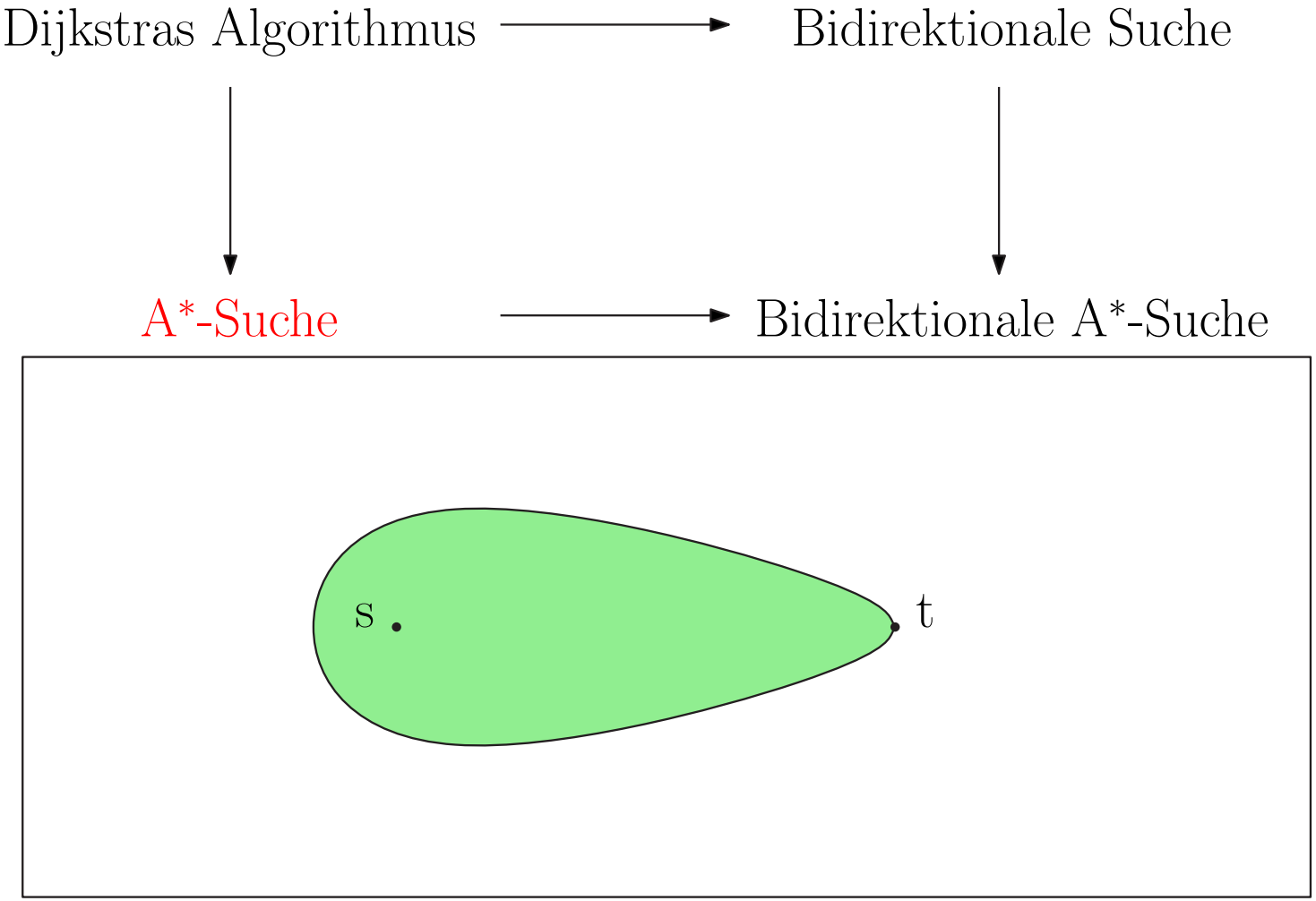
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



Suche in Graphen

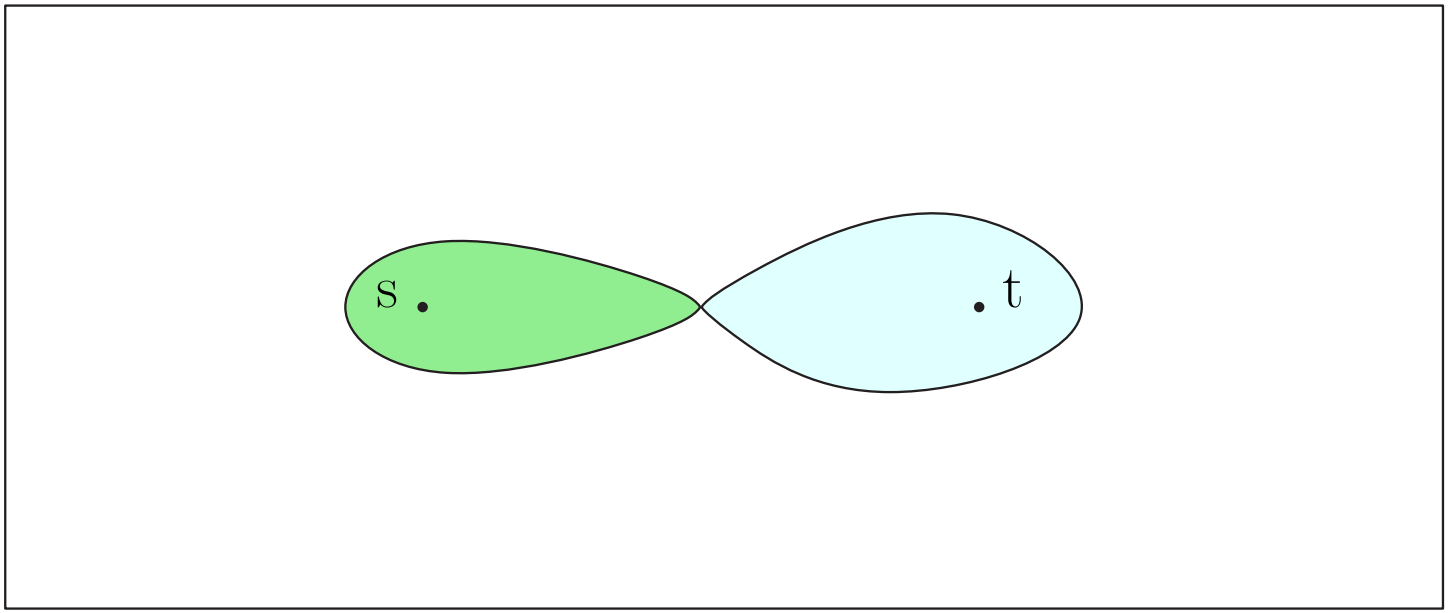
Übersicht über verschiedene Varianten



Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten

$$\begin{tikzcd}
\text{Dijkstras Algorithmus} \arrow[r] \arrow[d] & \text{Bidirektionale Suche} \arrow[d] \\
\text{A*-Suche} \arrow[r] & \text{Bidirektionale A*-Suche}
\end{tikzcd}$$

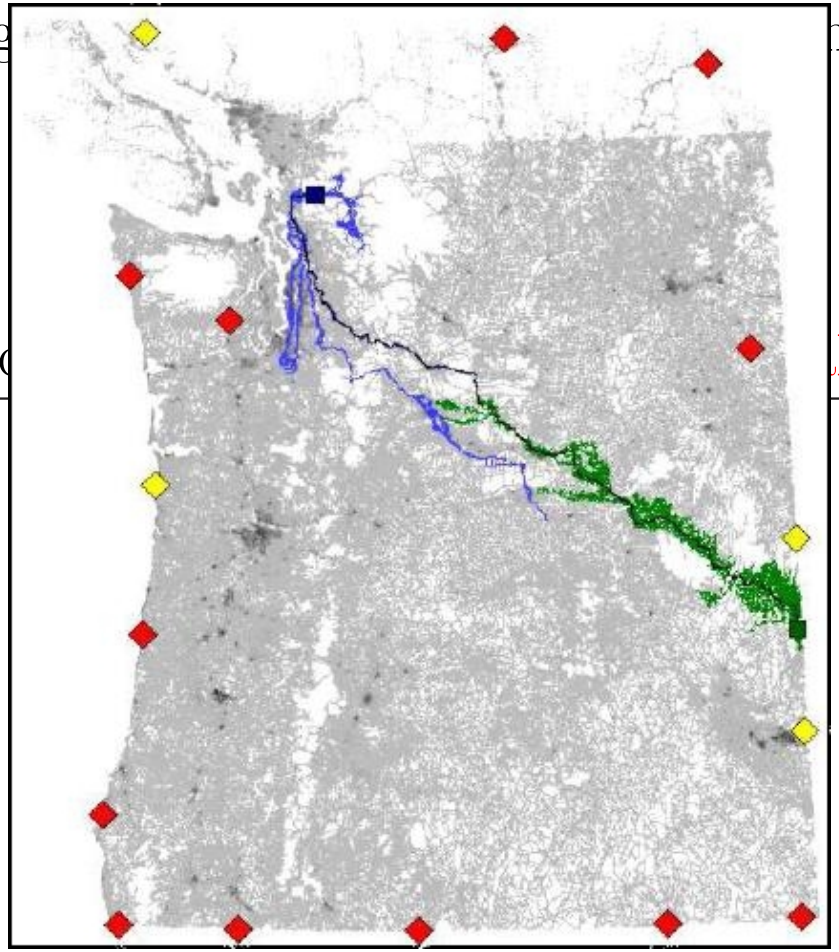


Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten

Dijkstras Alg … nale Suche

A*-Suc … le A*-Suche



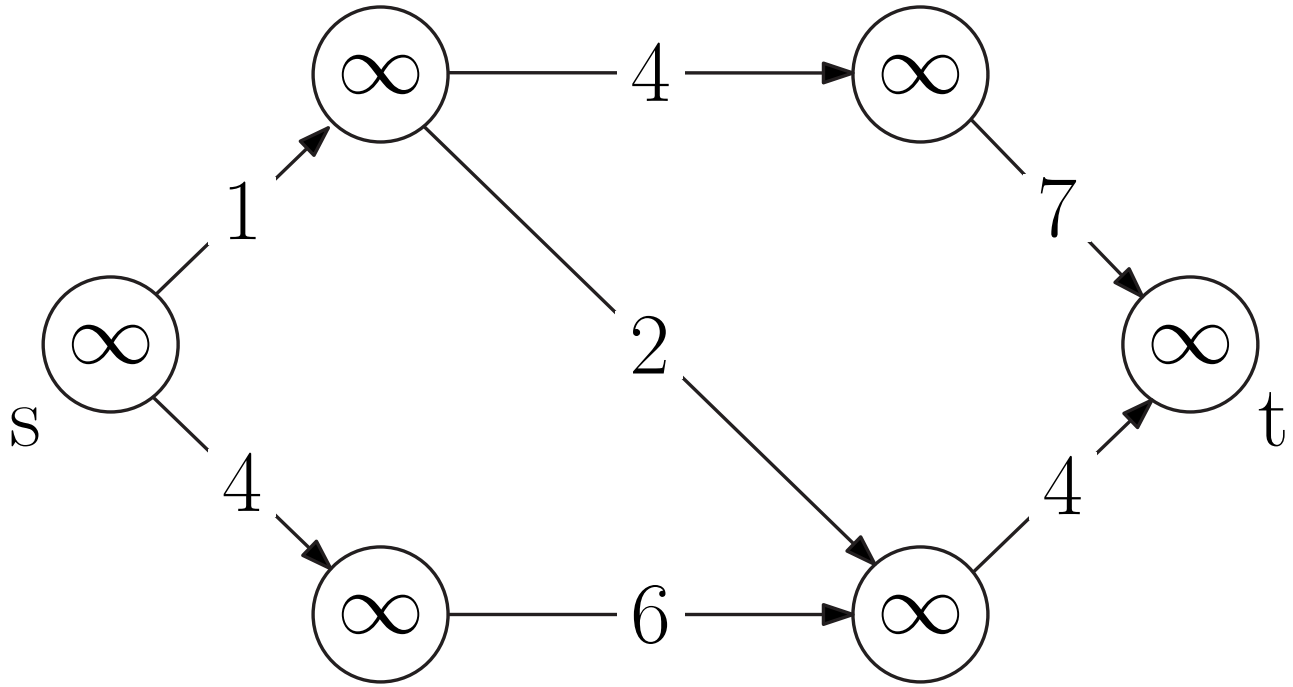
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



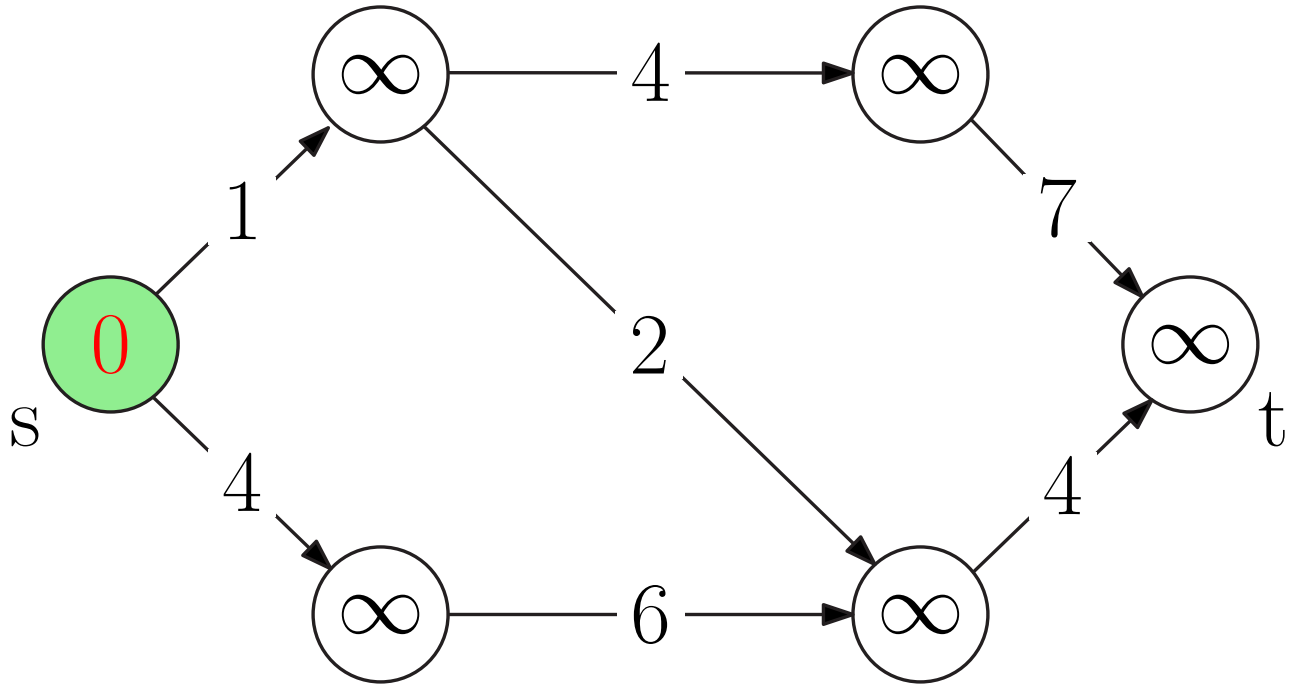
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



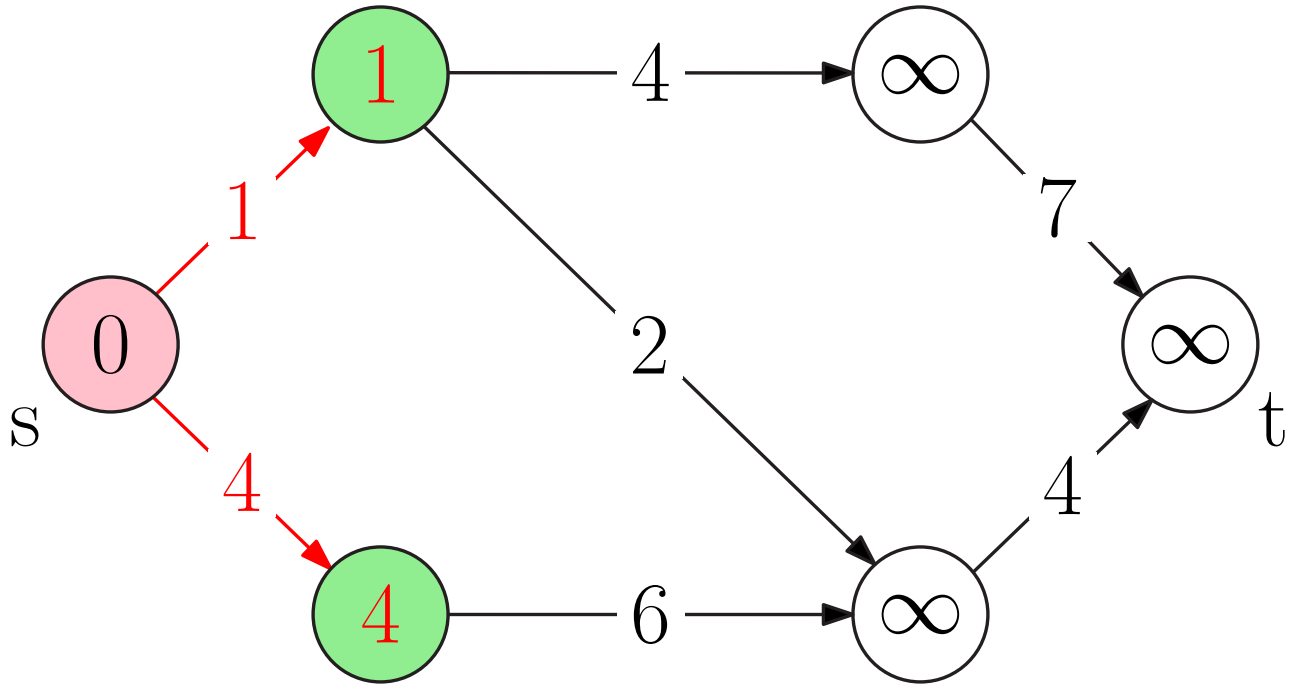
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



