Karlsruher Institut für Technologie

Übung 6 – Algorithmen II

Michael Axtmann – *michael.axtmann@kit.edu*

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS16.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

Themenübersicht

Karlsruher Institut für Technologie

Randomisierte Algorithmen

- Grundlagen
- Verifikation von Matrix-Matrix Multiplikation

Speichermodell

- Parallel Disk Model
- Speicherlatenzen
- Blockgrößen

Ergänzendes Material: I/O-effizientes Design

- Basistechniken
- *externe* Prioritätslisten
- *externe* Sortieren

Randomizierte Algorithmen

Randomisierte Algorithmen

Übersicht

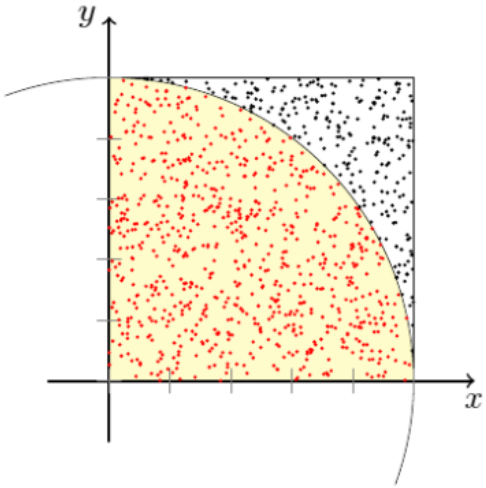
- *Las Vegas Algorithmus*
  - immer korrekte/optimale Lösung
  - Laufzeit ist Zufallsvariable
    $\rightarrow$ erwartete Laufzeit $\mathbb{E}[T]$
  - *Bsp.:* Quicksort

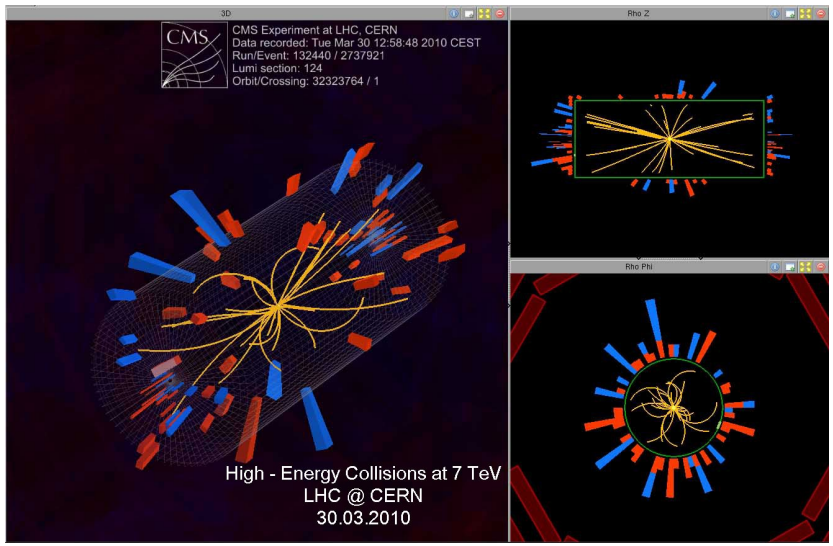
- *Monte Carlo Algorithmus*
  - falsche/suboptimale Lösung möglich
    $\rightarrow$ mit Wahrscheinlichkeit p
  - deterministische Laufzeit
  - *Bsp.:* Miller-Rabin Primzahltest,
    nicht vorbereiteter Student beim *multiple-choice* Test

Randomisierte Algorithmen

Monte Carlo Simulation

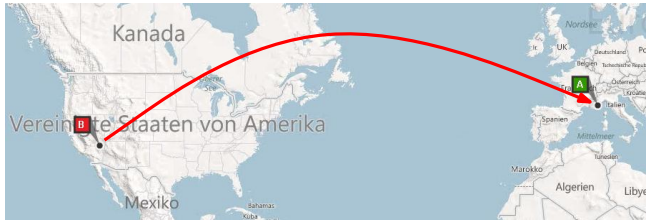
- *Monte Carlo Simulation*
  - nicht zu verwechseln mit *Monte Carlo Algorithmus*!
  - Zufallsexperimente sehr oft ausführen (Gesetz der großen Zahlen)
  - je länger / öfter ausgeführt, desto bessere Ergebnisse
    - Alternative zur analytischen Lösung
    - Verteilungsfunktion unbekannter Zufallsvariablen
    - Nachbildung komplexer Prozesse





Randomisierte Algorithmen

Las Vegas $\rightarrow$ Monte Carlo



geg: Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T] = f(n)$
ges: Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(f(n))$, Fehlerrate p

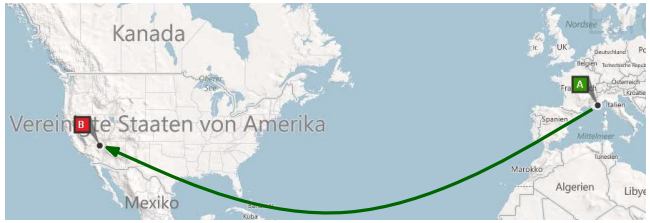
Idee: Abbruch nach Zeit $\alpha f(n)$

- Ausgabe FALSCH, wenn Algorithmus abgebrochen wurde
- $\mathbb{P}[T > \alpha f(n)] \leq 1/\alpha$ (Markov Ungleichung)

$\rightarrow$ Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\alpha f(n)$ und Fehlerrate $p = 1/\alpha$

Randomisierte Algorithmen

Monte Carlo → Las Vegas



geg: Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(f(n))$, Fehlerrate p, Korrektheit in $\mathcal{O}(g(n))$ prüfbar

ges: Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T]$

Idee: Wiederhole MC bis korrekte Ergebnis gefunden

- Laufzeit $T \leq i \cdot \mathcal{O}(f(n) + g(n))$ (i Schritte benötigt)
- $\mathbb{E}[T] \leq \mathbb{E}[i] \cdot \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
  - $\mathbb{E}[i] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} \cdot (1-p) = \frac{1}{1-p}$
    (nach $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x/(1-x)^2,\ x < 1$)

→ Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T] \leq \frac{\mathcal{O}(f(n)+g(n))}{1-p}$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

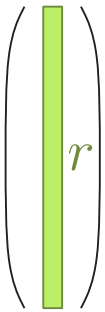
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

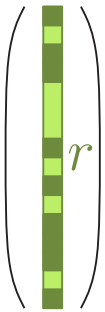
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
  - $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
  - $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

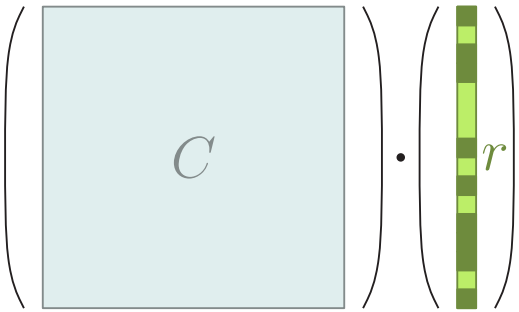
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
  - $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
  - $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

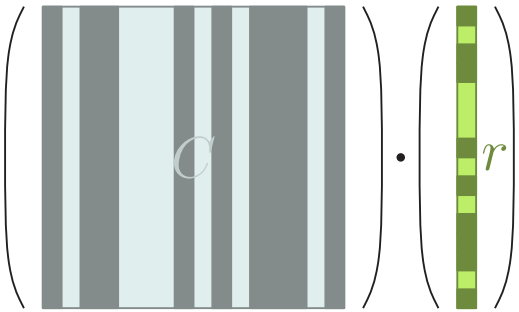
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
  - $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
  - $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$

Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ (A_i: i'te Zeile von A)
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \alpha + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\alpha - \beta}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

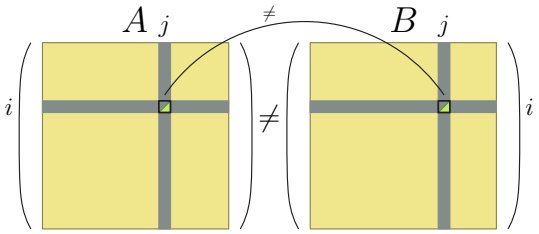
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$



Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ (A_i: i'te Zeile von A)
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \alpha + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\alpha - \beta}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

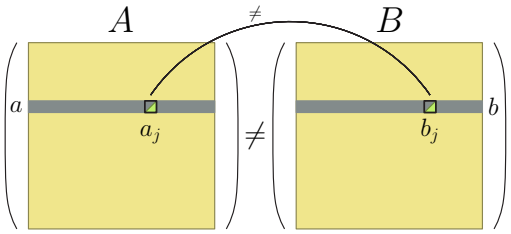
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$



Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ (A_i: i'te Zeile von A)
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \alpha + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\alpha - \beta}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

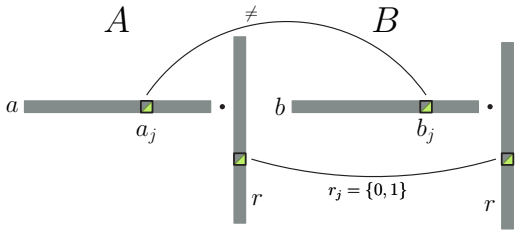
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$



Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ (A_i: i'te Zeile von A)
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \alpha + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\alpha - \beta}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

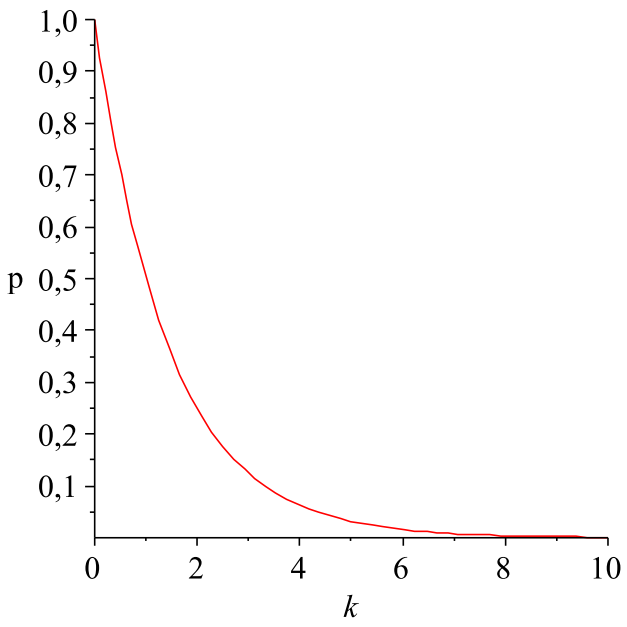
Beschleunigung durch *probability boosting*

(nur bei $p \leq 0.5$ schnelle Konvergenz)

- Wiederhole Test k mal mit unterschiedlicher Wahl von r
  - Ein Test liefert FALSCH
    $\rightarrow AB \neq C$, fertig
  - Alle Tests liefern KORREKT
    $\rightarrow$ *false positive* mit Wahrscheinlichkeit
    $\mathbb{P}[ABr = Cr] \leq 0.5^k$

$\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(kn^2)$

(linear längere Laufzeit bei exponentiell weniger Fehler)



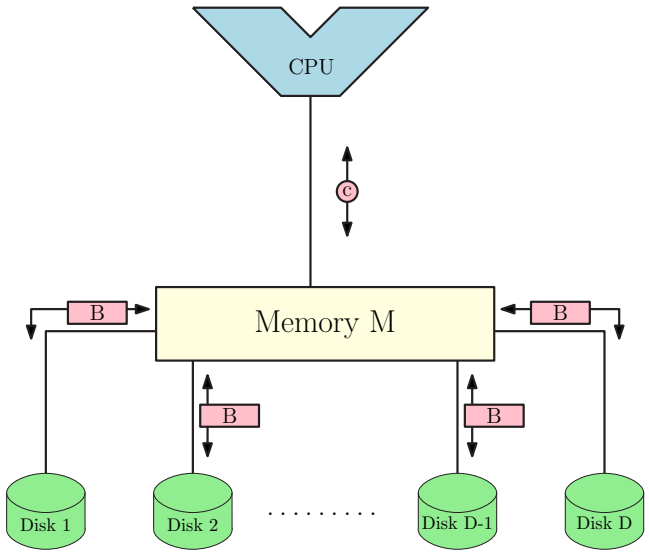
Speichermodell

Speichermodell

- Vitter und Shriver:
  - Parallel Disk Model (PDM)

- Speicherzugriffe in Blöcken
- Blockzugriffe minimieren $\rightarrow$ Datenlokalität

- Muster wiederholt sich in Speicherhierarchie immer wieder

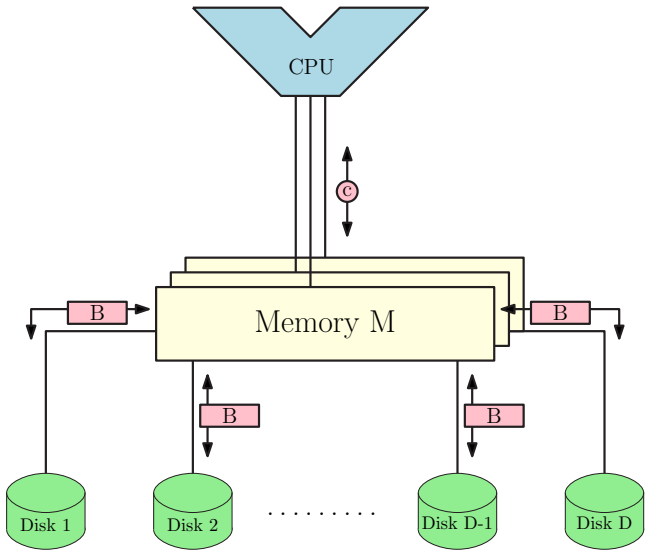


Speichermodell

- Vitter und Shriver:
  - Parallel Disk Model (PDM)

- Speicherzugriffe in Blöcken
- Blockzugriffe minimieren $\rightarrow$ Datenlokalität

- Muster wiederholt sich in Speicherhierarchie immer wieder

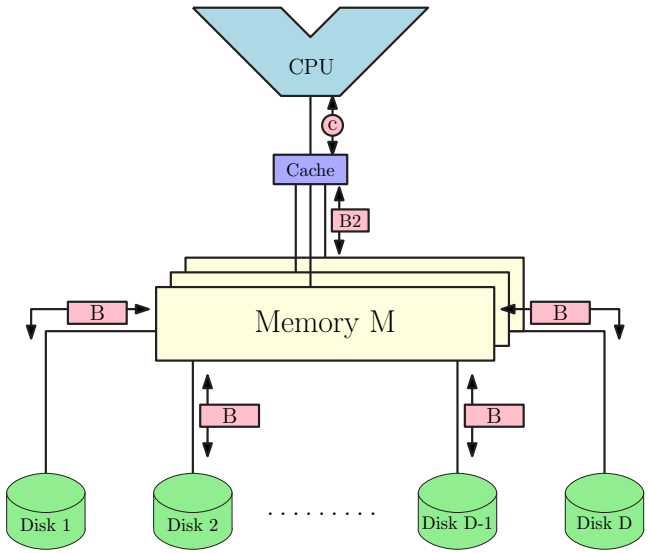


Speichermodell

- Vitter und Shriver:
  - Parallel Disk Model (PDM)

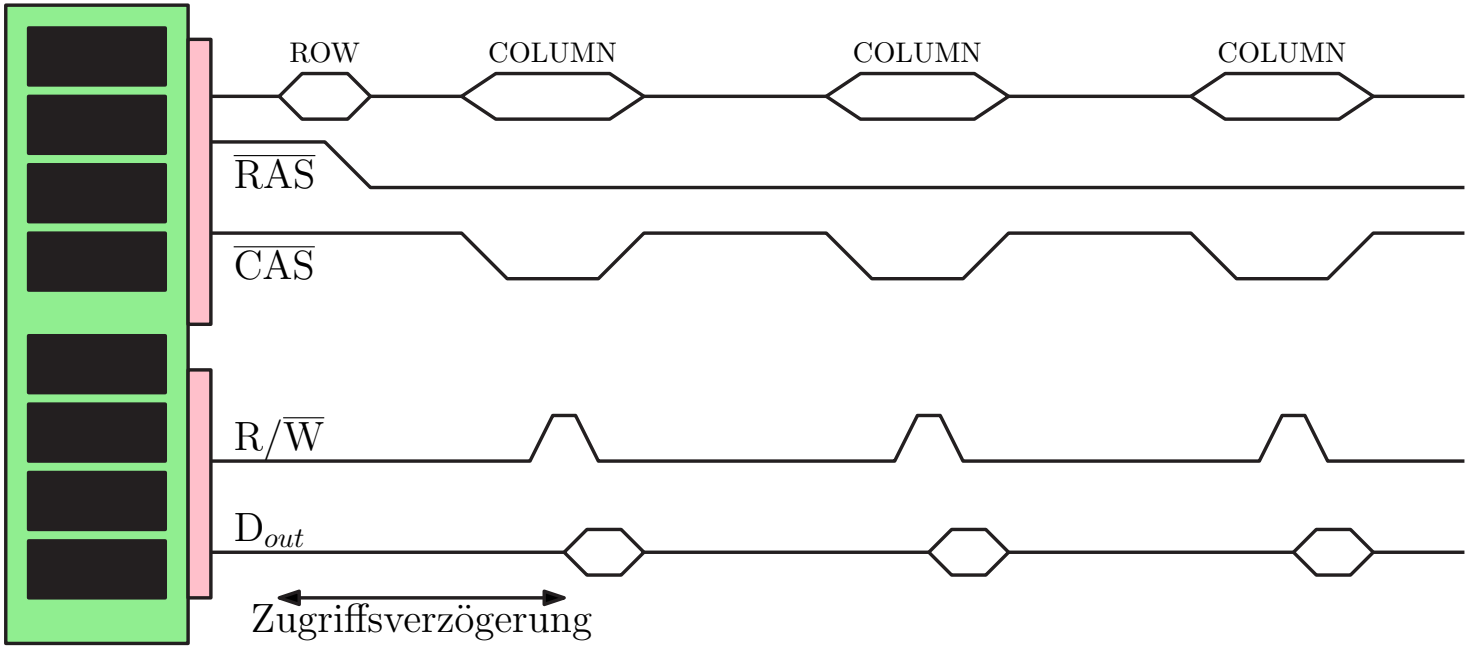
- Speicherzugriffe in Blöcken
- Blockzugriffe minimieren $\rightarrow$ Datenlokalität

- Muster wiederholt sich in Speicherhierarchie immer wieder



Speichermodell

Latenzen

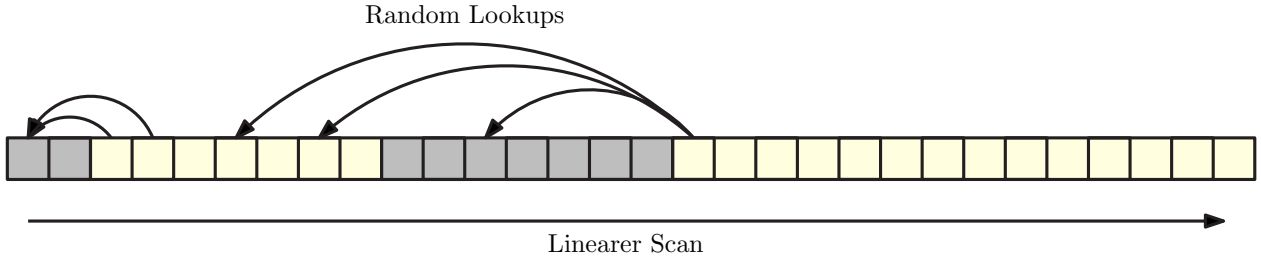


I/O-effizientes Design

- nicht nur relevant bei Disk-I/O
- Beispiel: kürzeste Wege-Bäume auf großen Straßennetzen
  (z.B. Europa)
  - Dijkstra (annähernd linear): $\approx 3 - 5$ Sek.
  - Breitensuche (untere Schranke?): ≈ 2 Sek.

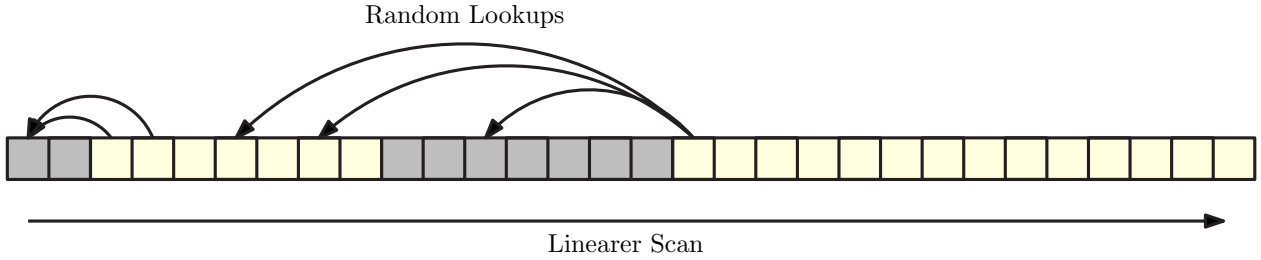
I/O-effizientes Design

- nicht nur relevant bei Disk-I/O
- Beispiel: kürzeste Wege-Bäume auf großen Straßennetzen
  (z.B. Europa)
  - Dijkstra (annähernd linear): $\approx 3 - 5$ Sek.
  - Breitensuche (untere Schranke?): ≈ 2 Sek.
  - PHAST (linearer Scan): < 0.2 Sek.



I/O-effizientes Design

- nicht nur relevant bei Disk-I/O
- Beispiel: kürzeste Wege-Bäume auf großen Straßennetzen (z.B. Europa)
  - Dijkstra (annähernd linear): $\approx 3 - 5$ Sek.
  - Breitensuche (untere Schranke?): ≈ 2 Sek.
  - PHAST (linearer Scan): < 0.2 Sek.