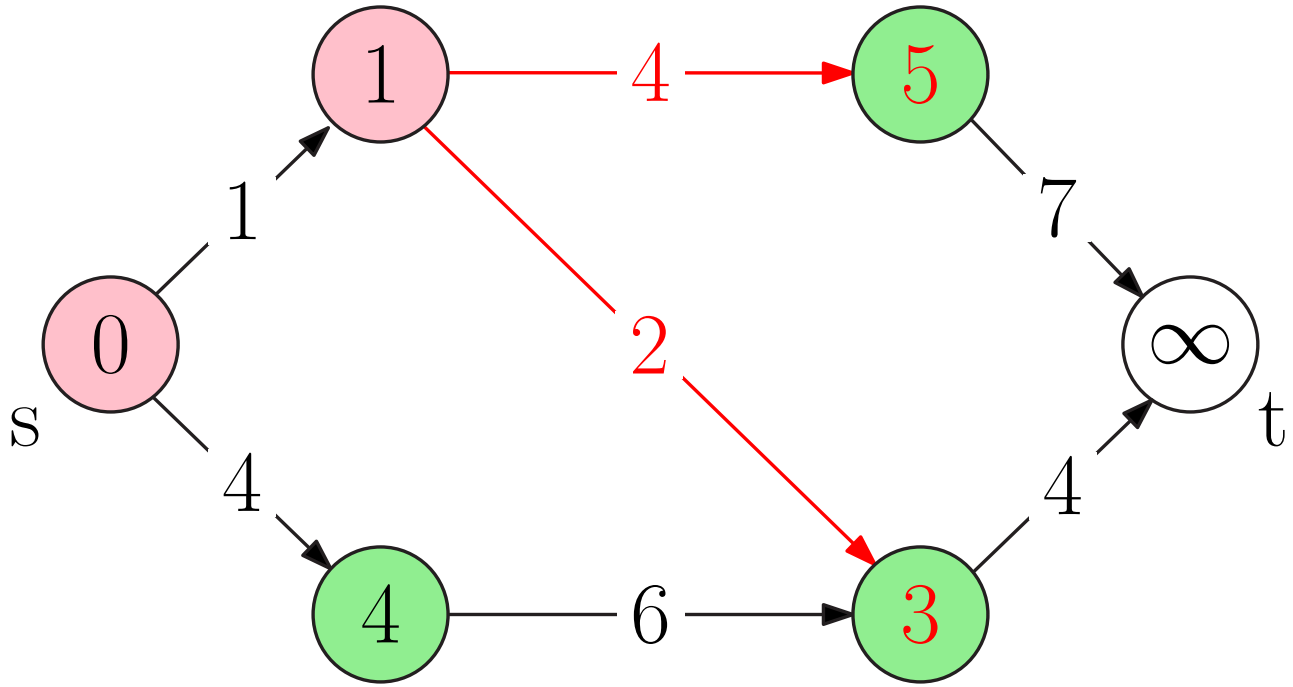
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



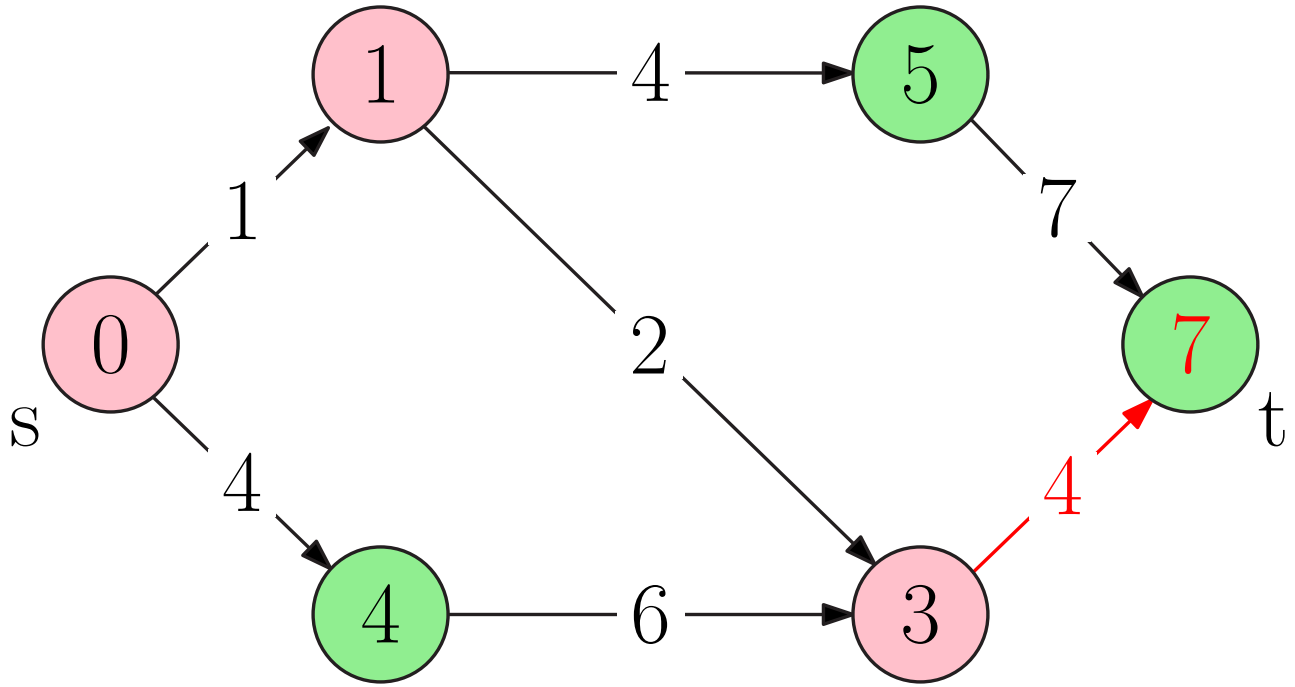
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



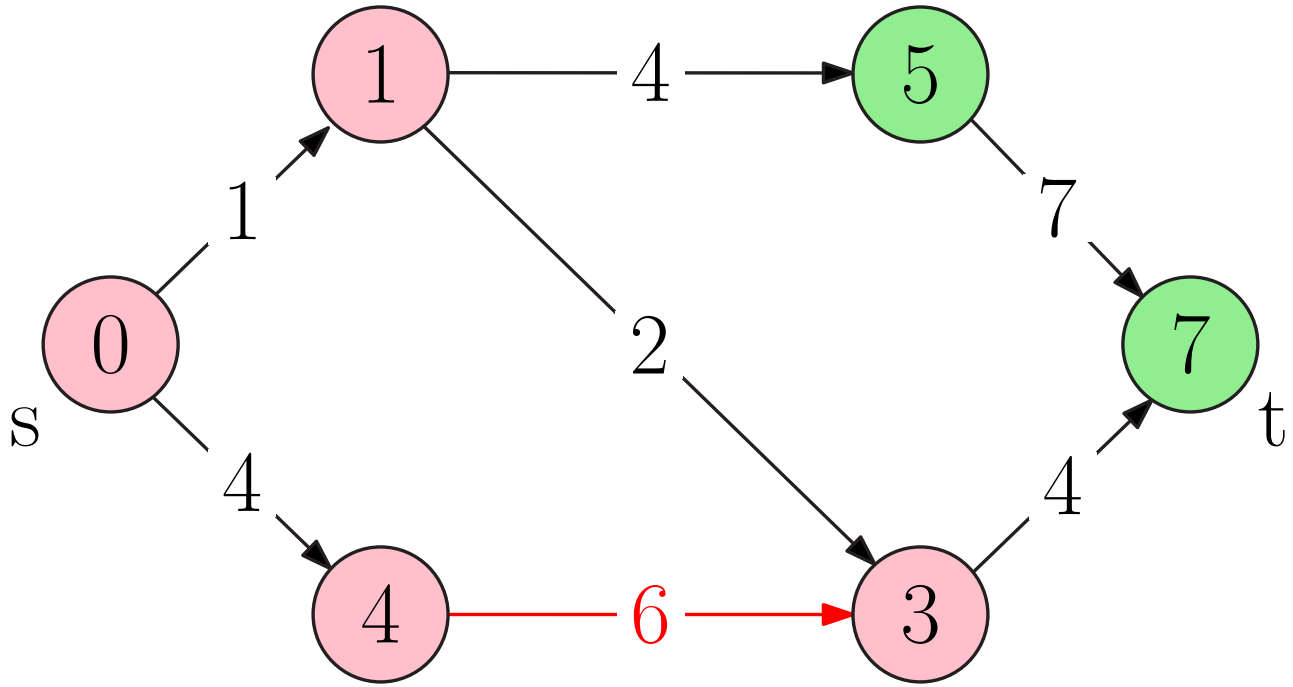
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



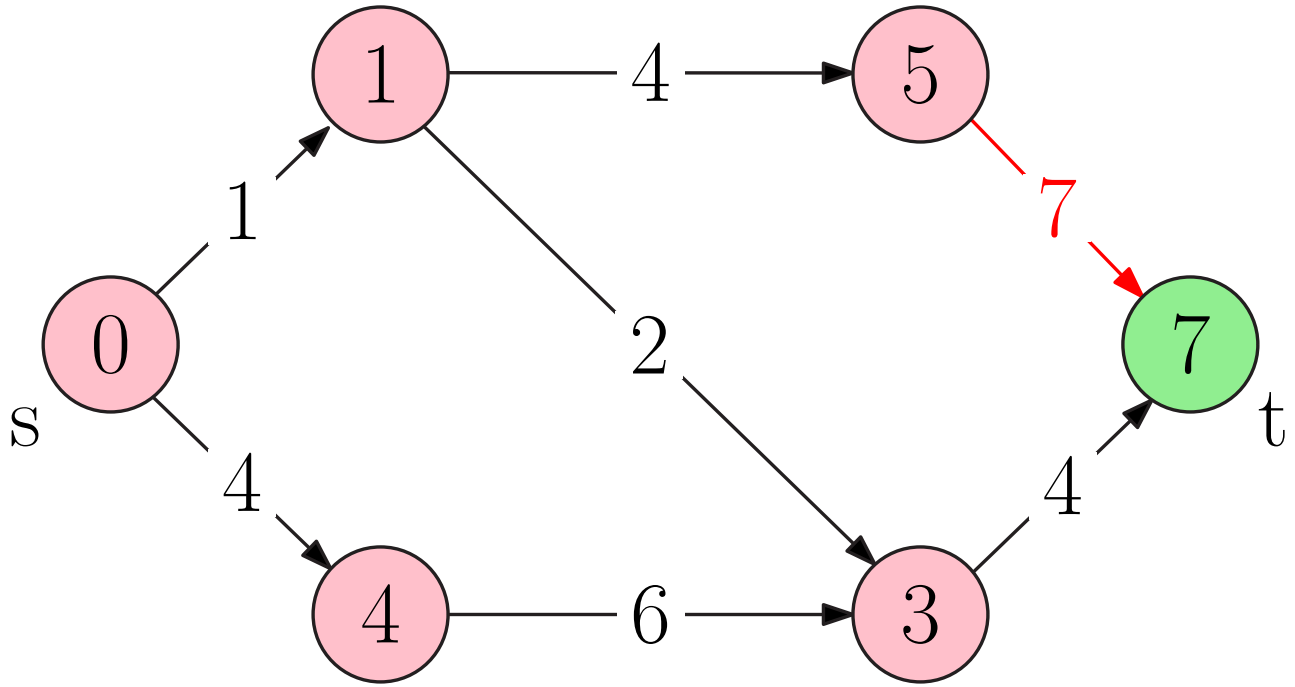
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



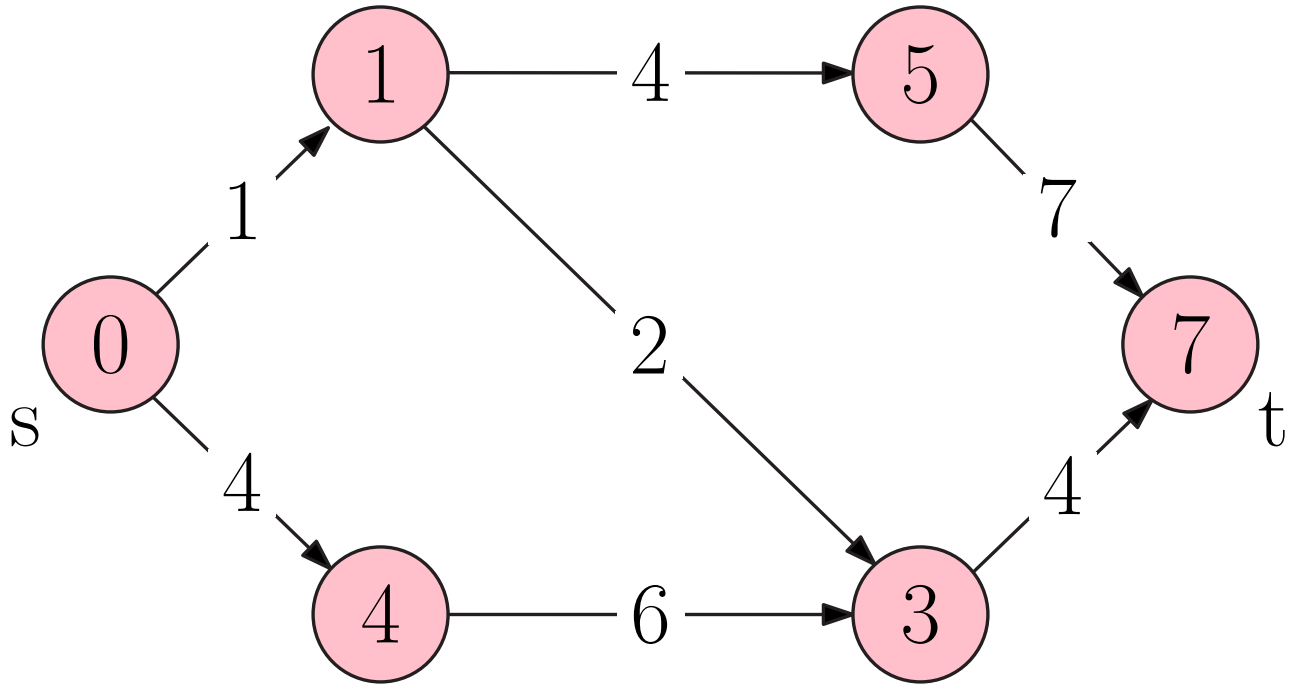
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



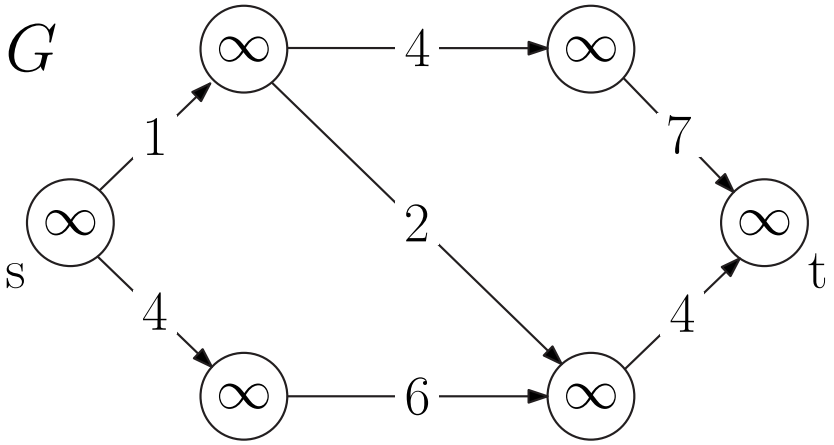
Suche in Graphen

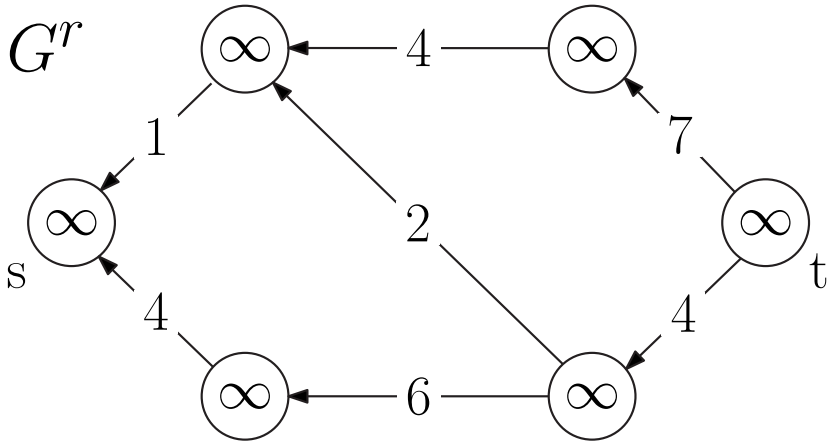
Bidirektionale Suche

Eigenschaften

- führt zweimal Dijkstras Algorithmus aus
  $\rightarrow$ Vorwärtssuche ($s \rightarrow t$) auf normalem Graph G,
  $\rightarrow$ Rückwärtssuche ($t \rightarrow s$) auf Rückwärtsgraph G^r