- Strukturierter Zugriff als wichtiges Designprinzip

Blockgrößen

Karlsruher Institut für Technologie

Einflussfaktoren

- T_{seek}: Positionierungszeit
- W_{max}: maximale Bandbreite

$\rightarrow$ Lesedauer: $T = T_{seek} + B / W_{max}$

Optimale Blockgröße

- Beispiel: RAM
  - $T_{seek} = 30$ ns (Zykluszeit)
  - $W_{max} \approx 25$ GB/s
  - Anzahl Blöcke pro Zeile: $R = 128$
  - Ziel: 95% Auslastung der Bandbreite bei sequenziellem Lesen

    $\rightarrow W = \frac{B}{T} = B / \left(\frac{1}{128} T_{seek} + B / W_{max} \right) \stackrel{!}{=} 0.95 \cdot W_{max}$

    $\rightarrow B = 0.15 \cdot W_{max} \cdot T_{seek} = 111$ Byte!

Ende!

Feierabend!

Ergänzendes Material

I/O-effizientes Design

I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

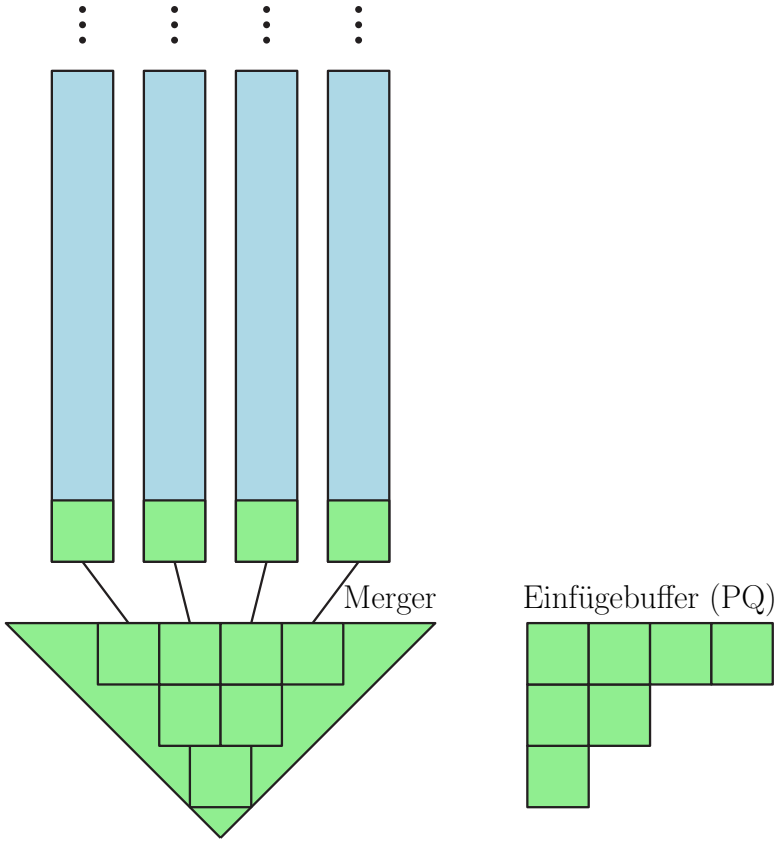
I/O-effizientes Design

Grundlegende Techniken

- Zugriffsmuster
  - Random Access erwartet $\mathcal{O}(n)$ I/Os
  - Linearer Scan $\mathcal{O}(n/B)$ I/Os
- Sortieren
  - $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B}\left(1+\lceil\log_{M/B}\frac{n}{M}\rceil\right)\right)$ I/Os
  - lokale Kriterien
  - oft vorbereitend für linearen Scan
- Prioritätswarteschlangen
  - $\approx \mathrm{sort}(n)$ I/Os
  - nutzbar als Warteliste: „Speicherzugriff auf später verschieben“
- Stack / Queue

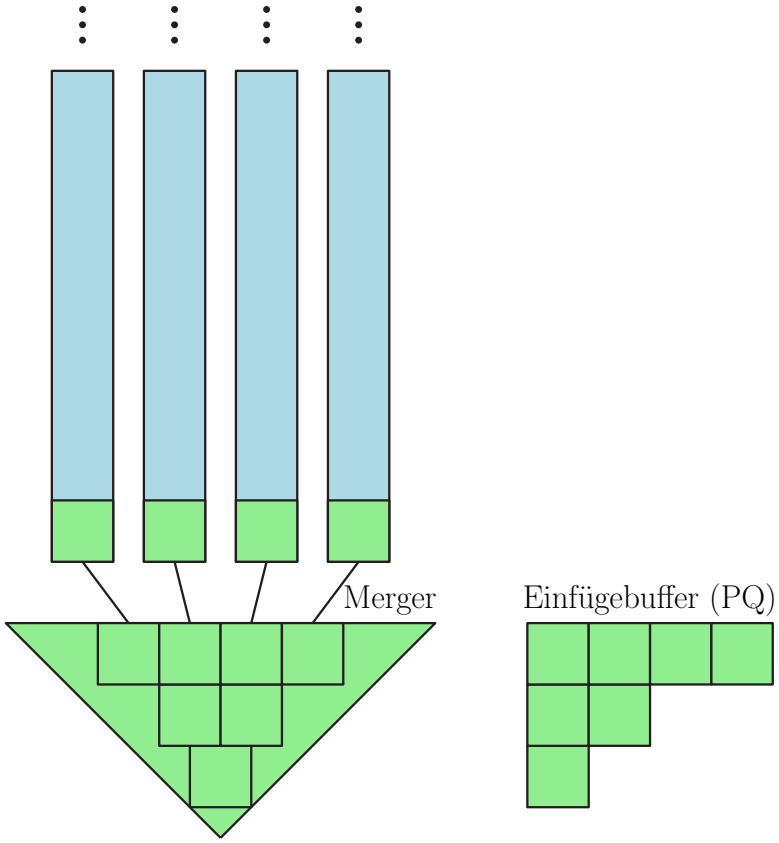
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



Externe Priority Queue

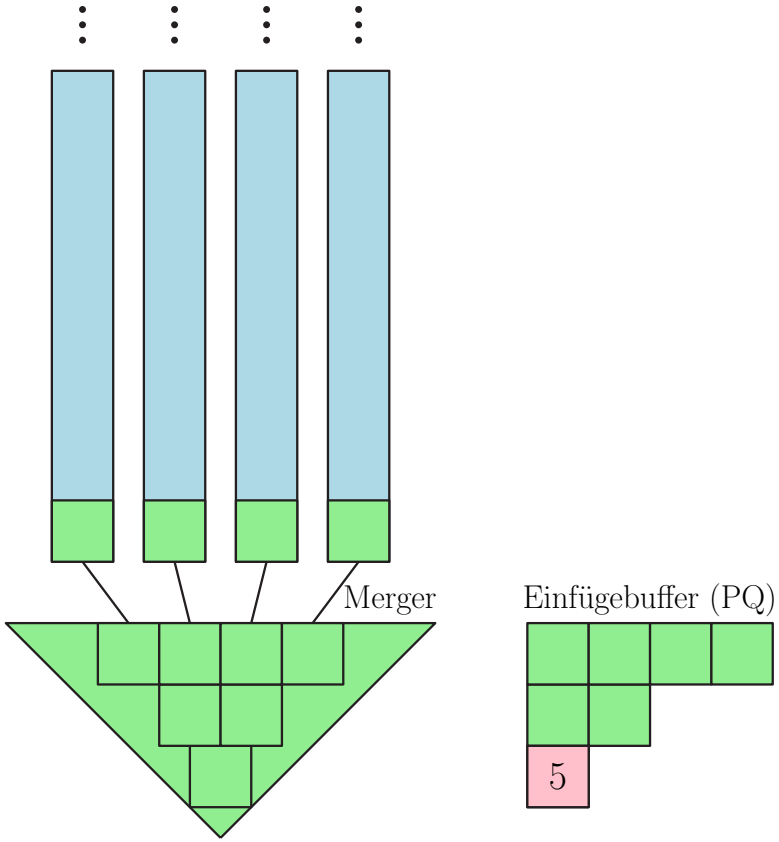
- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



5

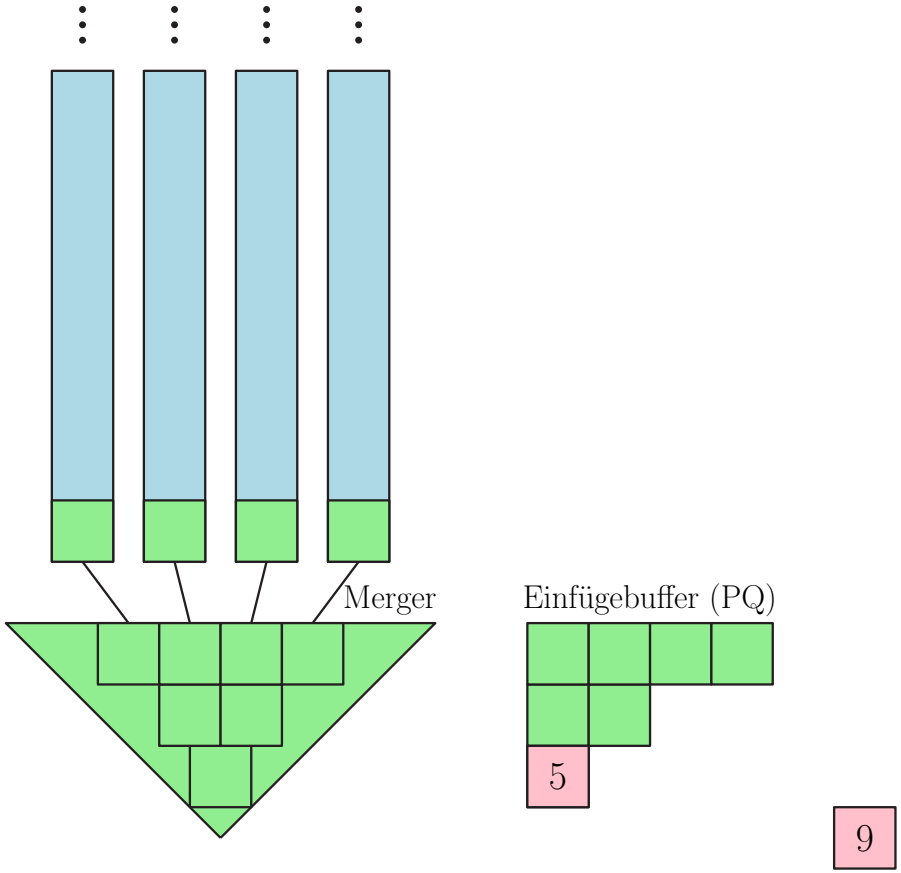
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



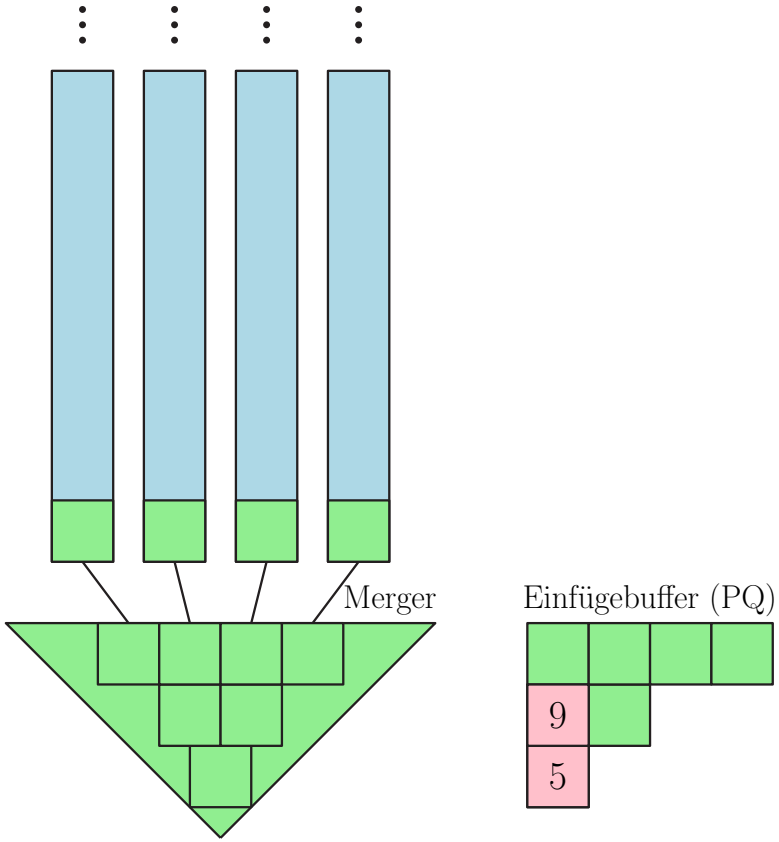
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



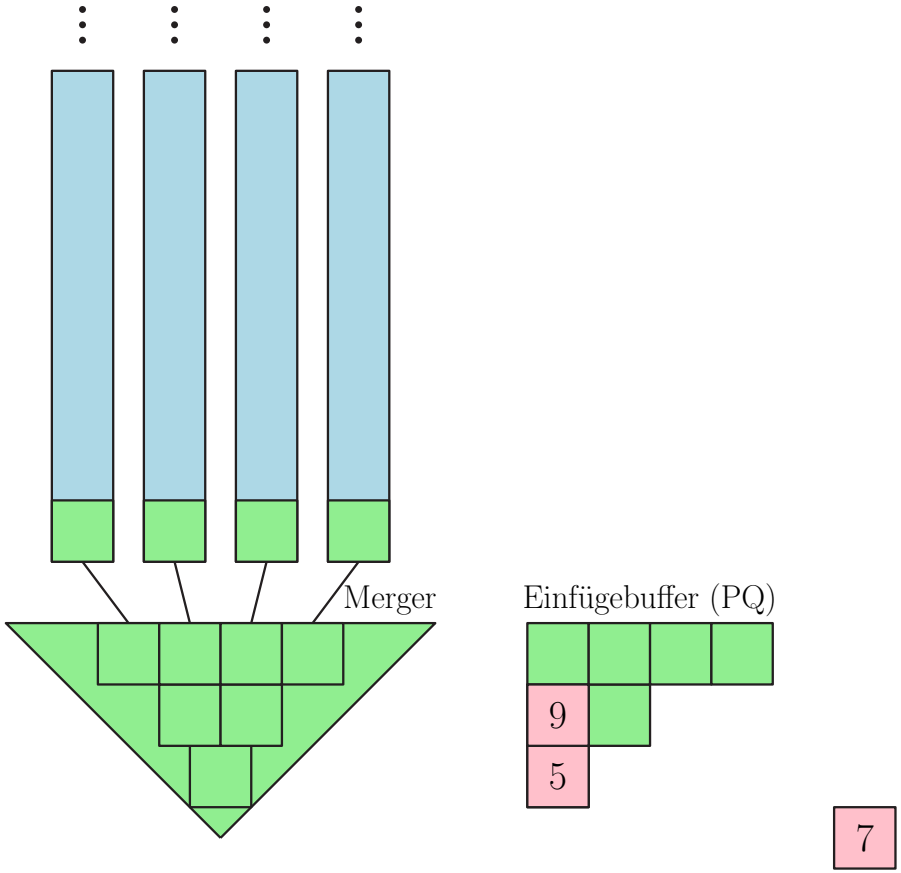
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



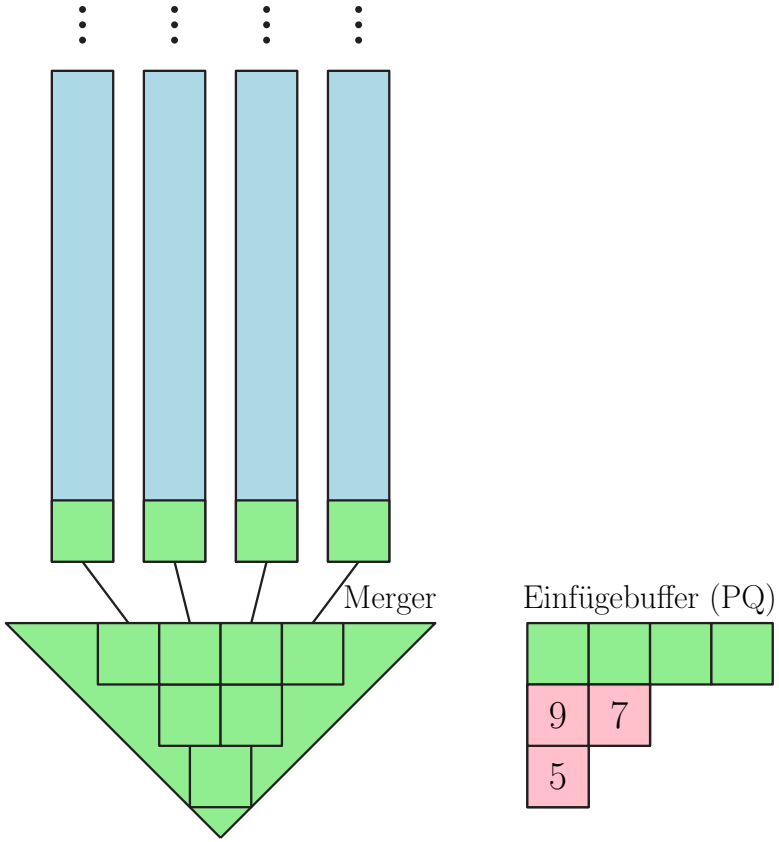
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



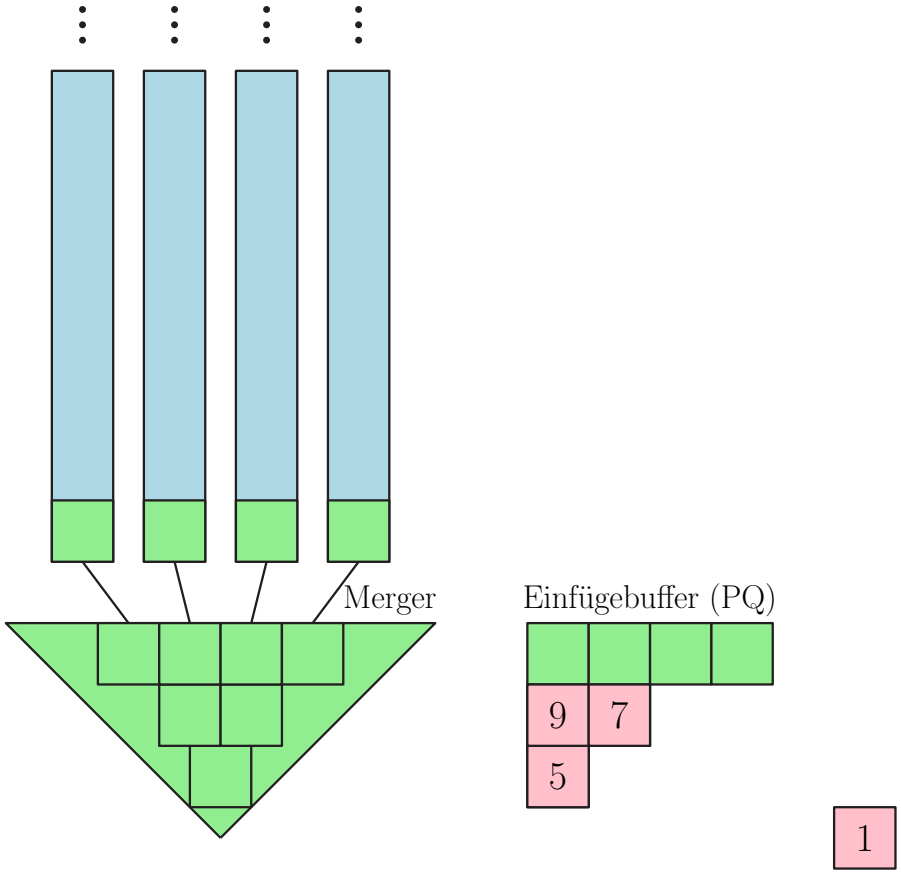
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



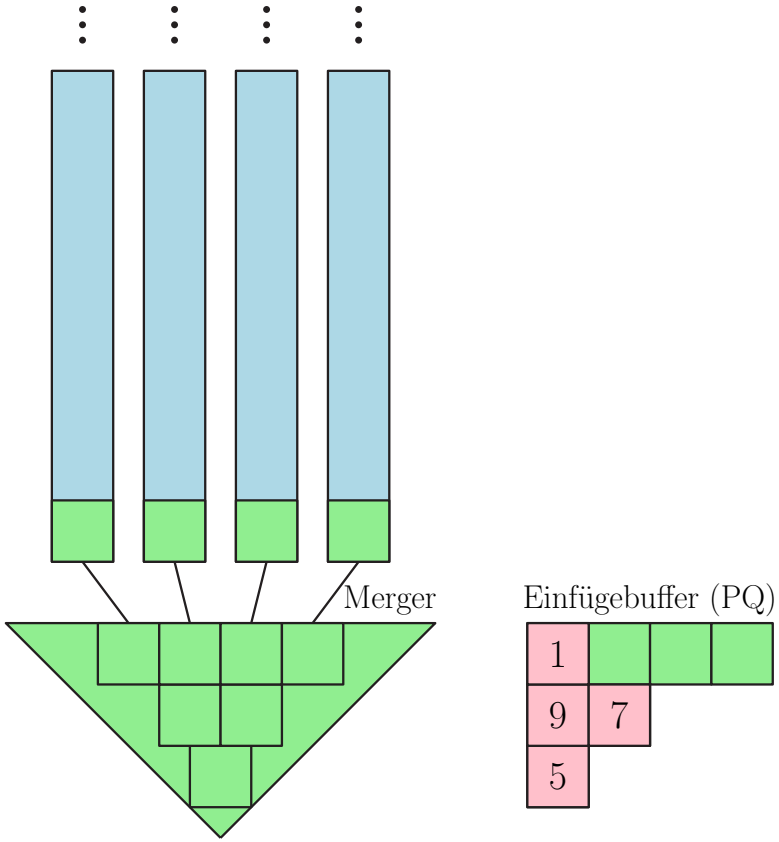
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