Beispiel





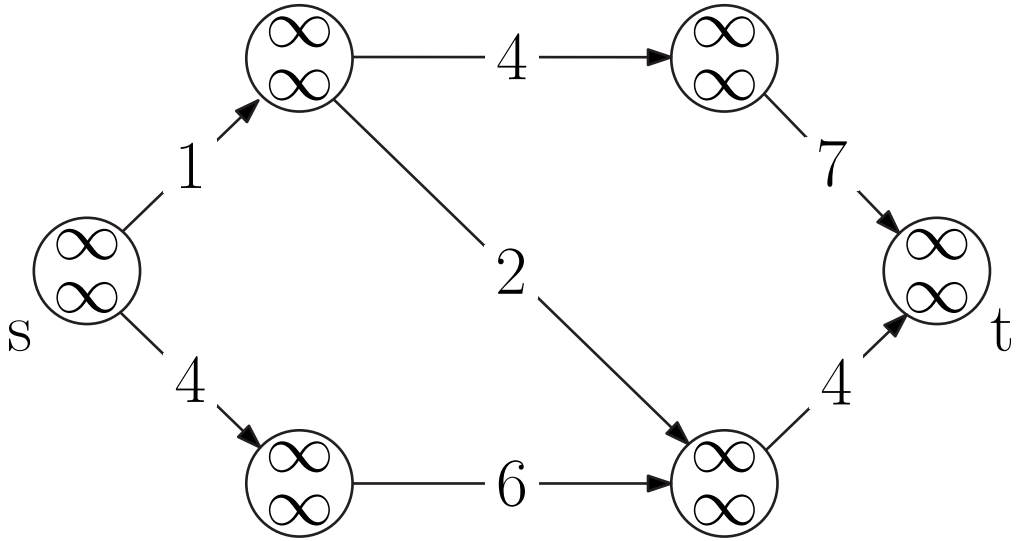
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



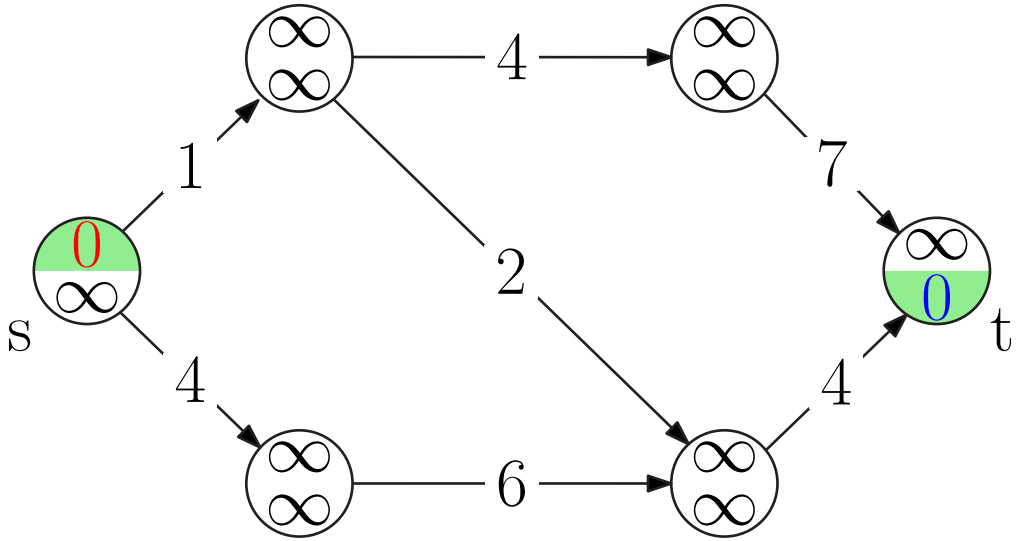
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



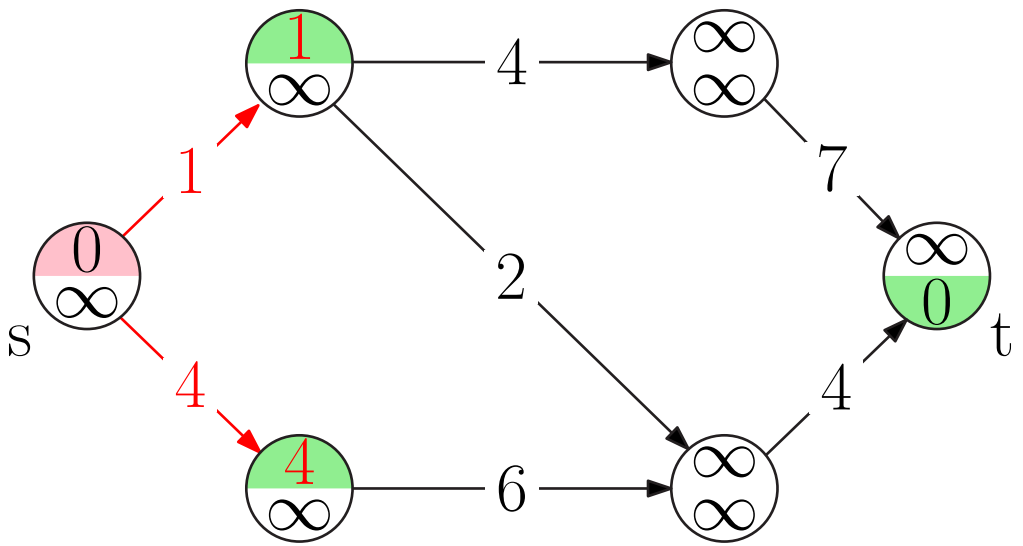
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



forward

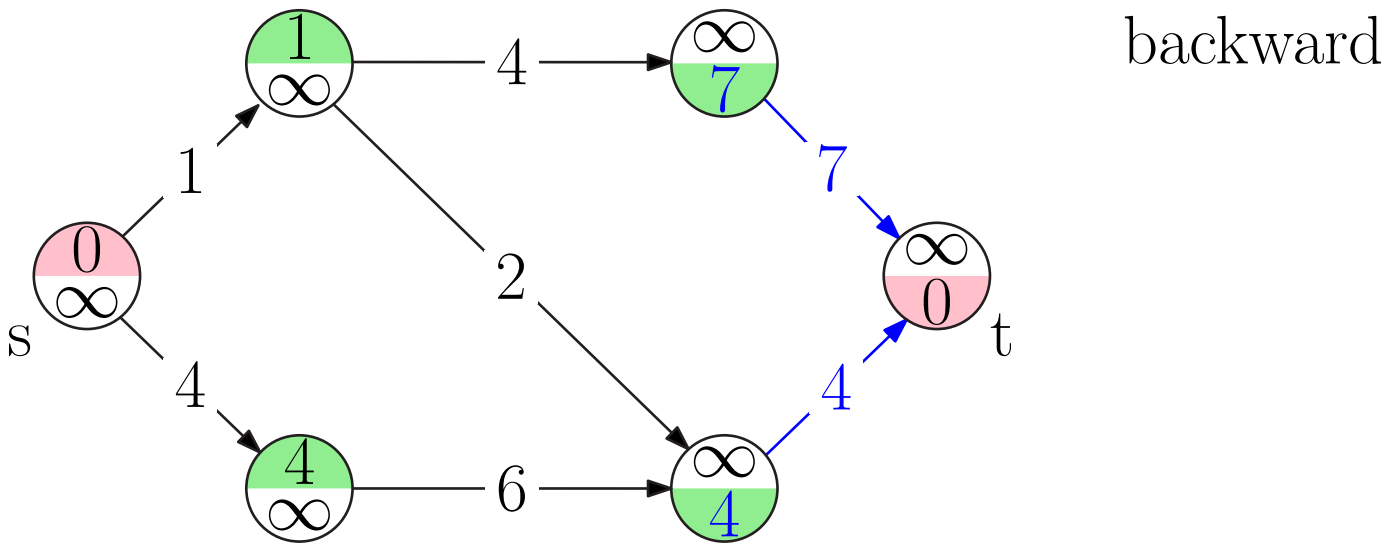
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



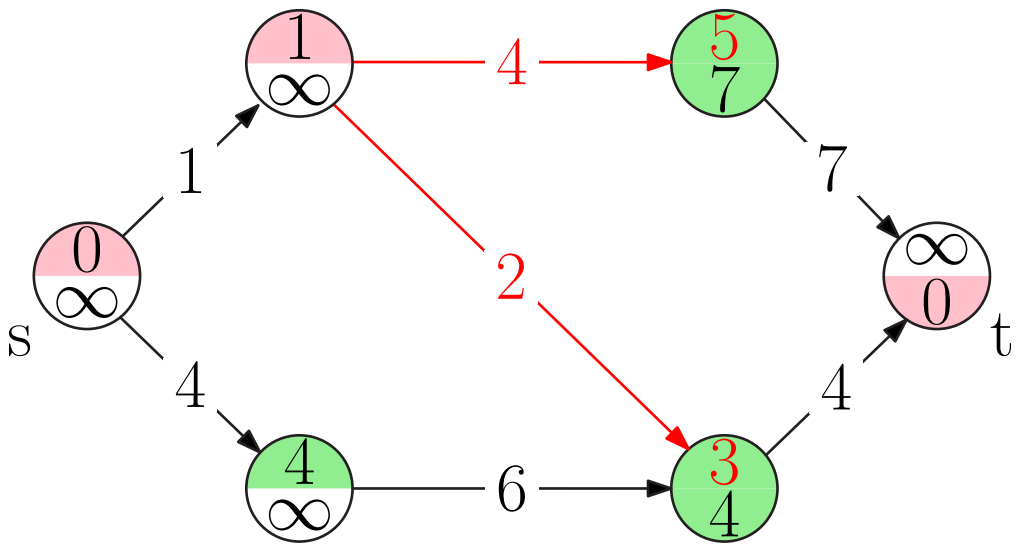
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



forward

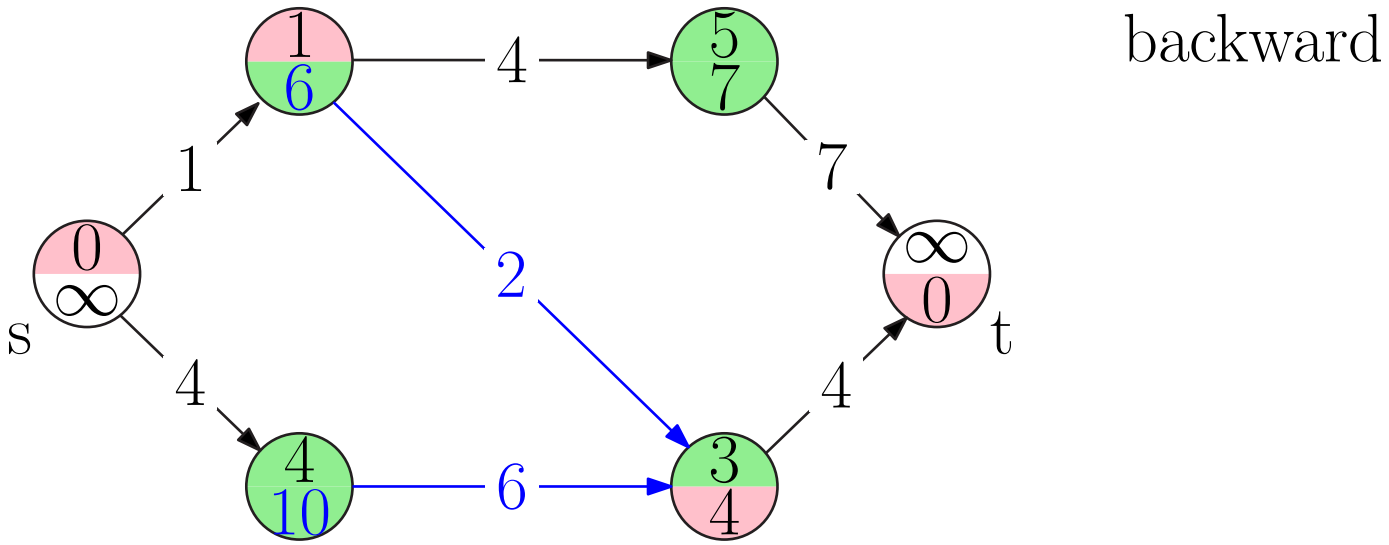
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



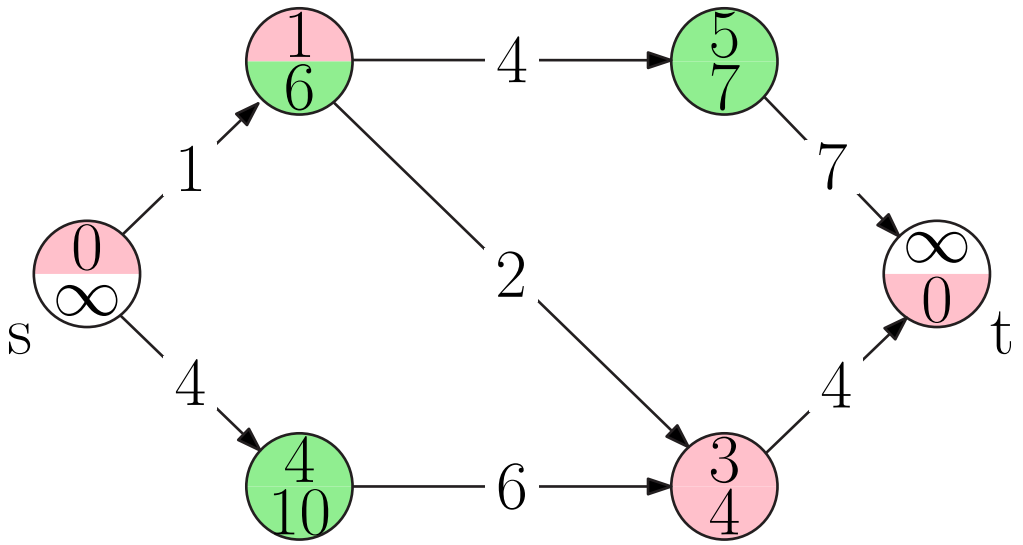
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



forward

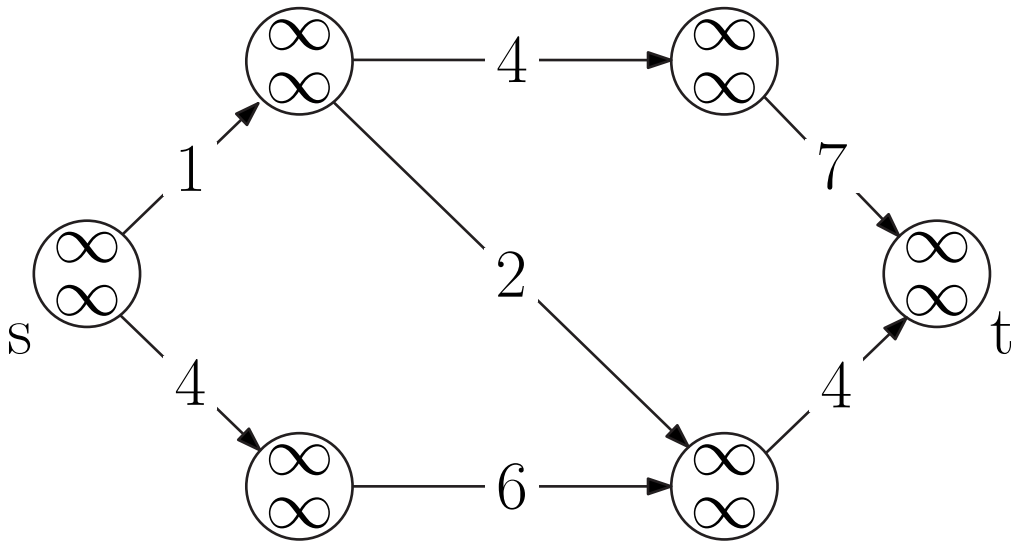
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



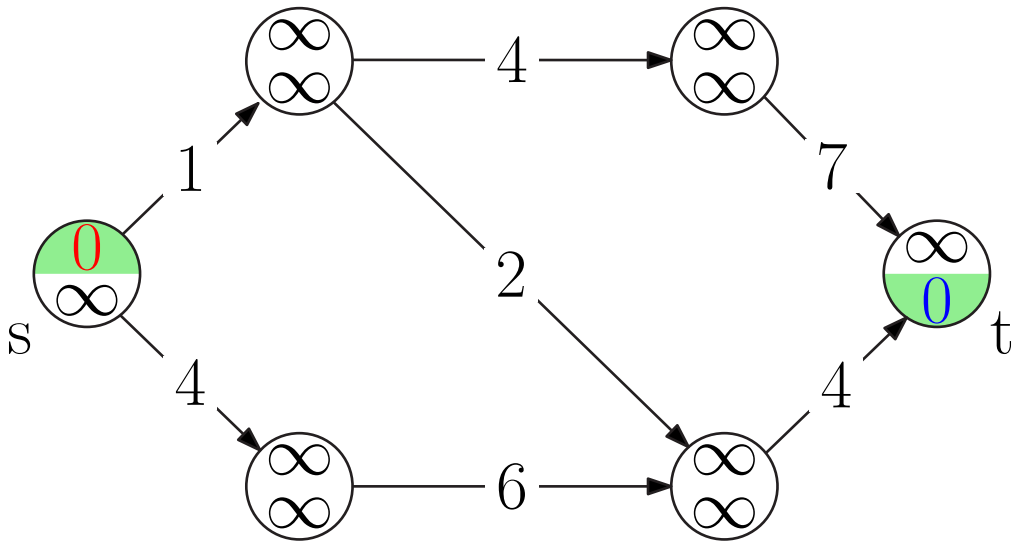
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



$d[s,t] = \infty$

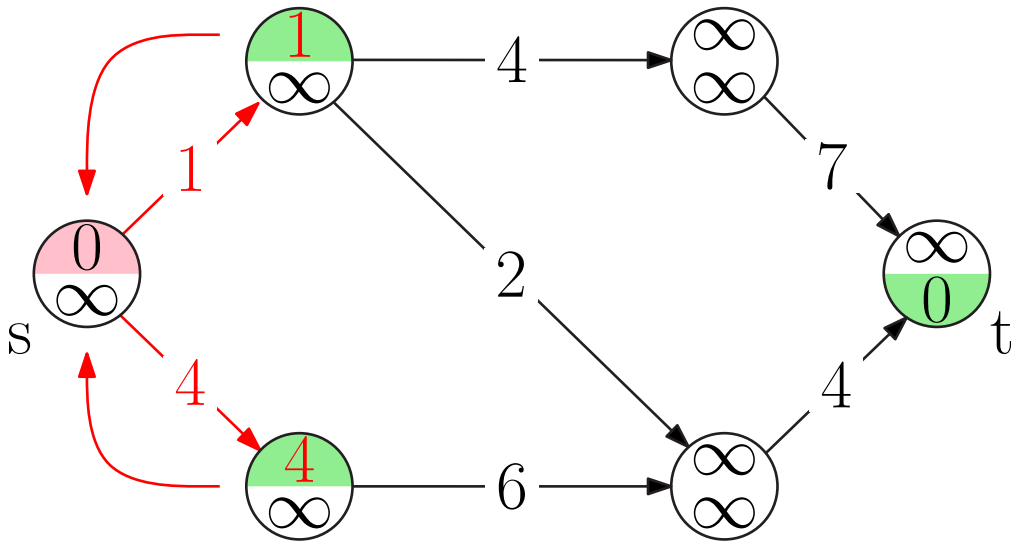
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = \infty$

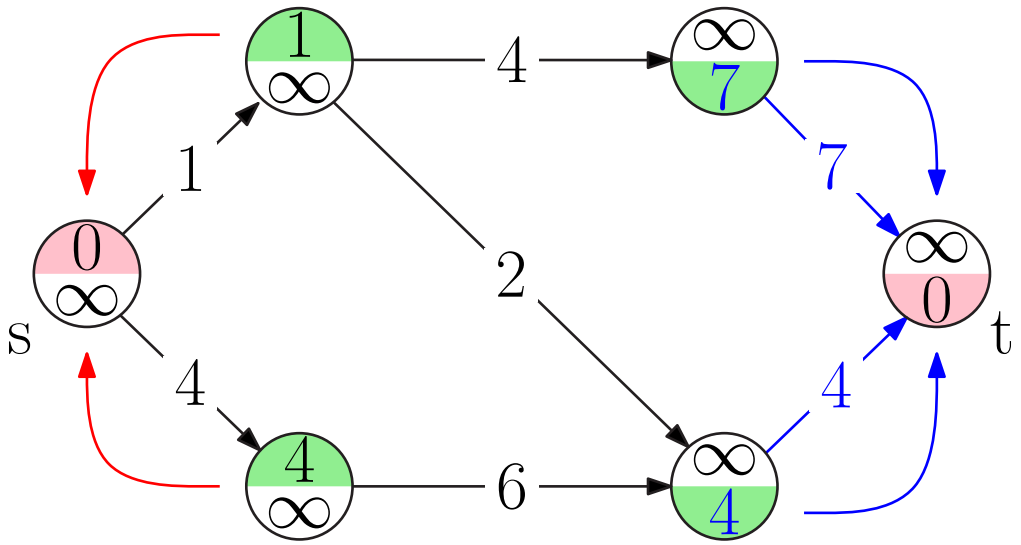
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



$d[s,t] = \infty$

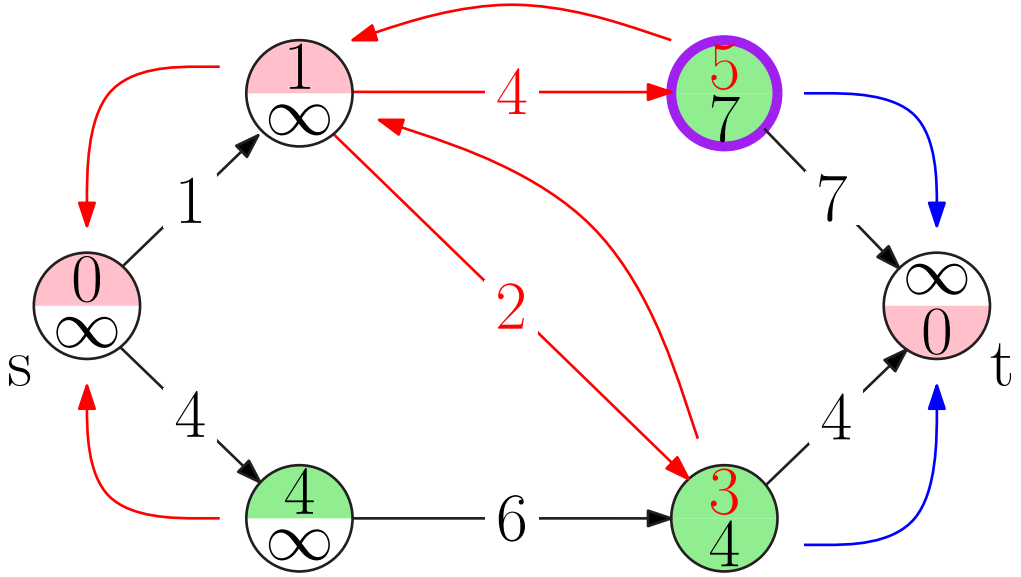
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 12$

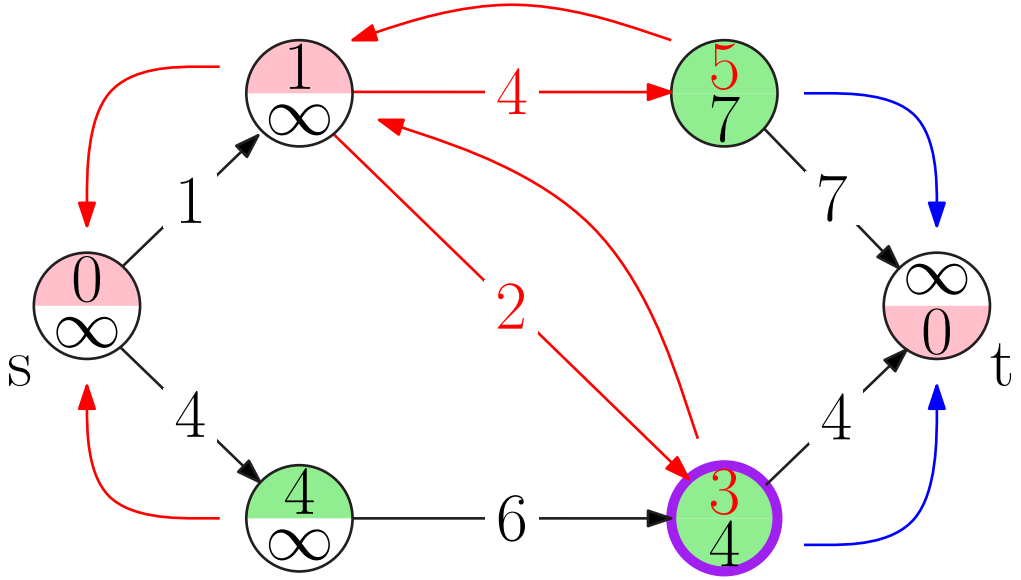
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

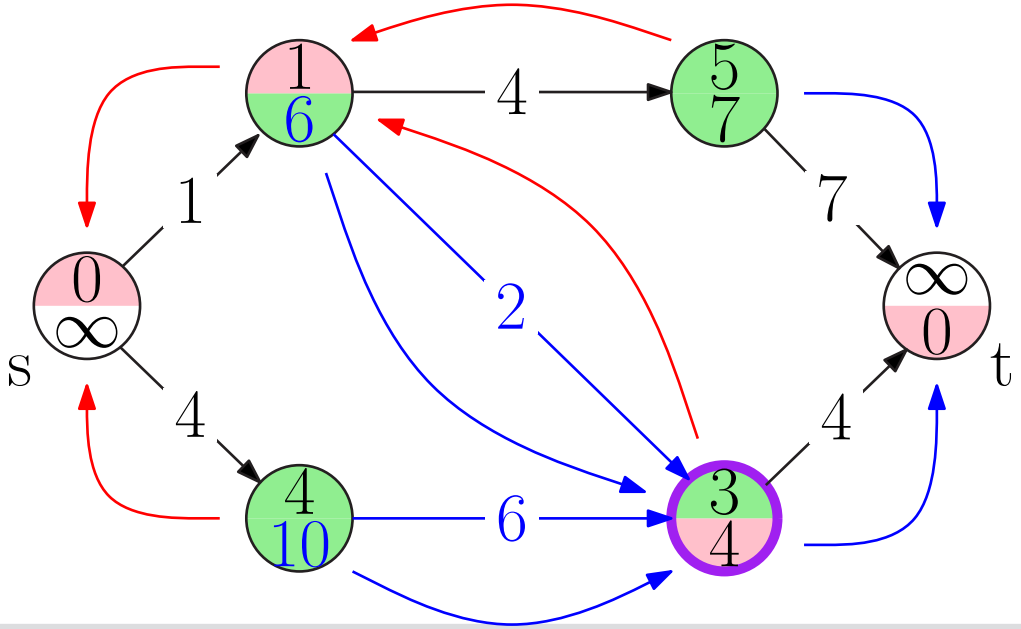
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



backward

$d[s,t] = 7$

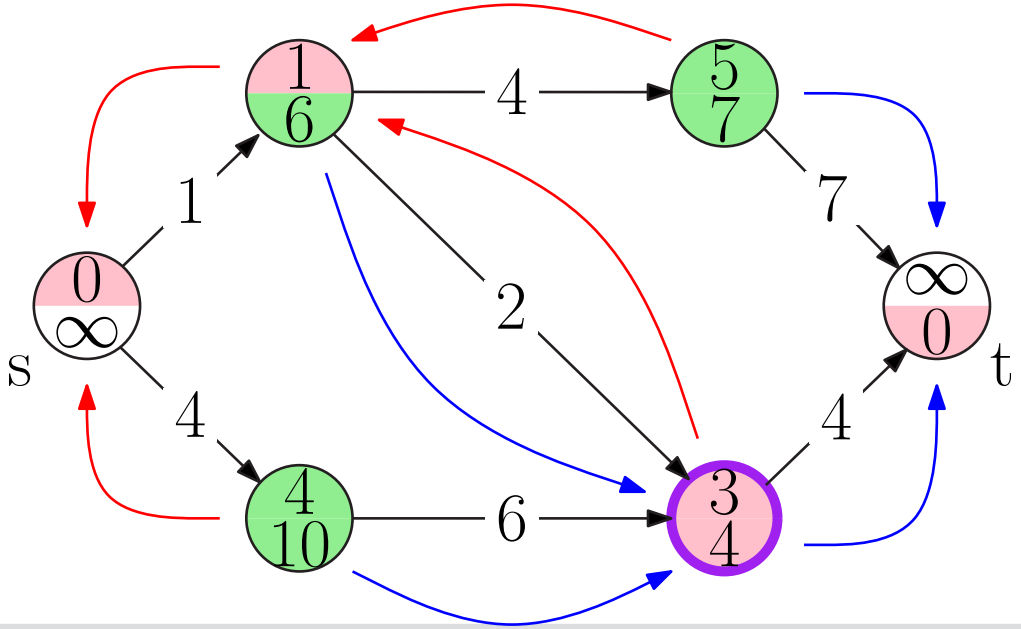
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

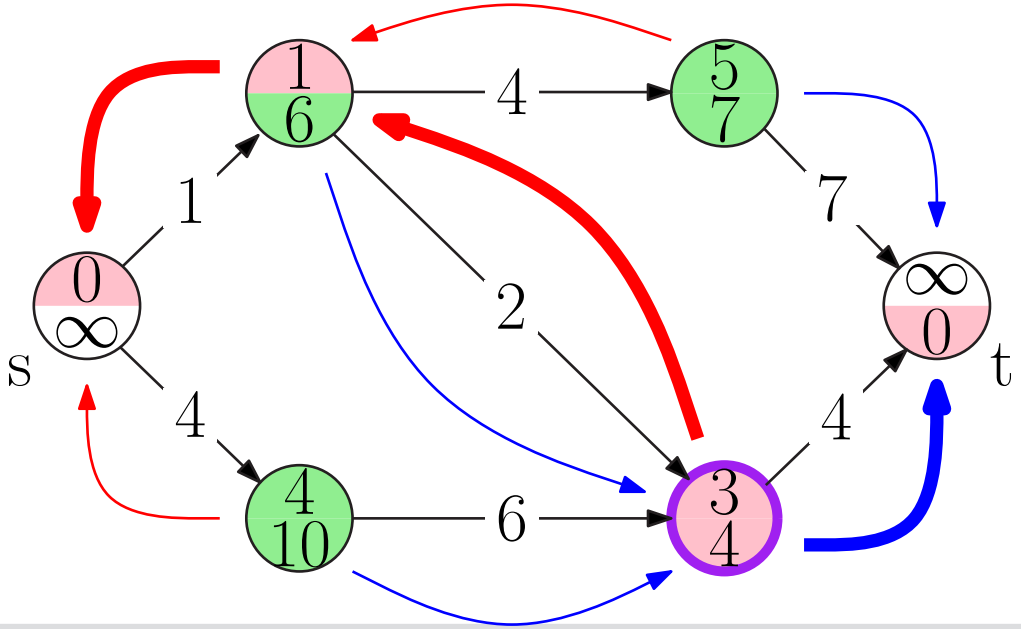
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

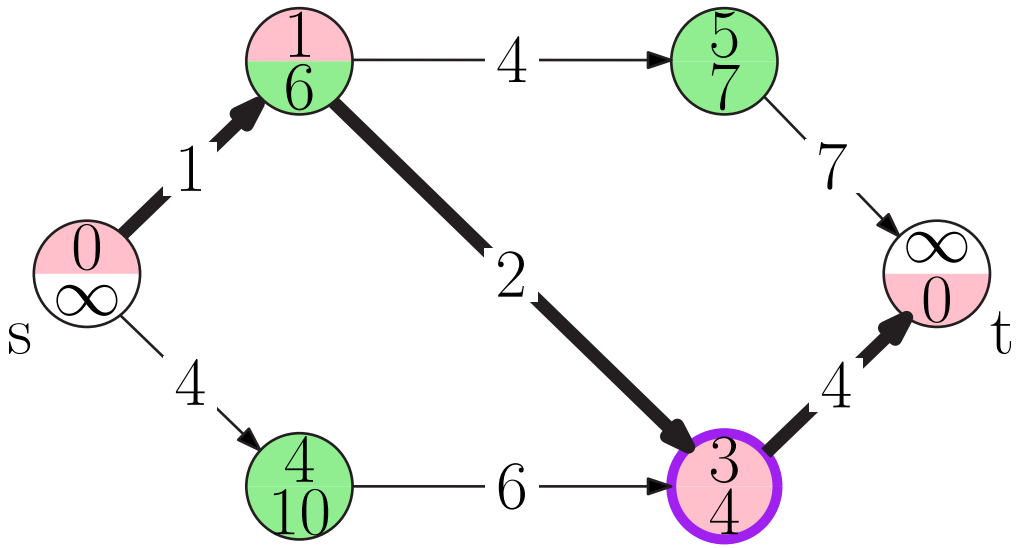
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