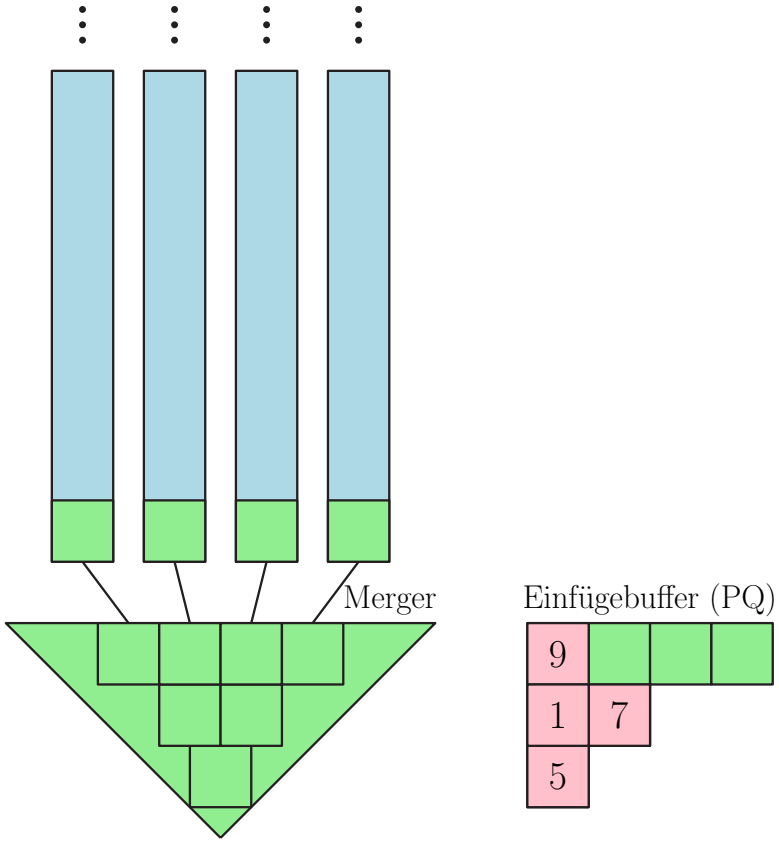
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



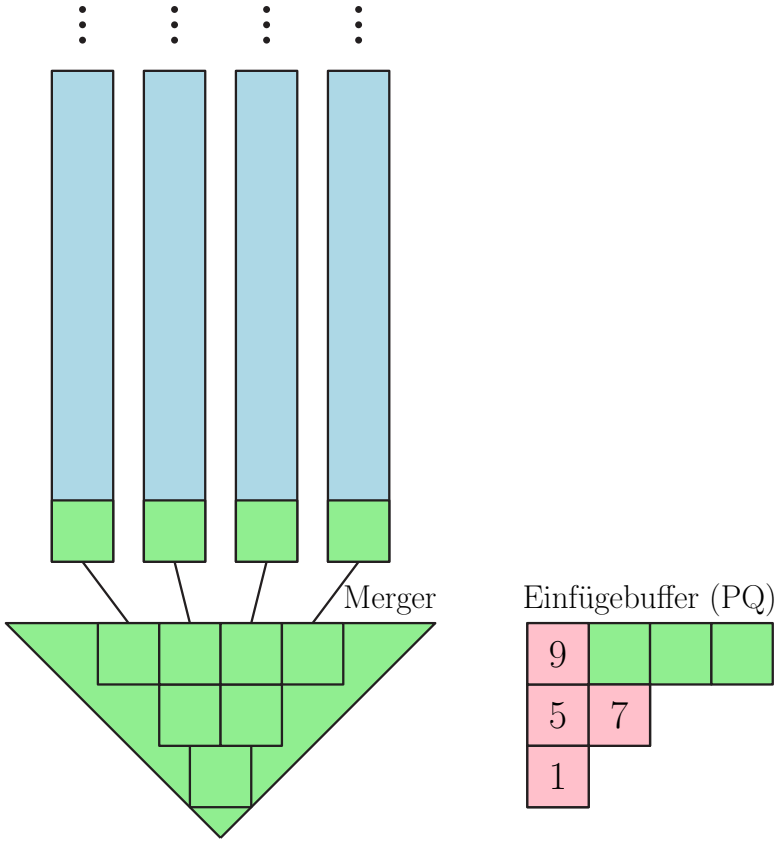
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



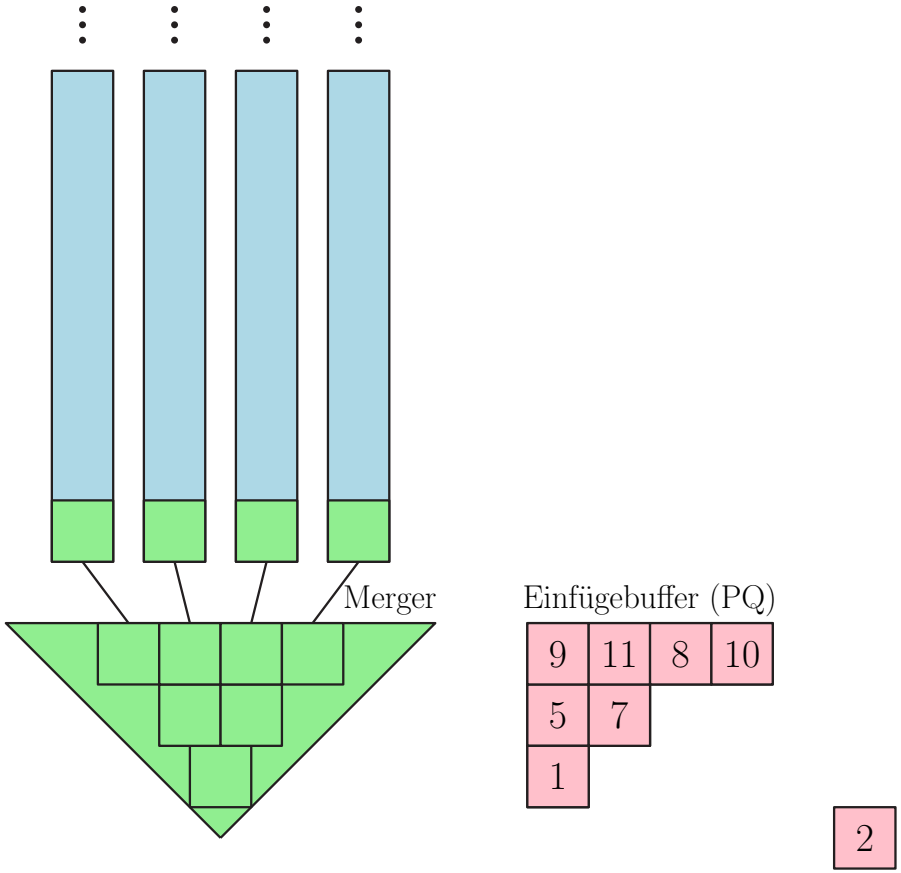
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



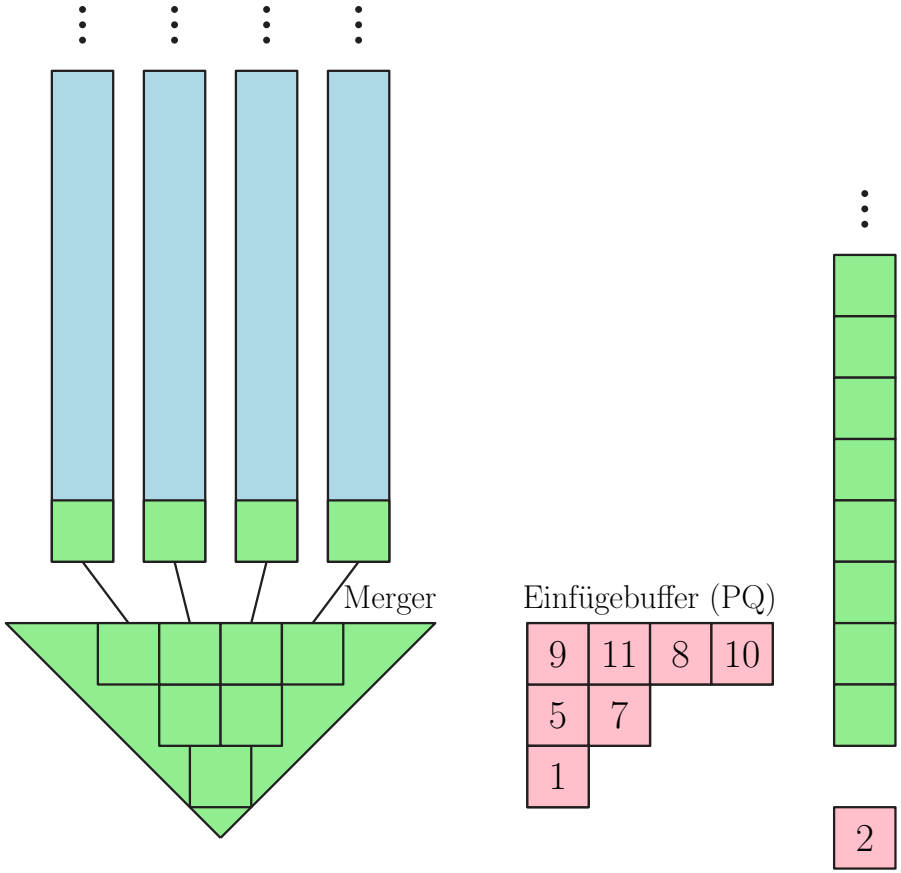
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



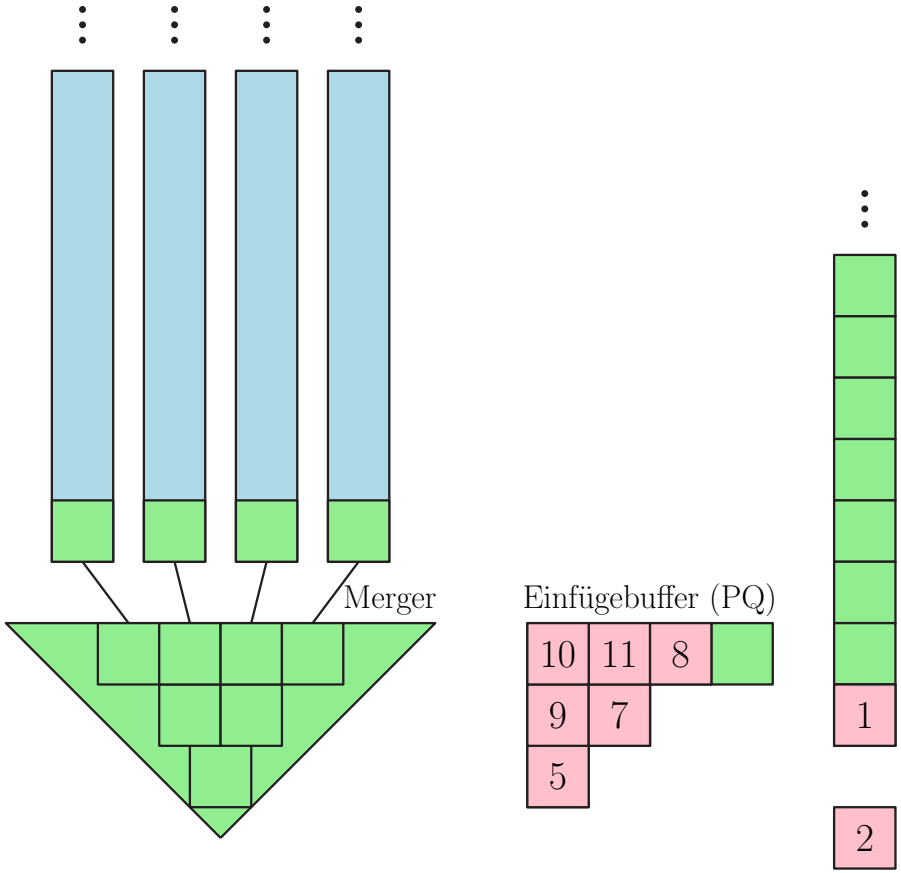
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



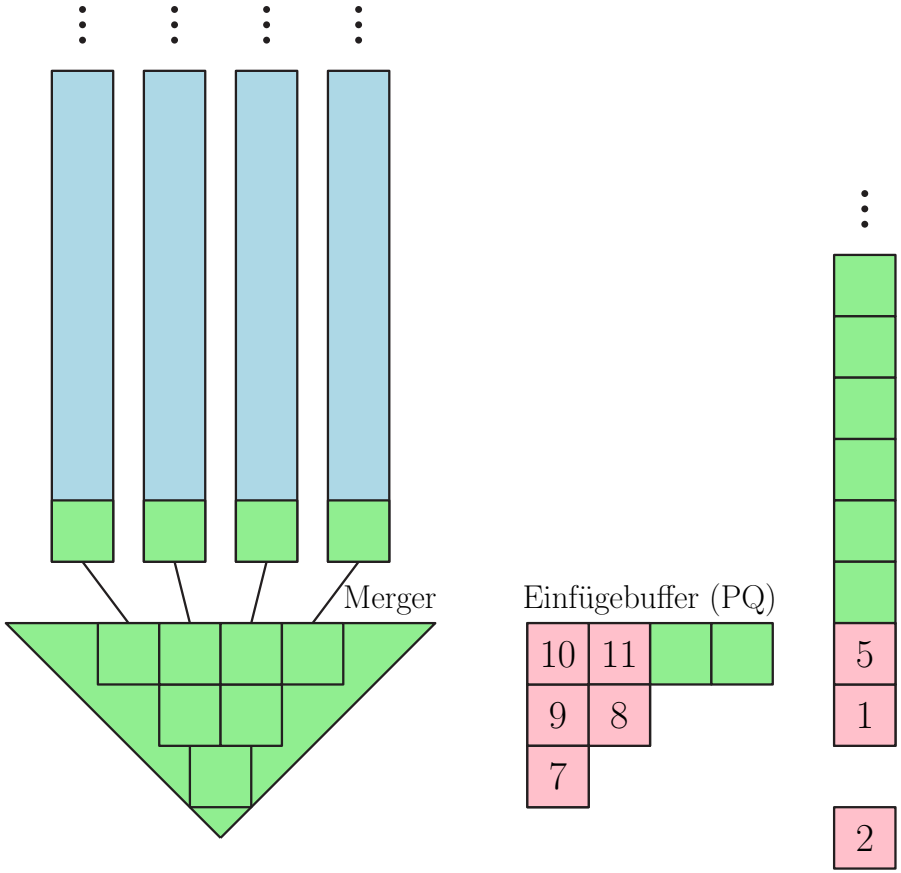
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



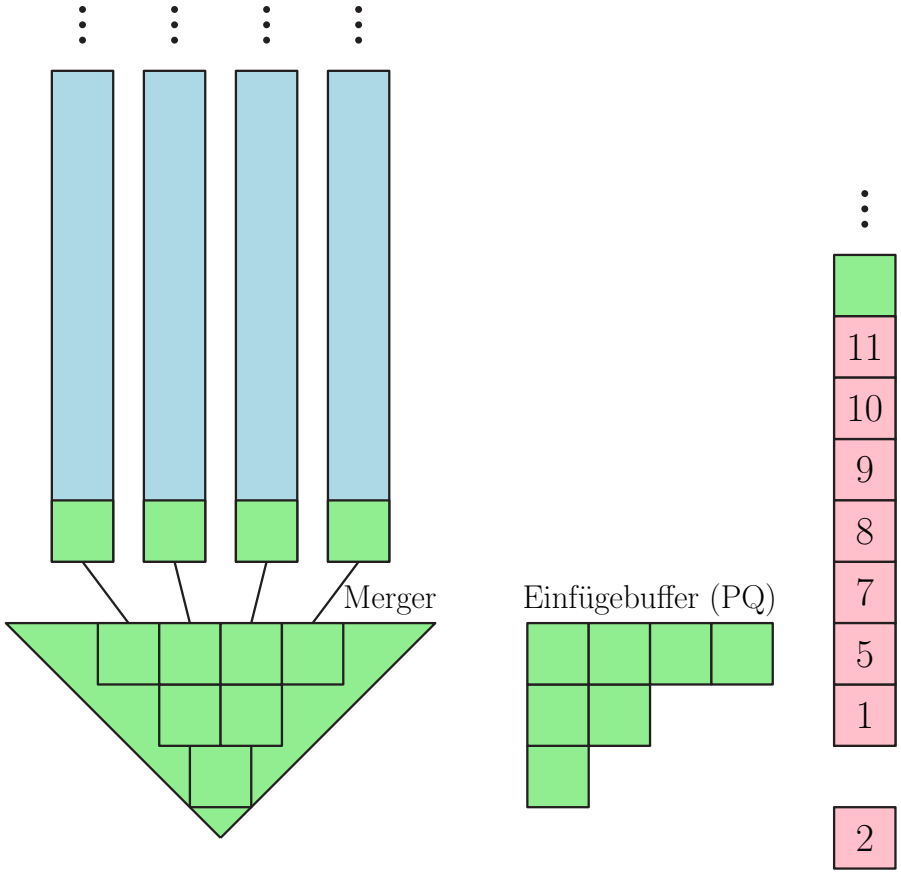
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



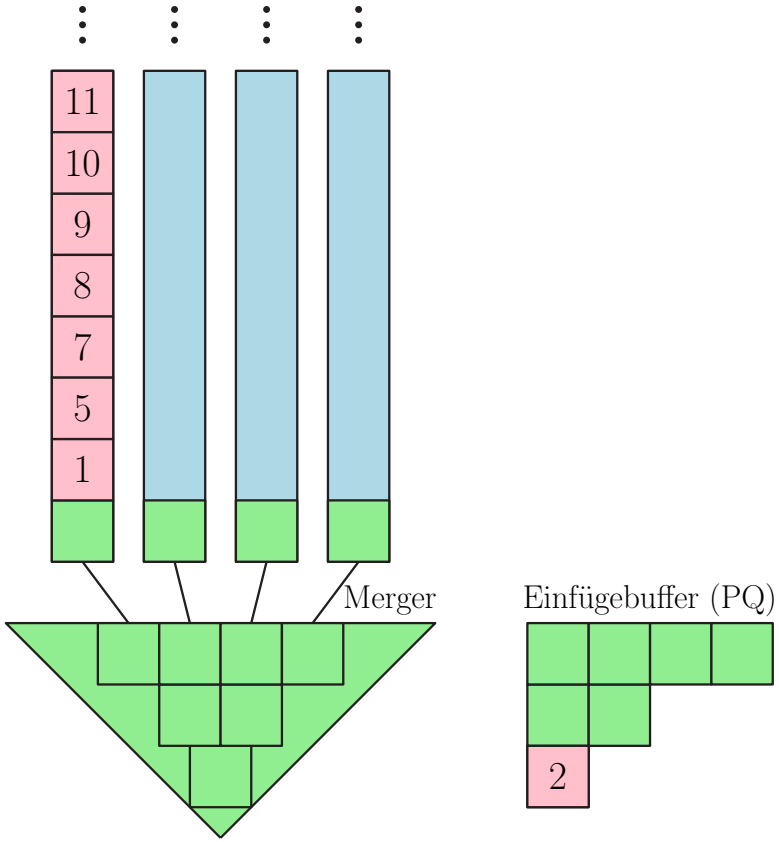
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?

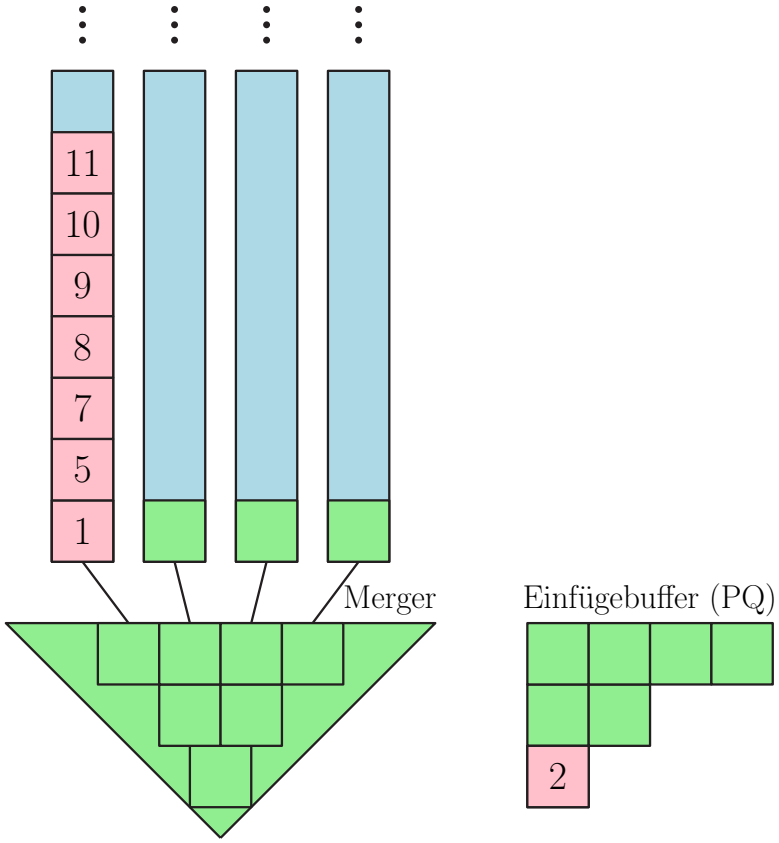


Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`

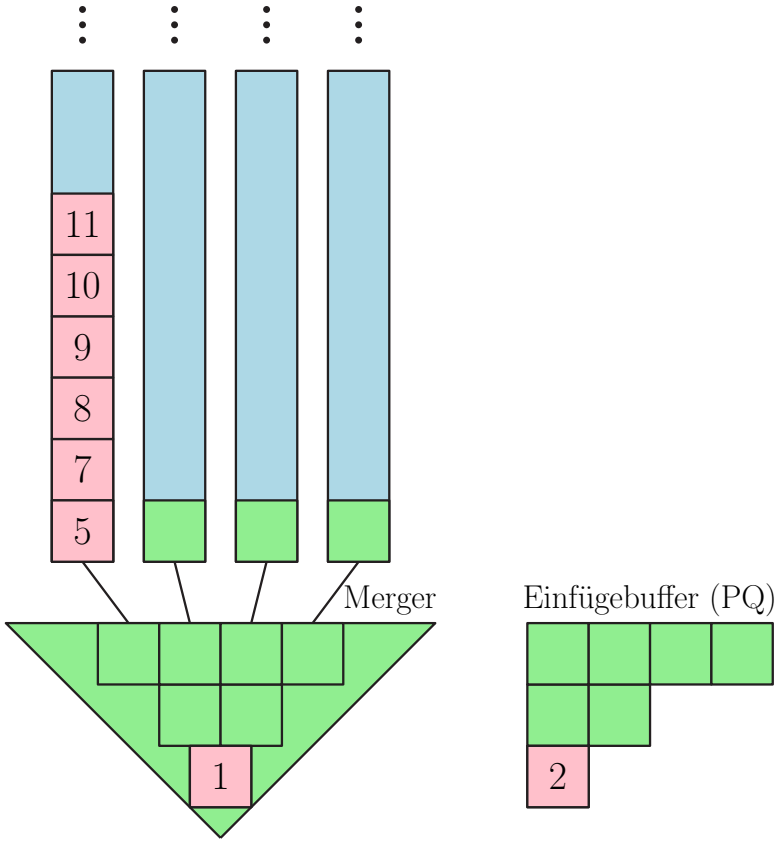
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$

- Was tun bei mehr Elementen?