Suche in Graphen

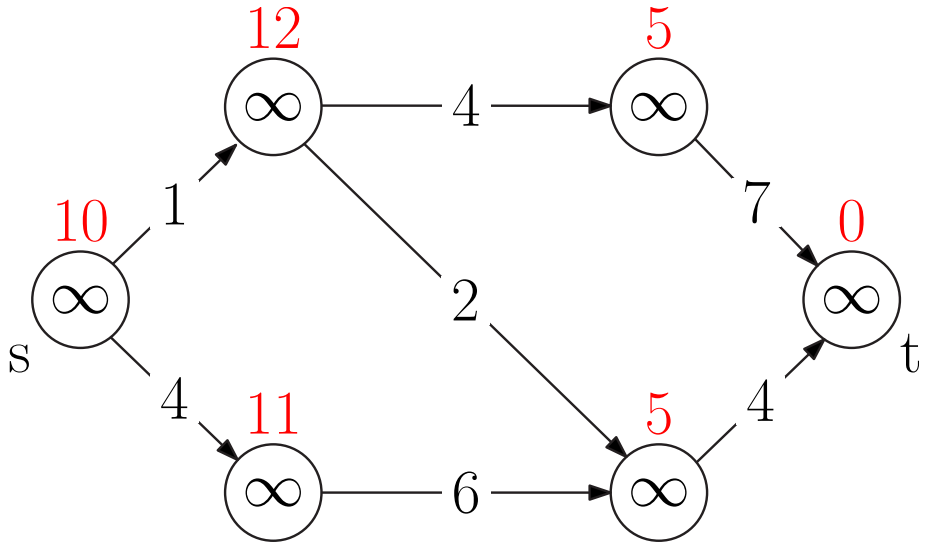
A*-Suche

Eigenschaften

- zielgerichtete Suche
- benötigt Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
  - reduzierte Kantengewichte $\overline{c}(u, v) := c(u, v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u)$ bzw.
  - modifizierte Schlüssel $\overline{d}[v] := d[v] + \text{pot}(v)$

$\rightarrow$ Abarbeitung der Knoten wird geändert (verbessert?)
$\rightarrow$ kürzeste Pfade bleiben erhalten

Beispiel



Suche in Graphen

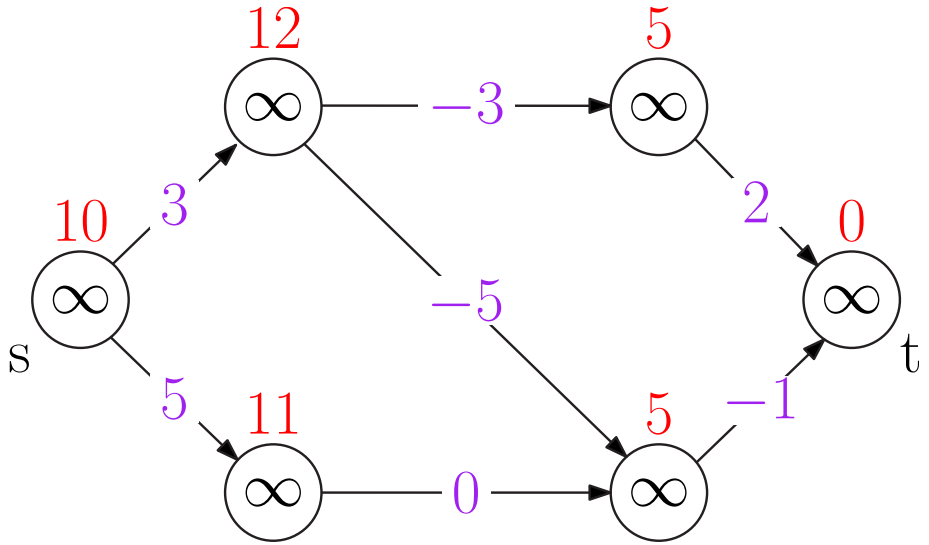
A*-Suche

Eigenschaften

- zielgerichtete Suche
- benötigt Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
  - reduzierte Kantengewichte $\overline{c}(u, v) := c(u, v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u)$ bzw.
  - modifizierte Schlüssel $\overline{d}[v] := d[v] + \text{pot}(v)$

$\rightarrow$ Abarbeitung der Knoten wird geändert (verbessert?)
$\rightarrow$ kürzeste Pfade bleiben erhalten

Beispiel



Suche in Graphen

A*-Suche – Potentialfunktionen

Eigenschaften

- Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
- heuristische Funktion
  - modelliert vorhandenes Wissen über Graph
  - schätzt Distanz zum Ziel $\rightarrow \overline{d}[v]$ schätzt $\mu(s,t)$

gültige Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot)$

- untere Schranke für Distanz zum Ziel t
  $\rightarrow \text{pot}(u) \leq \mu(u,t) \quad \forall u \in V$
  (beendet Suche sobald t gescannt wurde)
- nicht-negative reduzierte Kantengewichte
  $\rightarrow \overline{c}(u,v) := c(u,v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u) \geq 0 \quad \forall (u,v) \in E$
  (für Dijkstras Algorithmus)

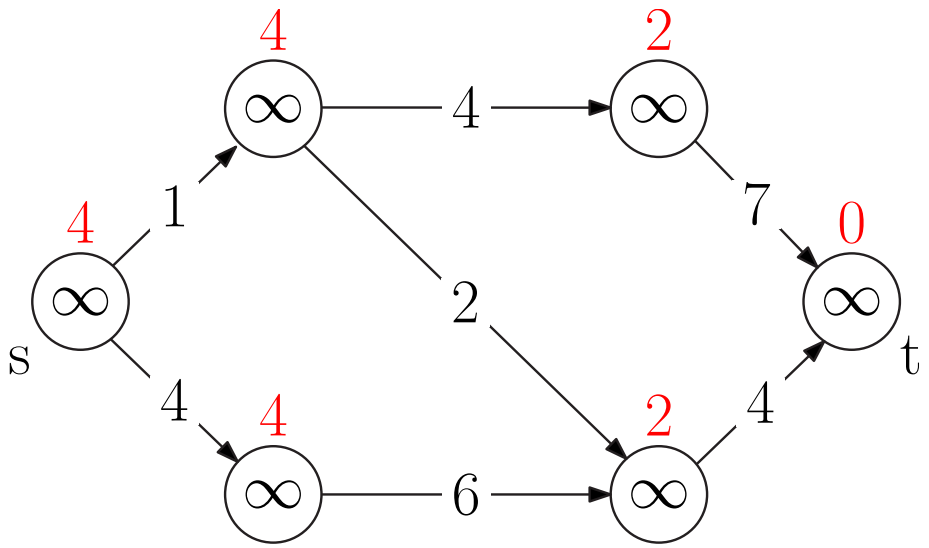
Suche in Graphen

A*-Suche – Potentialfunktionen

Woher nehmen?

- Manhattan-Distanz, euklidischer Abstand, ...
  (benötigt geometrische Einbettung des Graphen)
- Distanzen zu Landmarken und Dreiecksungleichung
  (funktioniert ohne Einbettung)
- Erfahrungswerte
  (z.B. Bewertung von Spielsituationen)

Beispiel



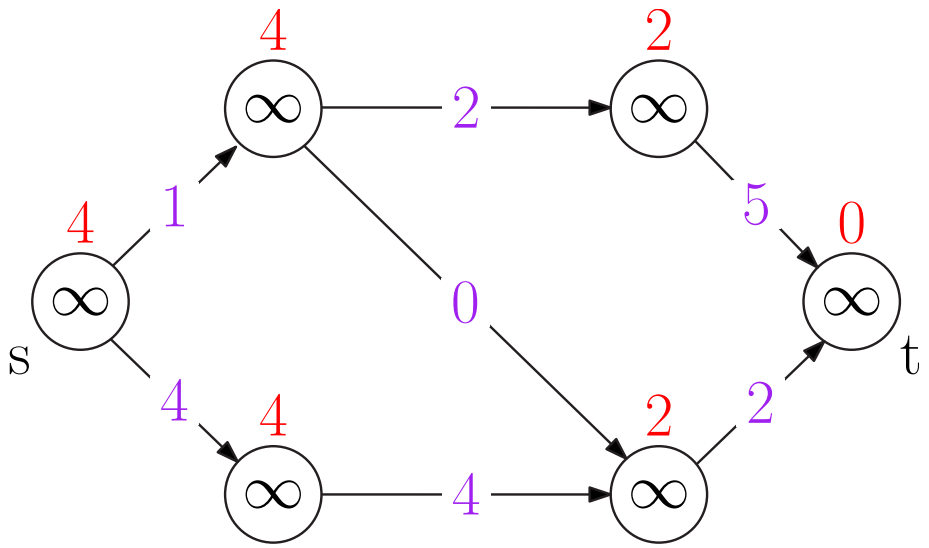
Suche in Graphen

A*-Suche – Potentialfunktionen

Woher nehmen?

- Manhattan-Distanz, euklidischer Abstand, ...
  (benötigt geometrische Einbettung des Graphen)
- Distanzen zu Landmarken und Dreiecksungleichung
  (funktioniert ohne Einbettung)
- Erfahrungswerte
  (z.B. Bewertung von Spielsituationen)