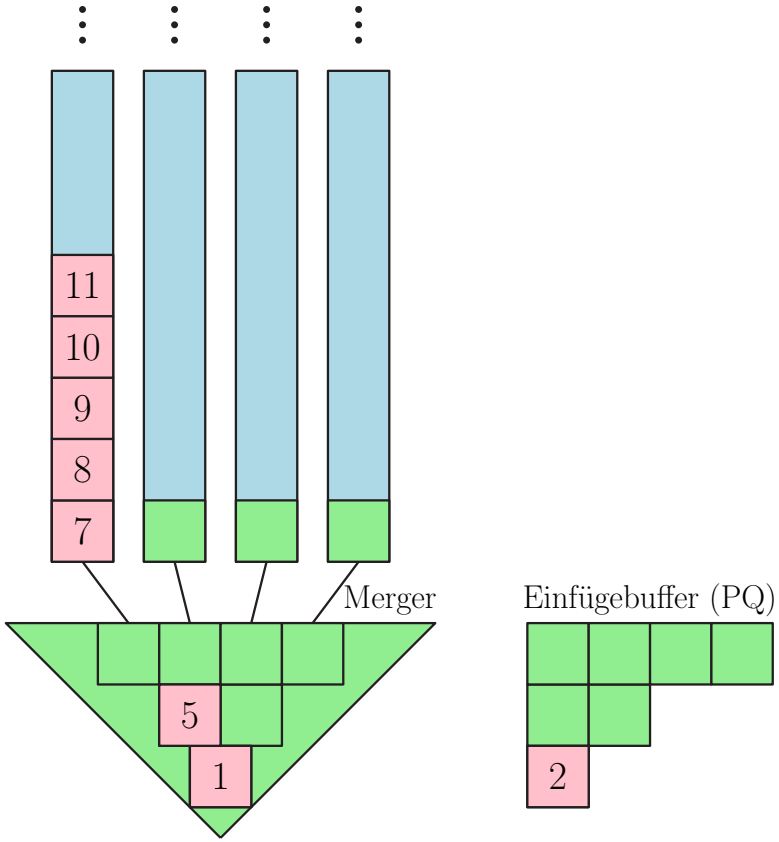
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



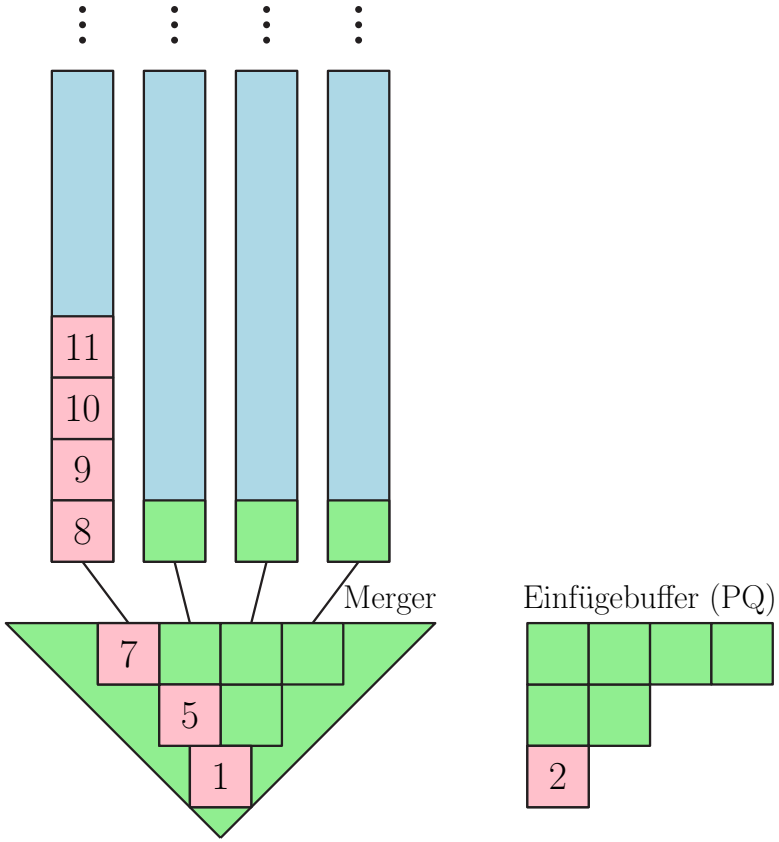
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



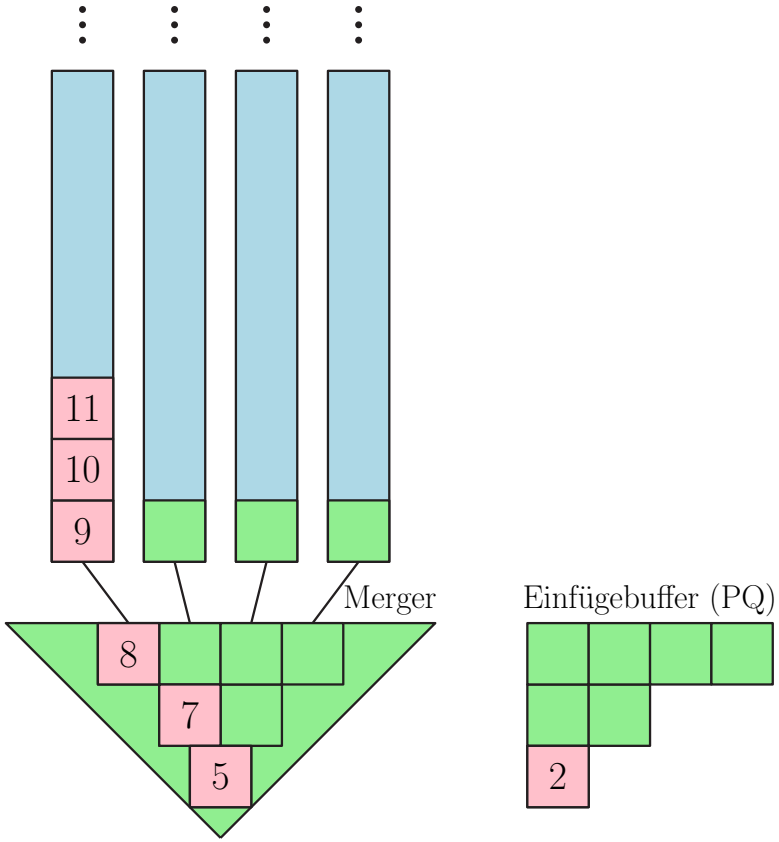
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



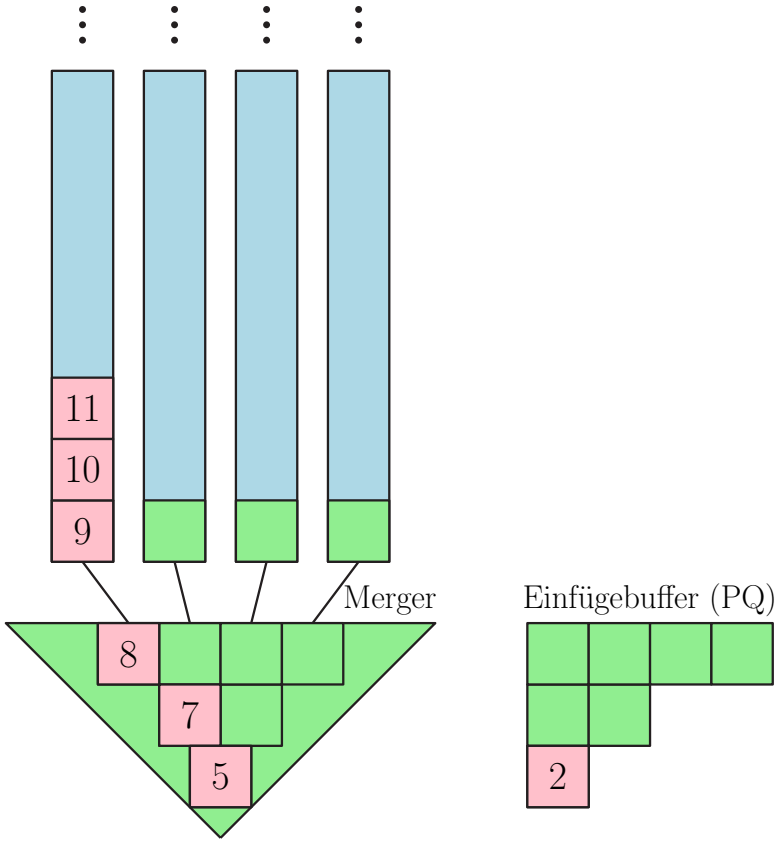
Externe Priority Queue

- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



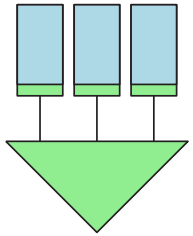
Externe Priority Queue

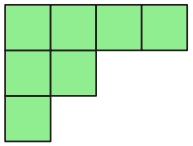
- sortierte Teilsequenzen
- Einfügepuffer (interne PQ)
- Merger (interne PQ)
- Operationen:
  - `Insert`
  - `DeleteMin`
- natürliches Limit:
  - $\#_{\text{Eingefügte Elemente}} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{M^2}{B}$
- Was tun bei mehr Elementen?