Beispiel

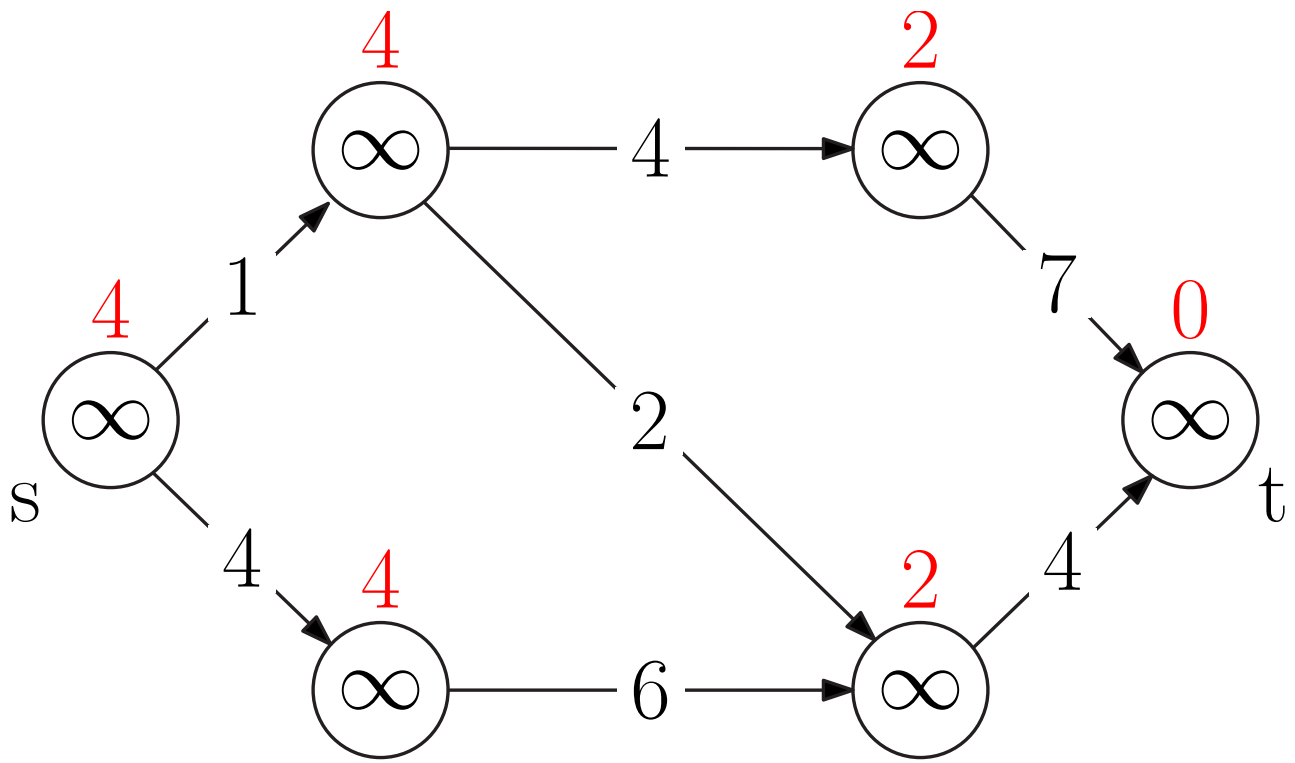


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

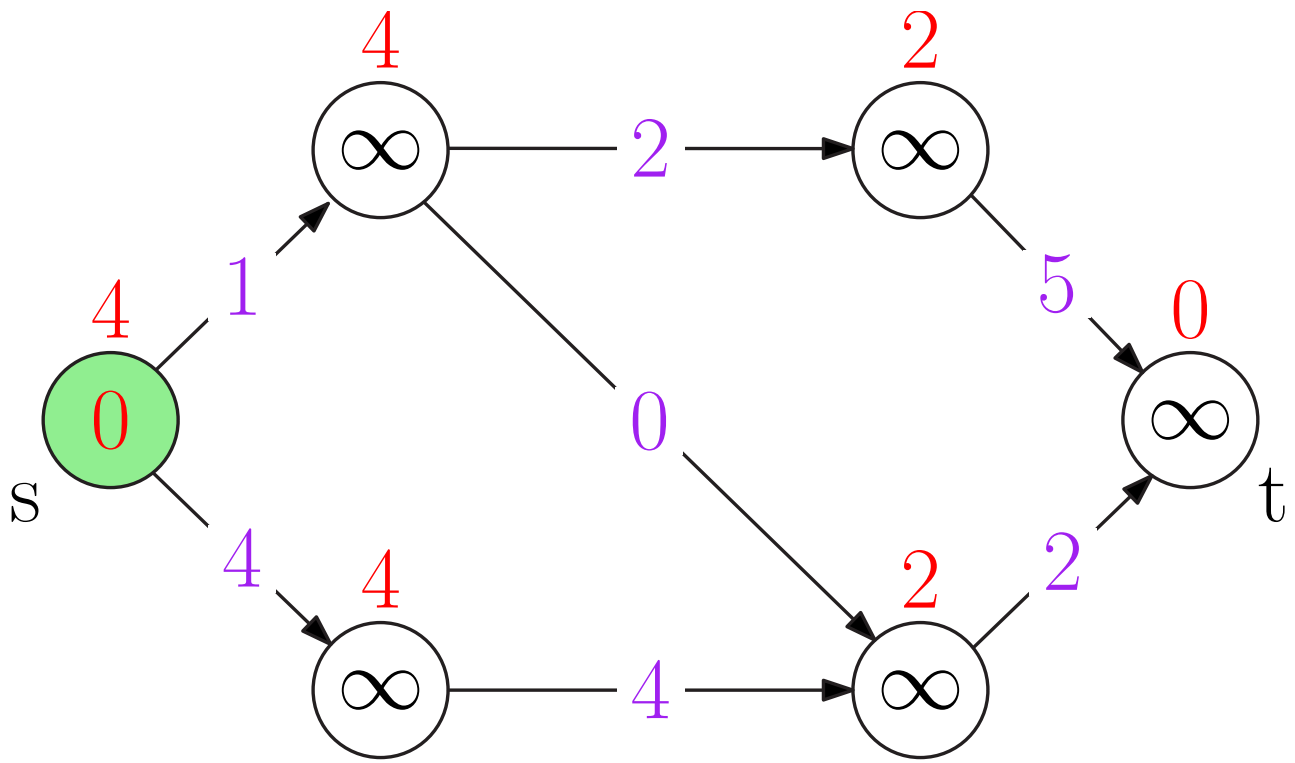


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

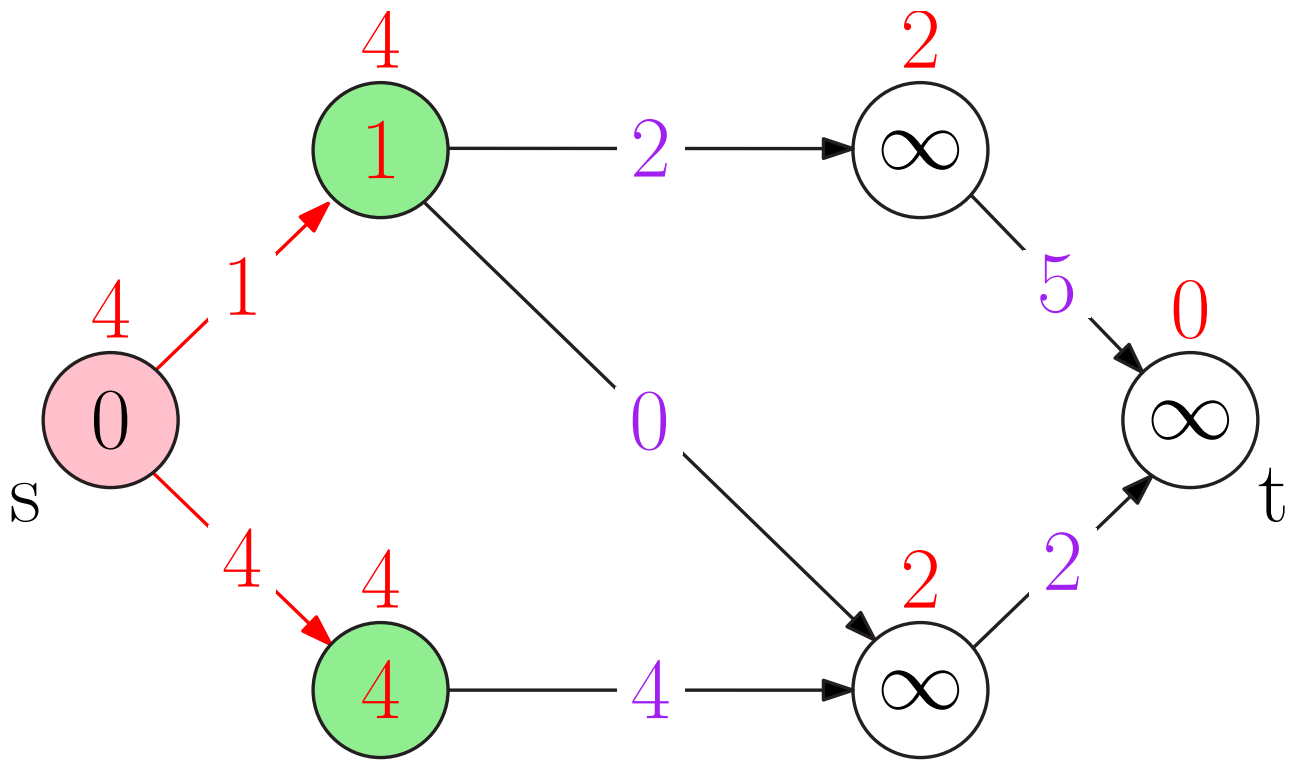


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

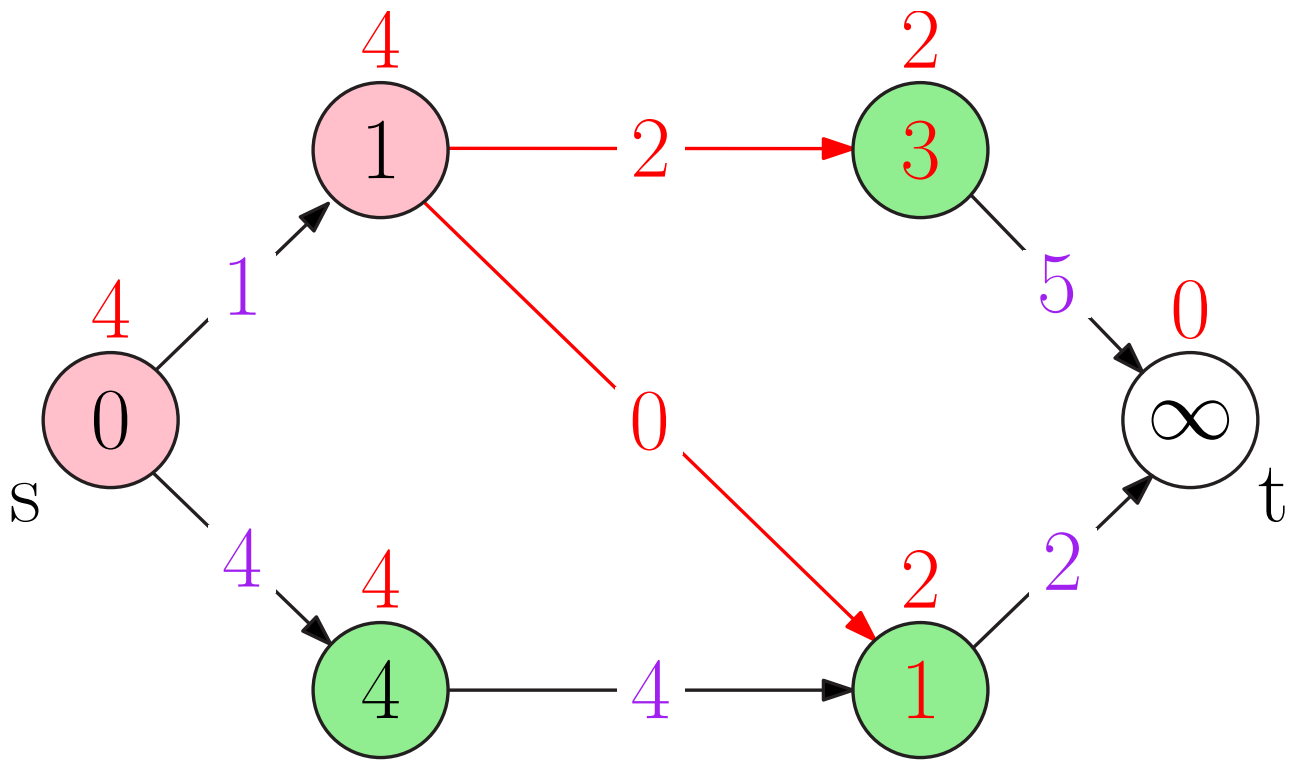


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

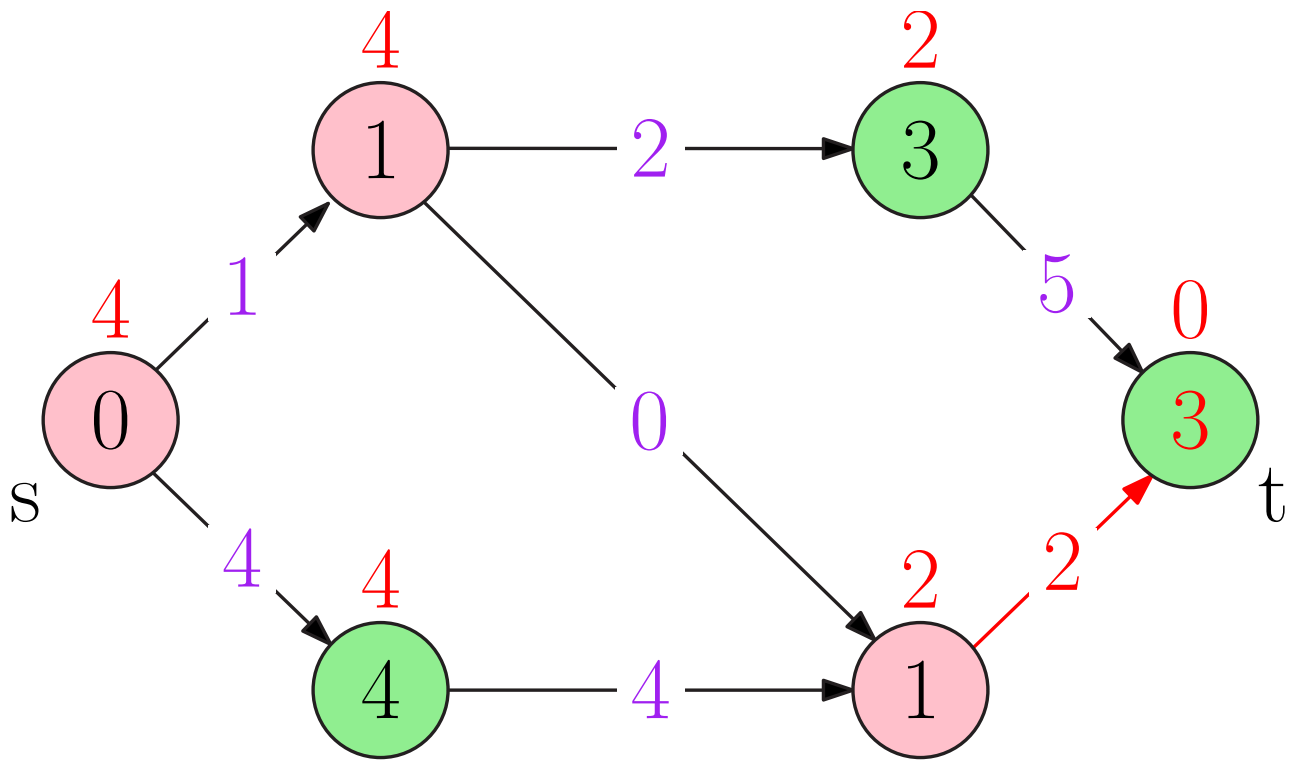


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

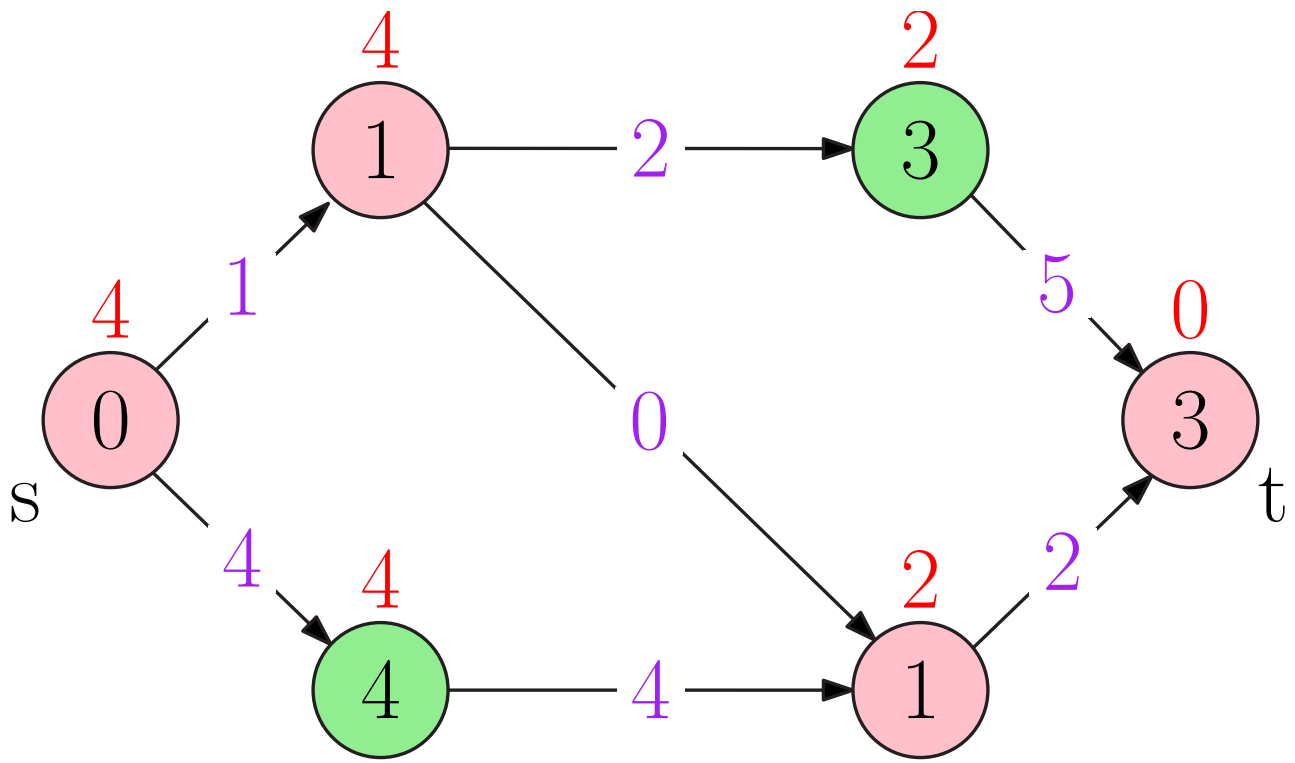


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

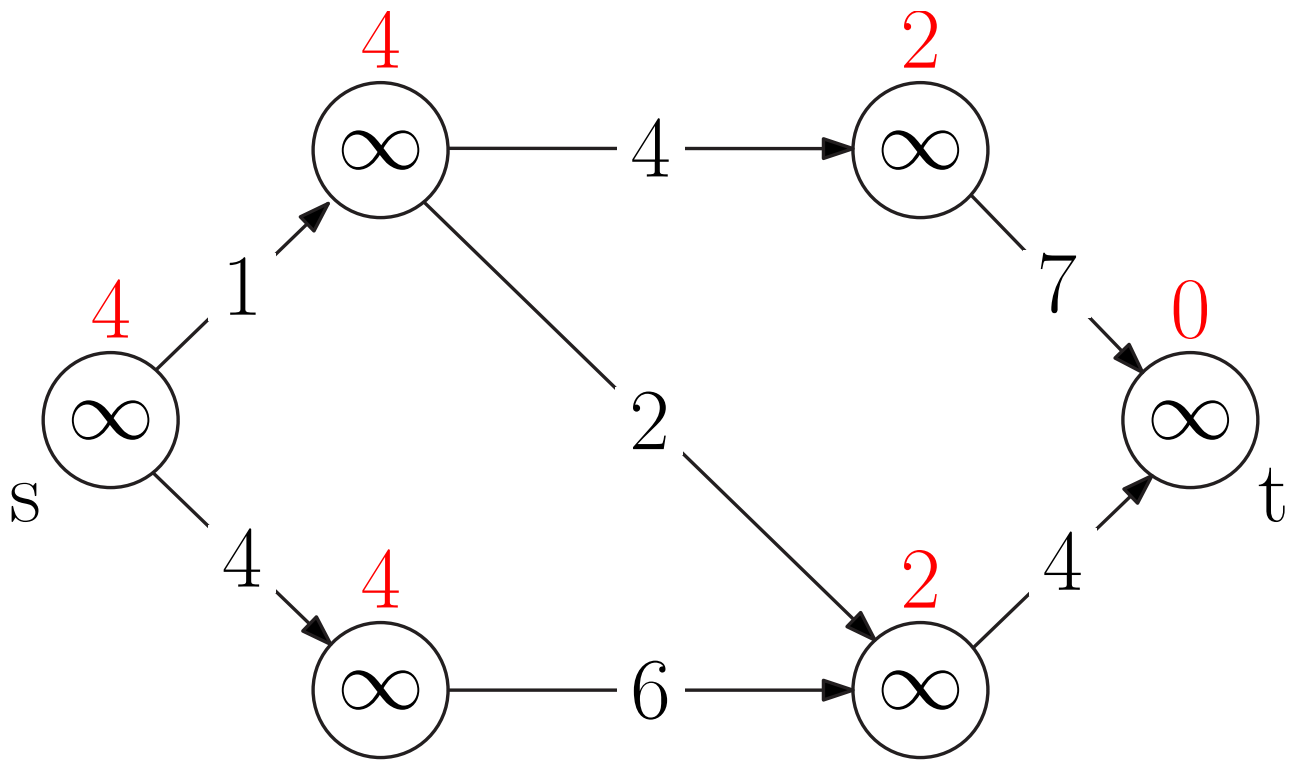


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

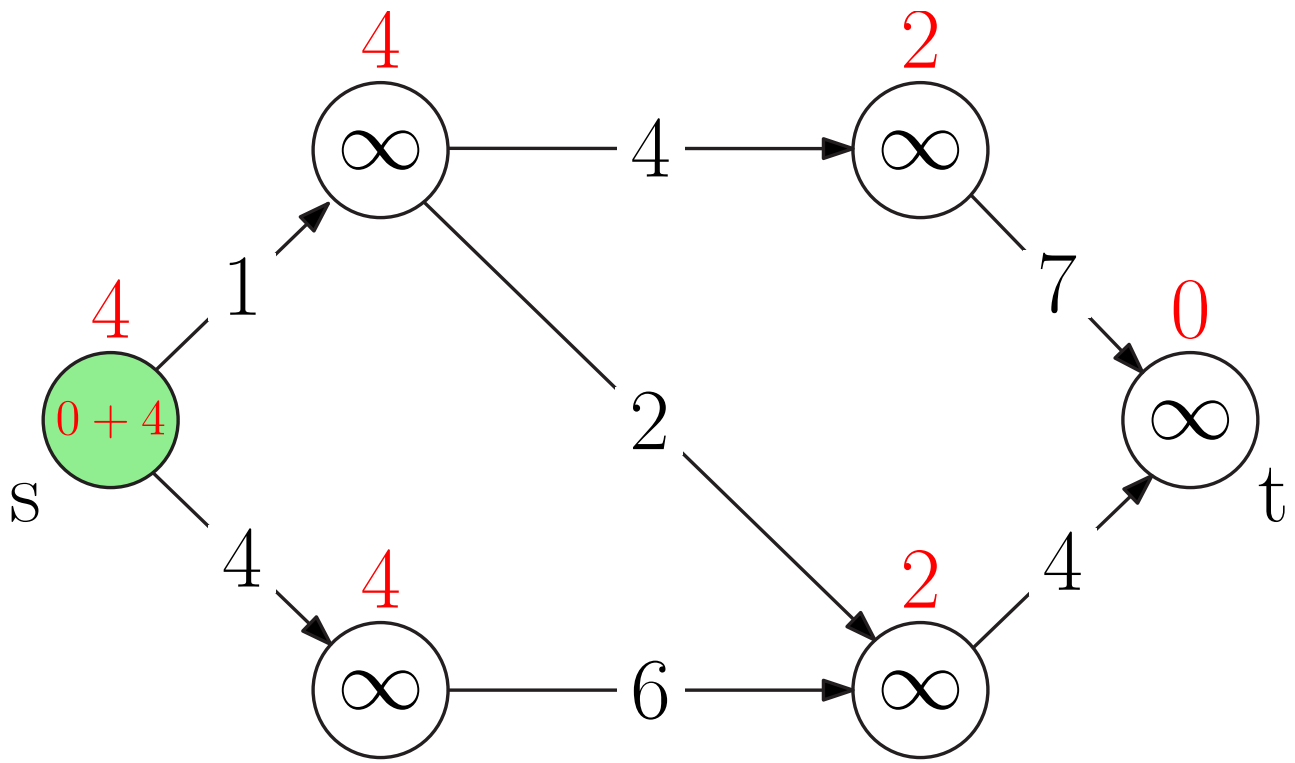


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

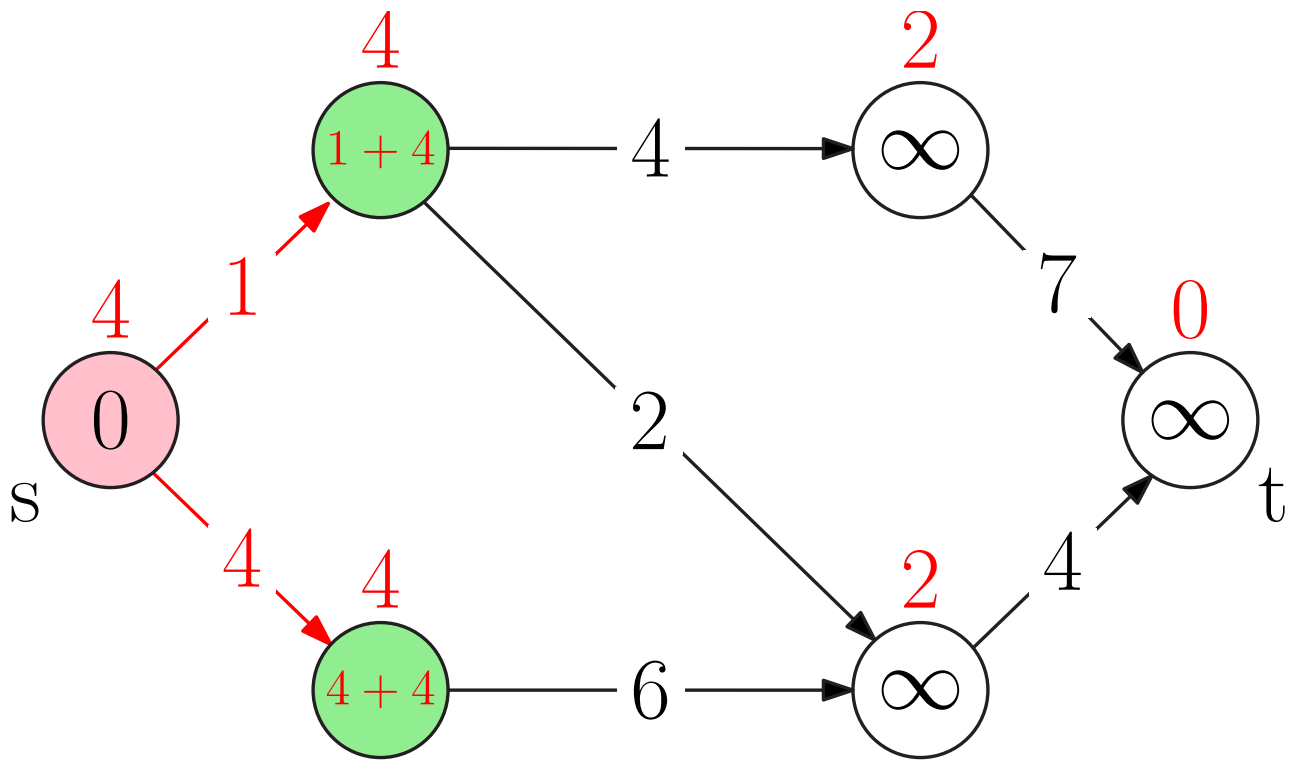


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

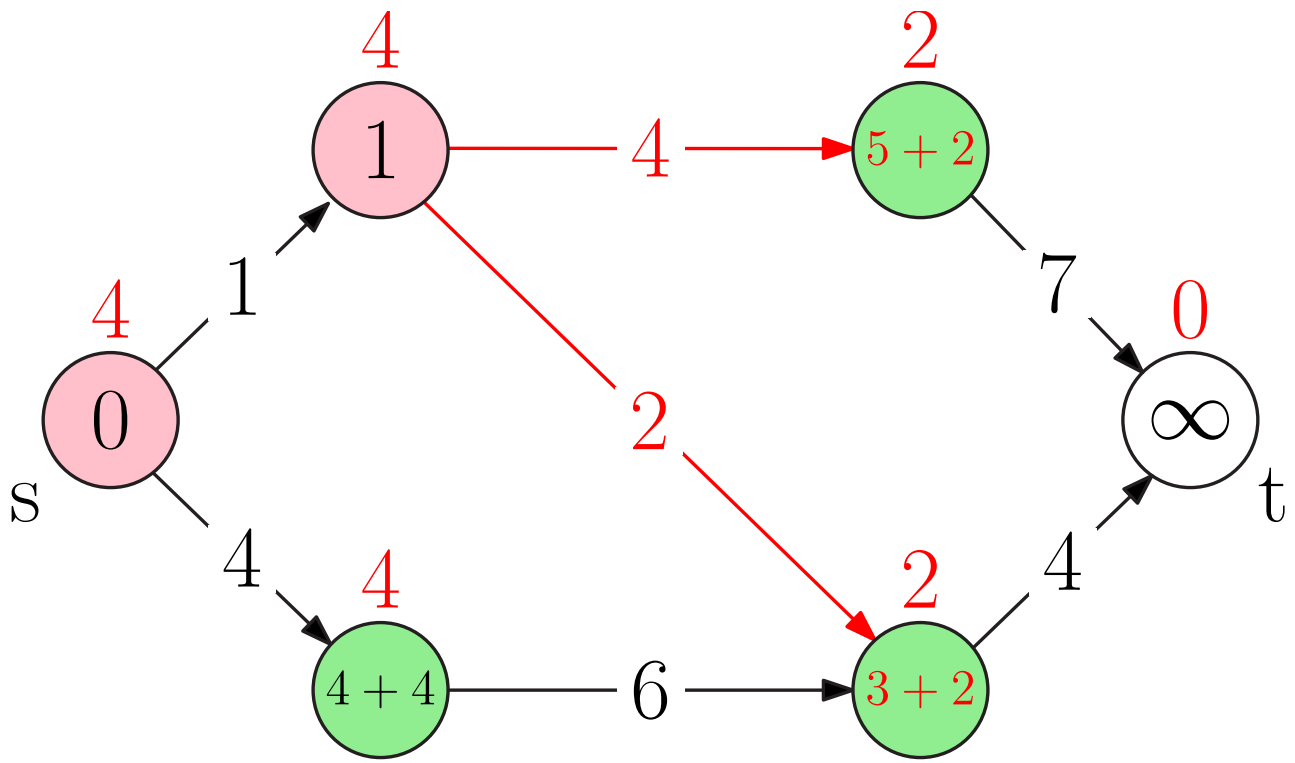


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

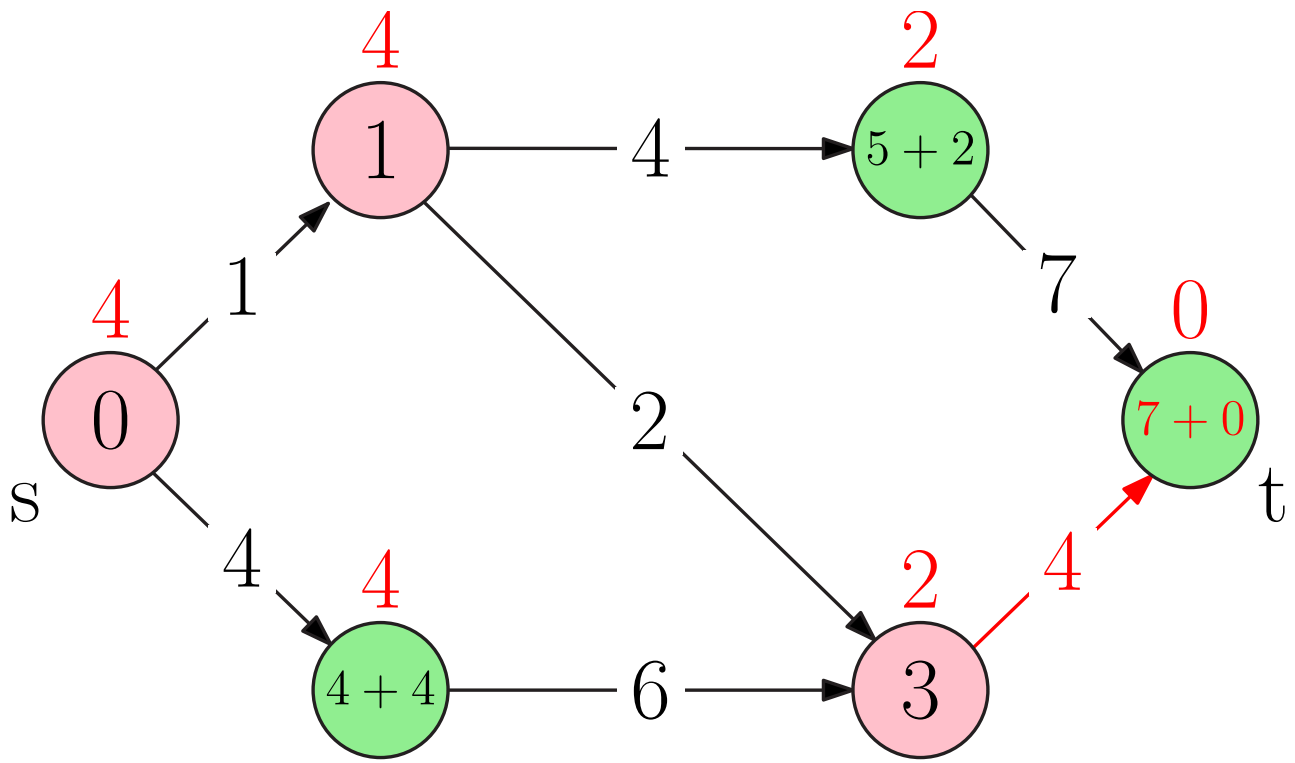


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

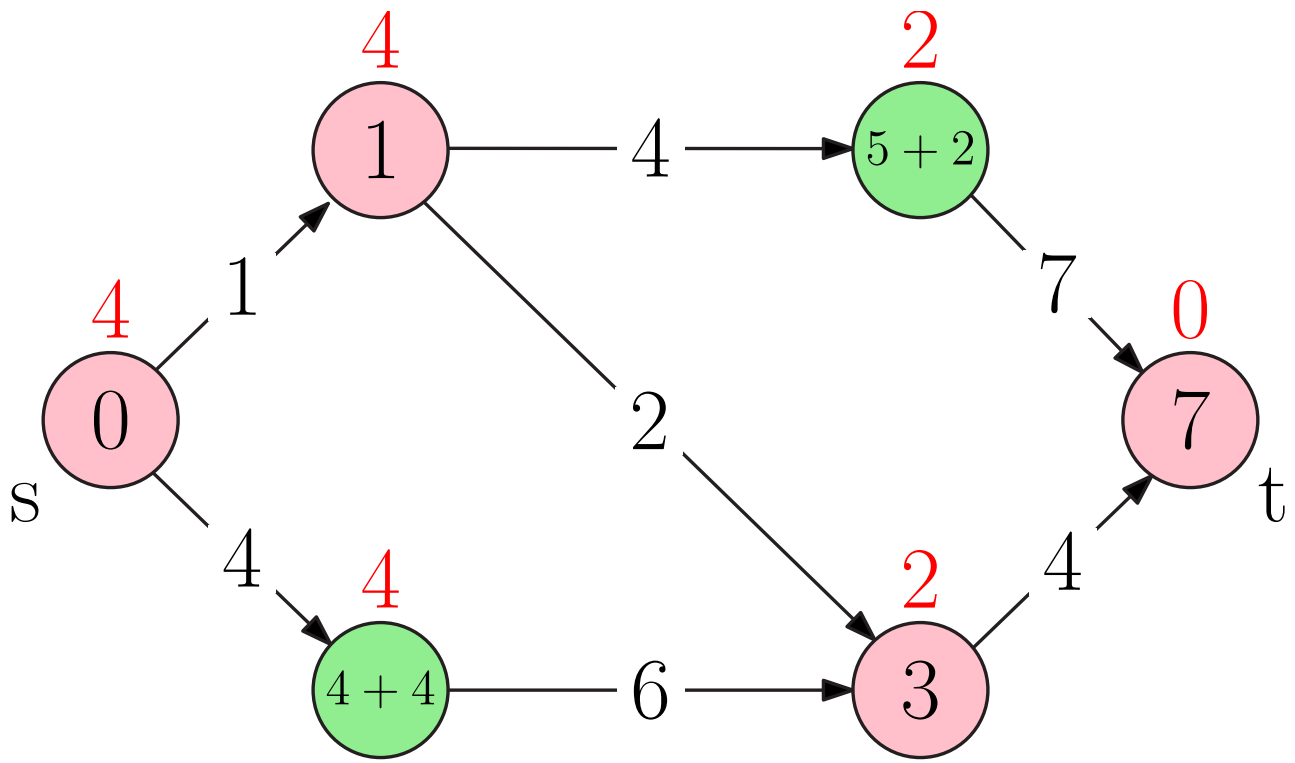


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*



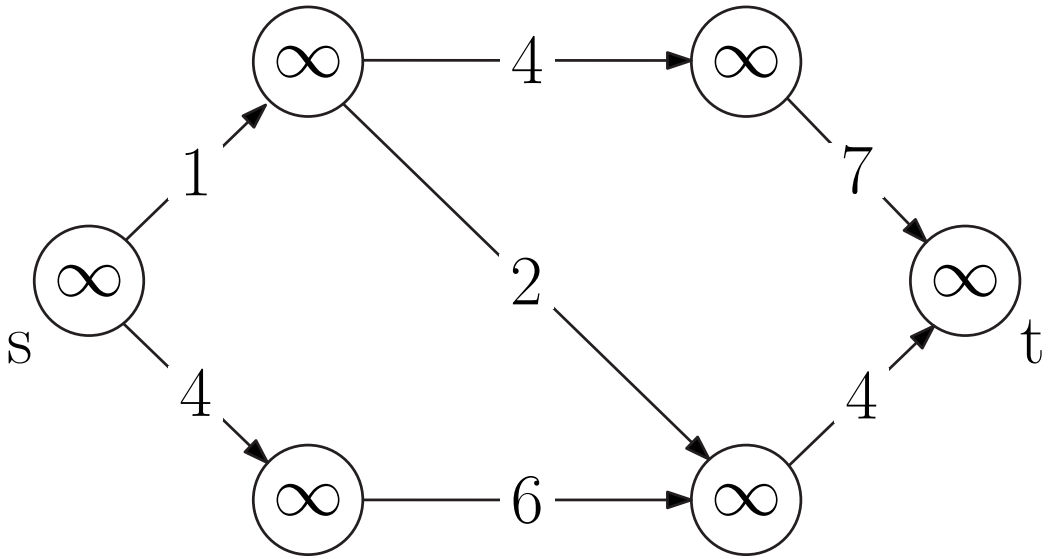
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Erster Ansatz

- $\text{pot}(v) := \mu(v, t)$ sei optimales Potential
  - Algorithmus besucht nur Knoten auf kürzesten Pfaden
  - zu hoher Speicherverbrauch $\rightarrow$ benötigt alle kürzesten Distanzen!

Beispiel



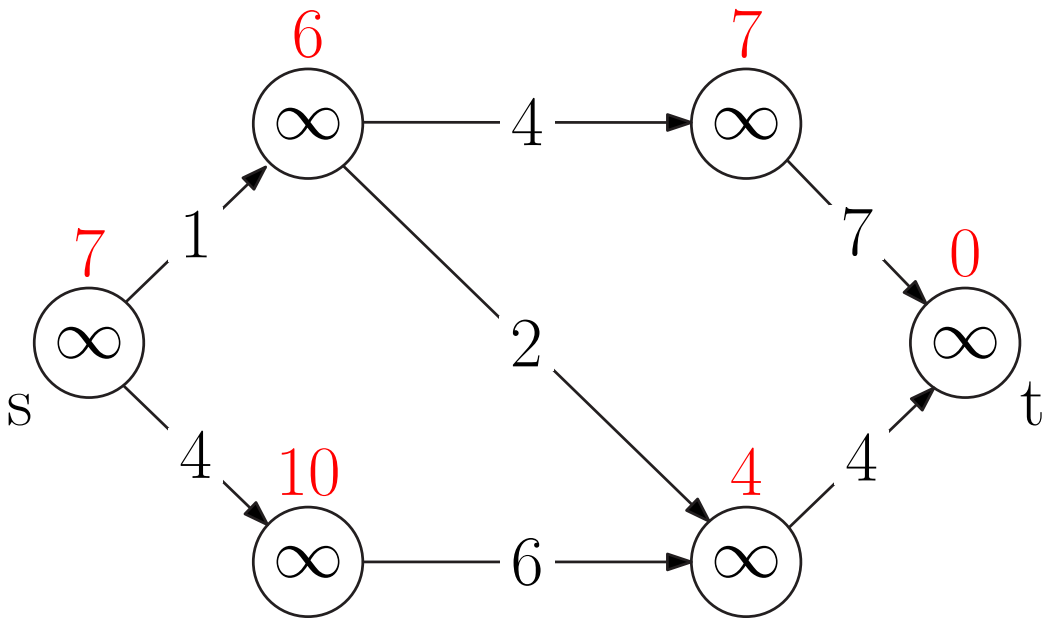
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Erster Ansatz

- $\text{pot}(v) := \mu(v, t)$ sei optimales Potential
  - Algorithmus besucht nur Knoten auf kürzesten Pfaden
  - zu hoher Speicherverbrauch $\rightarrow$ benötigt alle kürzesten Distanzen!

Beispiel



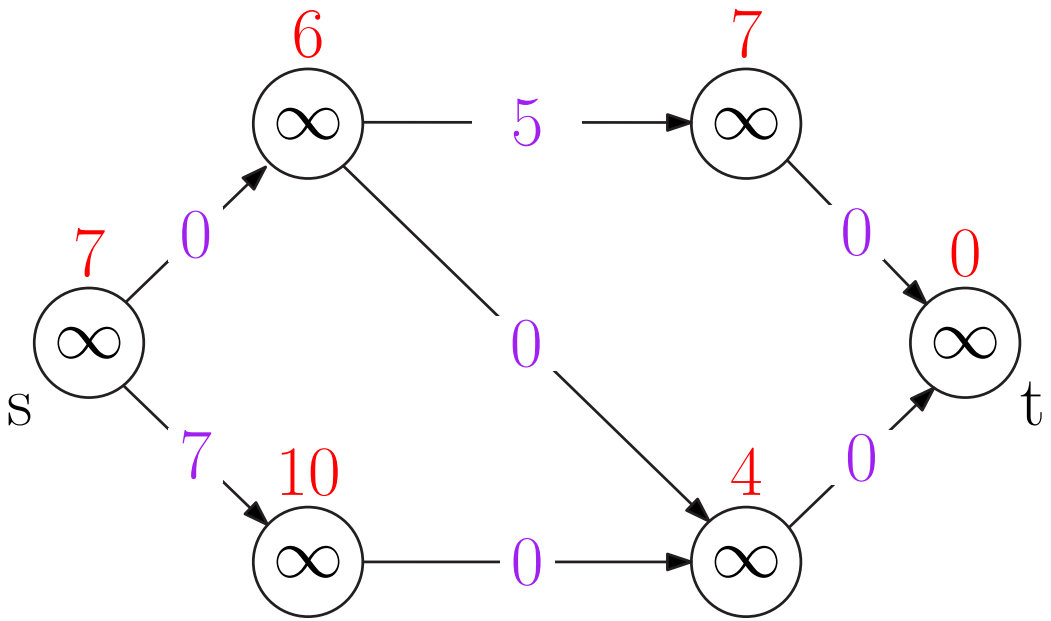
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Erster Ansatz

- $\text{pot}(v) := \mu(v, t)$ sei optimales Potential
  - Algorithmus besucht nur Knoten auf kürzesten Pfaden
  - zu hoher Speicherverbrauch $\rightarrow$ benötigt alle kürzesten Distanzen!

Beispiel



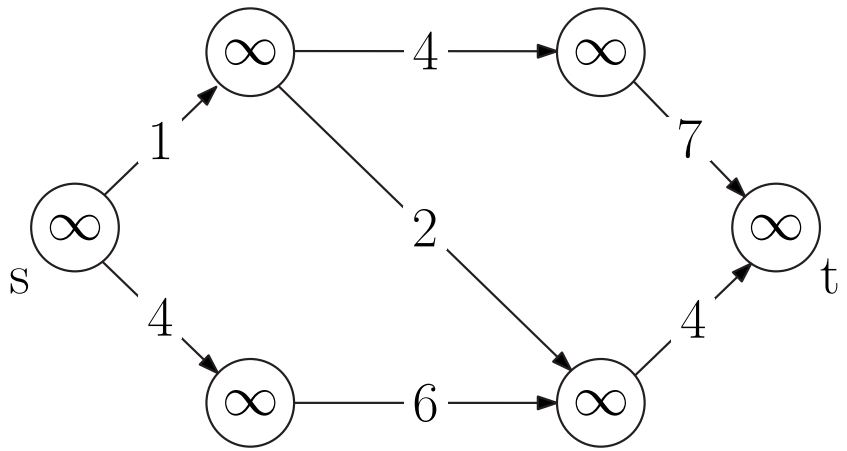
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Kompromiss

- berechne Potential für einige Knoten l (Landmarken)
- bei konkreter Anfrage:
  - wähle Landmarke l hinter dem Ziel t (heuristisch)
  - verwende Potential $\text{pot}(v) := \mu(v, l) - \mu(t, l)$

Beispiel



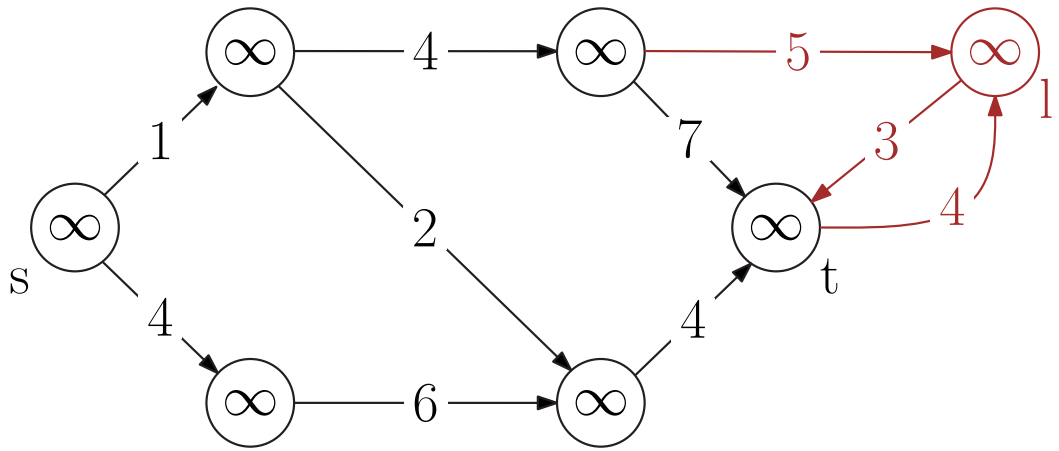
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Kompromiss

- berechne Potential für einige Knoten l (Landmarken)
- bei konkreter Anfrage:
  - wähle Landmarke l hinter dem Ziel t (heuristisch)
  - verwende Potential $\text{pot}(v) := \mu(v, l) - \mu(t, l)$

Beispiel



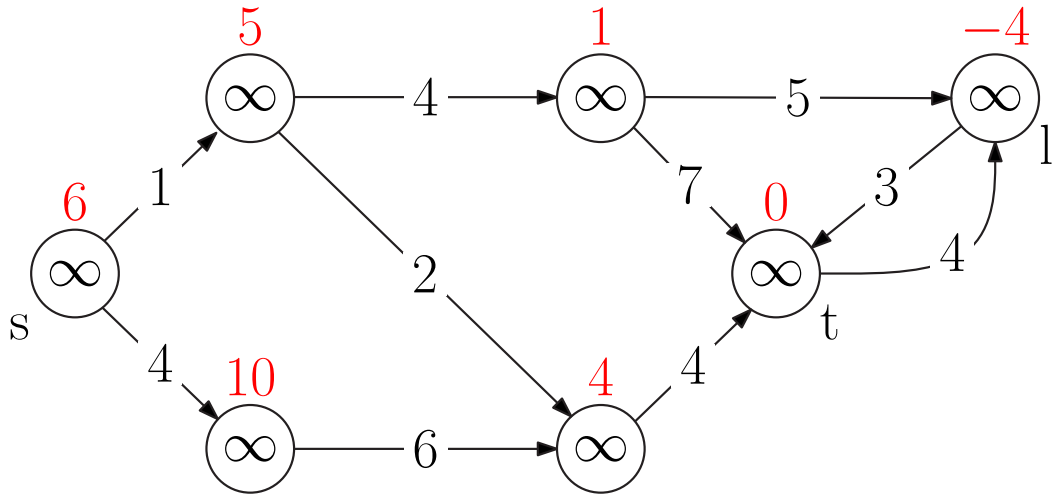
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Kompromiss

- berechne Potential für einige Knoten l (Landmarken)
- bei konkreter Anfrage:
  - wähle Landmarke l hinter dem Ziel t (heuristisch)
  - verwende Potential $\text{pot}(v) := \mu(v, l) - \mu(t, l)$

Beispiel



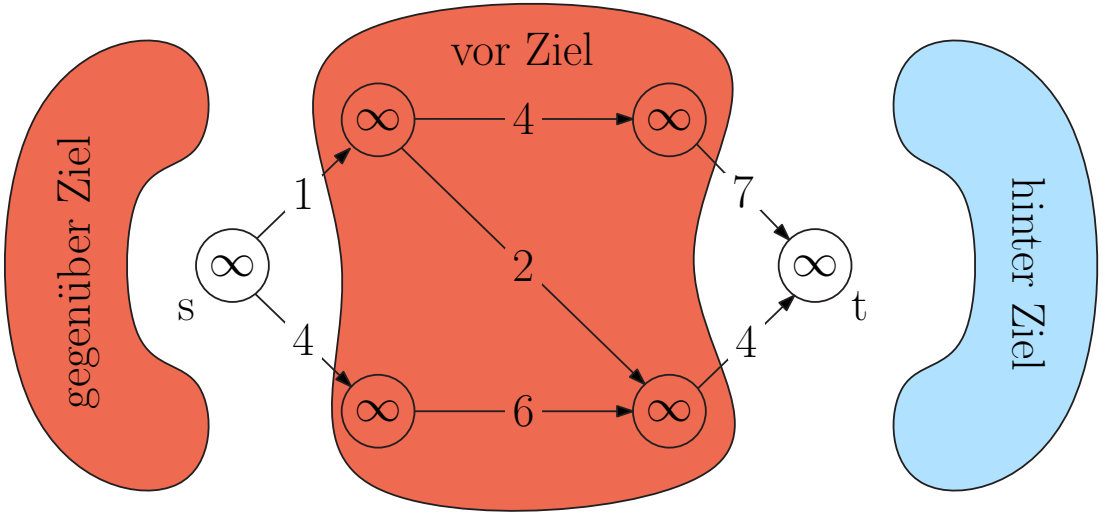
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Was passiert bei schlechter Landmarke (vor/gegenüber Ziel)?
  $\rightarrow$ Korrektheit?
  $\rightarrow$ Laufzeit?

Beispiel



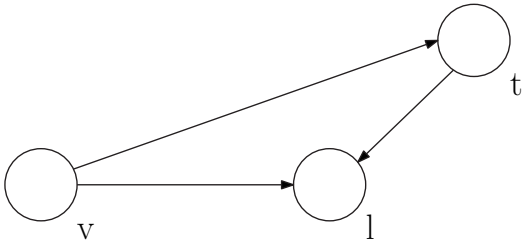
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Korrektheit:
  immer korrekt dank Dreiecksungleichung
  - untere Schranke für Distanz zum Ziel t
    $\text{pot}(v) = \mu(v, l) - \mu(t, l) \leq \mu(v, t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(v, l) \leq \mu(v, t) + \mu(t, l)$
  - nicht-negative reduzierte Kantengewichte

$$\begin{aligned}\overline{c}(u, v) &= c(u, v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u) \\ &= c(u, v) + \mu(v, l) - \mu(t, l) - \mu(u, l) + \mu(t, l) \\ &= c(u, v) + \mu(v, l) - \mu(u, l) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in E\end{aligned}$$

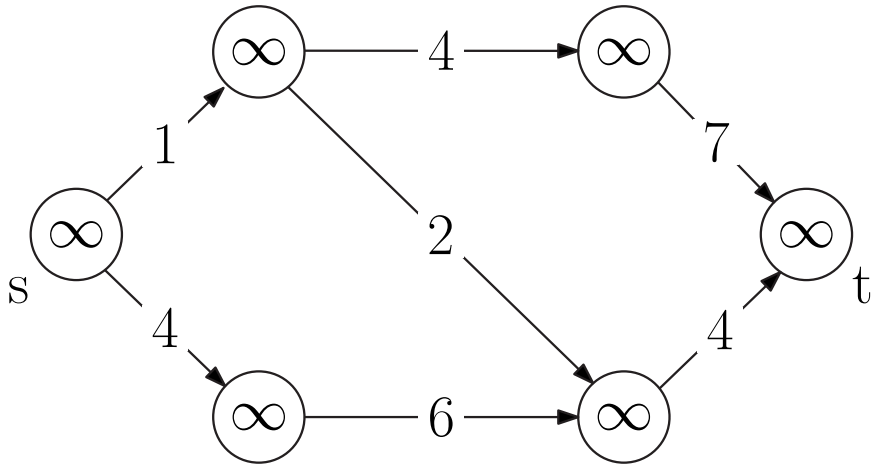


Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Laufzeit:
  Algorithmus sucht in falscher Richtung → langsam!
- Beispiel

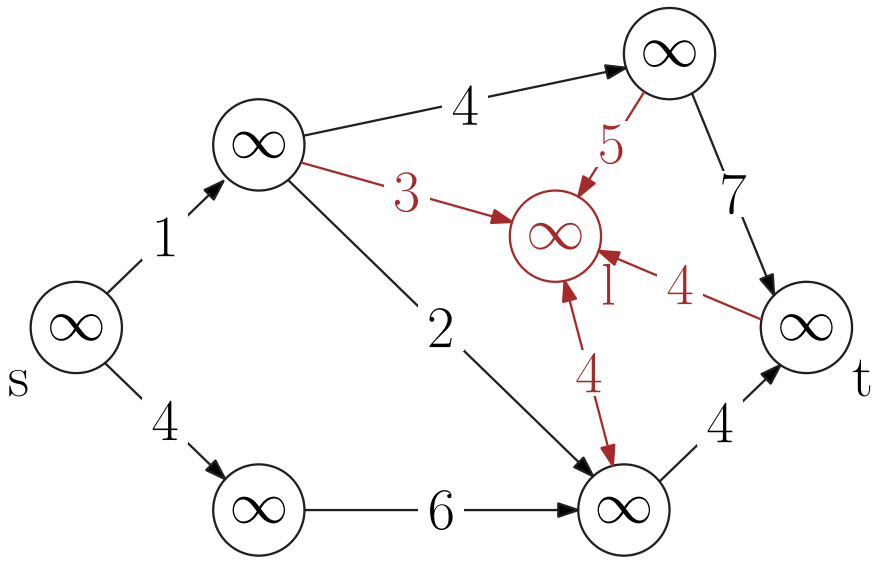


Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Laufzeit:
  Algorithmus sucht in falscher Richtung → langsam!
- Beispiel

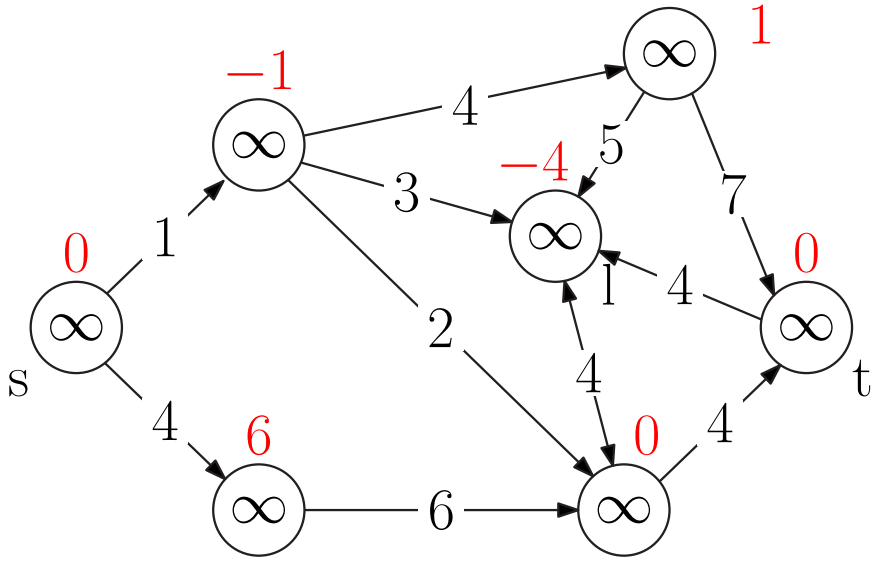


Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Laufzeit:
  Algorithmus sucht in falscher Richtung → langsam!
- Beispiel



Legende

Karlsruher Institut für Technologie

4 — Kante mit Gewicht 4

4 — Kante mit Gewicht 4, wird gerade in Vorwärtsrichtung betrachtet

4 — Kante mit Gewicht 4, wird gerade in Rückwärtsrichtung betrachtet

1 — Kante mit reduziertem Gewicht 1

4 — neu eingefügte Kante mit Gewicht 4

Zeiger auf Vorgänger (in Vorwärtsrichtung)

Zeiger auf Vorgänger (in Rückwärtsrichtung)

2, v, ∞ — Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = \infty$ und Potential $pot[v] = 2$

∞ — neu eingefügter Knoten

2 — erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 2$ (in *Priority Queue*)

1 — erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 1$ (in *Priority Queue*) (obere Schranke gerade verkleinert)

1 — gescannter Knoten v mit exakter Distanz vom Start $d[v] = 1$ (aus *Priority Queue* entfernt)

1, 3 — Knoten in Vorwärtsrichtung gescannt mit exakter Distanz vom Start $d_{fwd}[v] = 1$, in Rückwärtsrichtung erreicht mit oberer Schranke für Distanz zum Ziel $d_{bwd}[v] = 3$

1, 2 — Knoten in Vorwärtsrichtung gescannt mit $d_{fwd}[v] = 1$, in Rückwärtsrichtung erreicht mit $d_{bwd}[v] = 2$ (obere Schranke in Rückwärtsrichtung gerade verkleinert)

1, 2 — aktueller Treffpunkt von Vorwärts- und Rückwärtssuche mit minimalem $d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v] = 3$

2, $3 + 2$ — erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 2$ (in *Priority Queue*) (Schlüssel in *Priority Queue* ist $d[v] + \mathrm{pot[v]} = 3 + 2$)

Ende!

Feierabend!