Externe Priority Queue

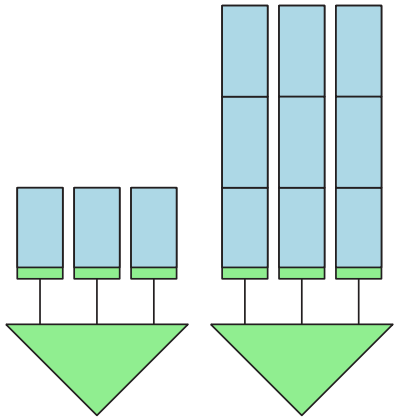
für sehr große Datenmengen

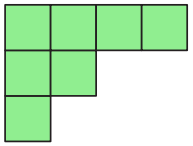




Externe Priority Queue

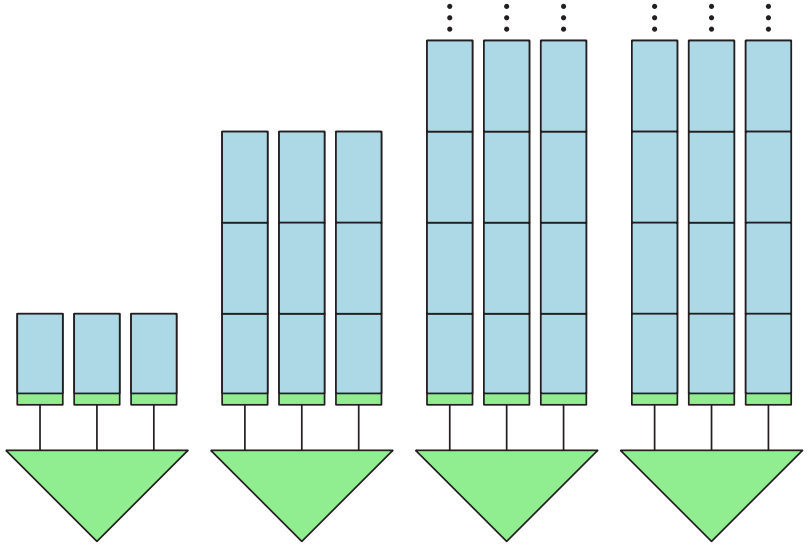
für sehr große Datenmengen

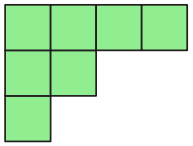




Externe Priority Queue

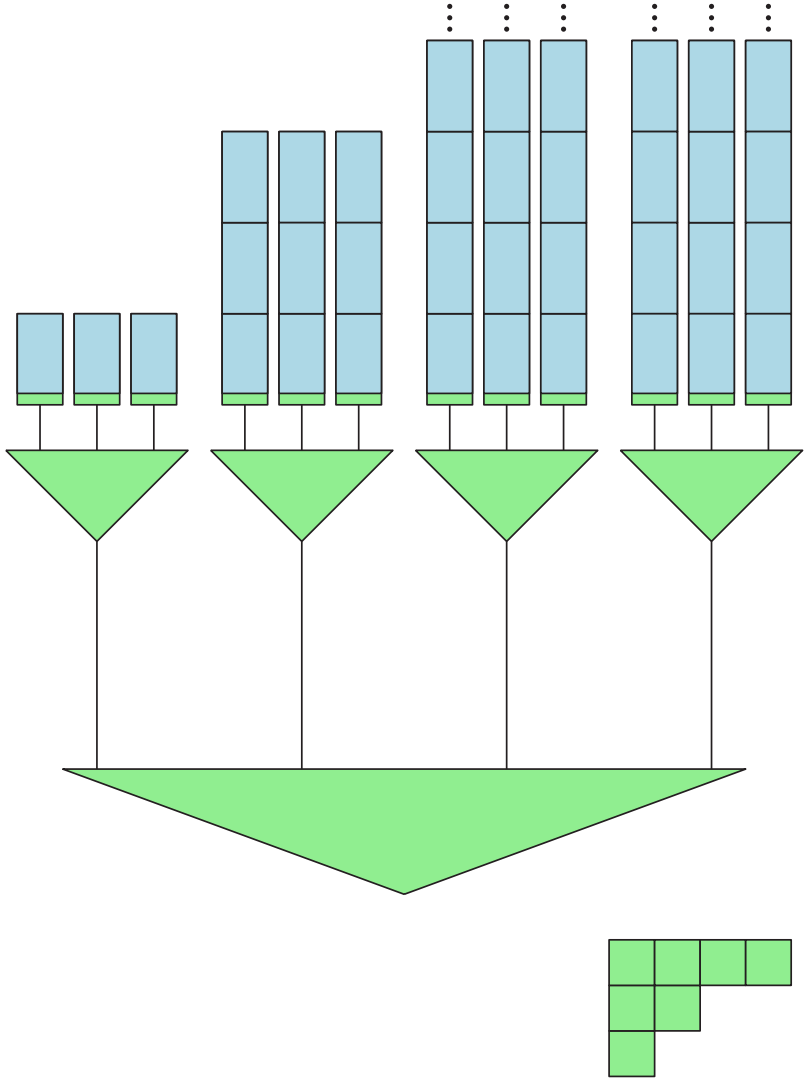
für sehr große Datenmengen





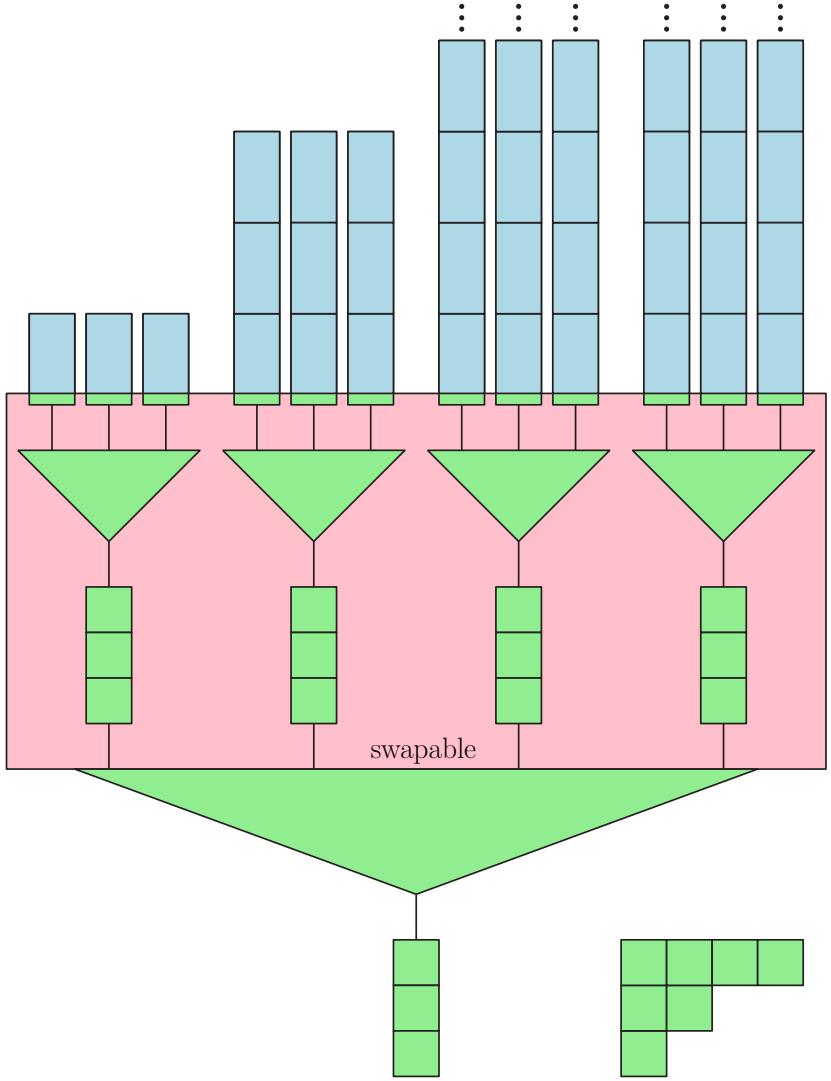
Externe Priority Queue

für sehr große Datenmengen



Externe Priority Queue

für sehr große Datenmengen



Externes Sortieren

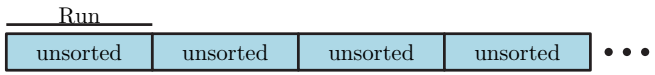
Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

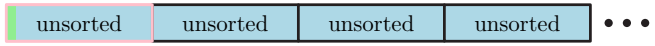
- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$



Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

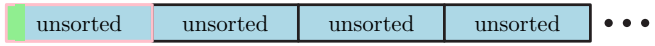


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

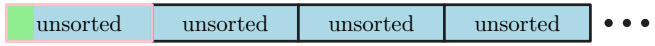


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

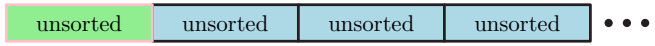


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

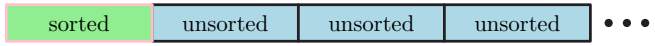


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

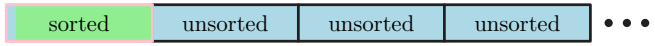


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

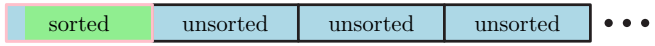


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

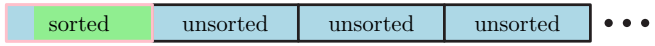


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

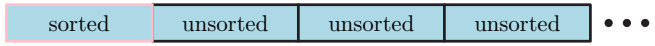


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

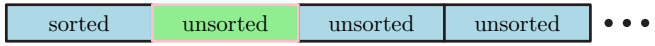


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

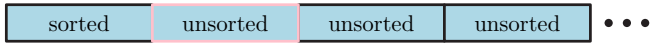


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

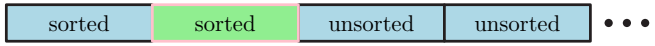


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

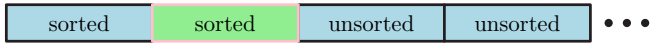


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

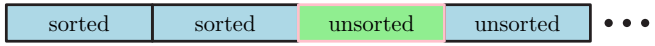


- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$



- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

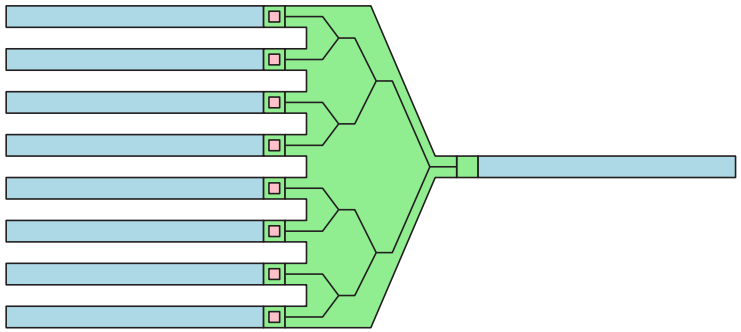
- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$

Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

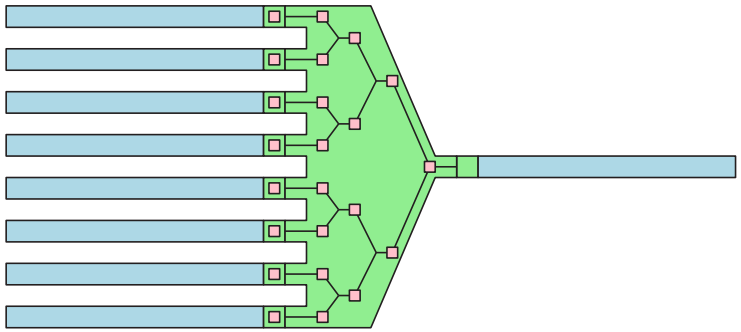
- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$



Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

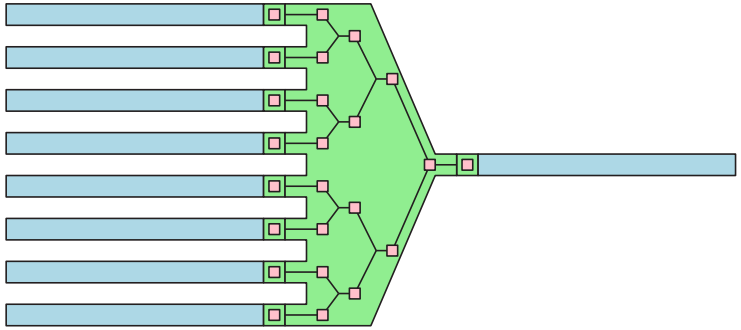
- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$



Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

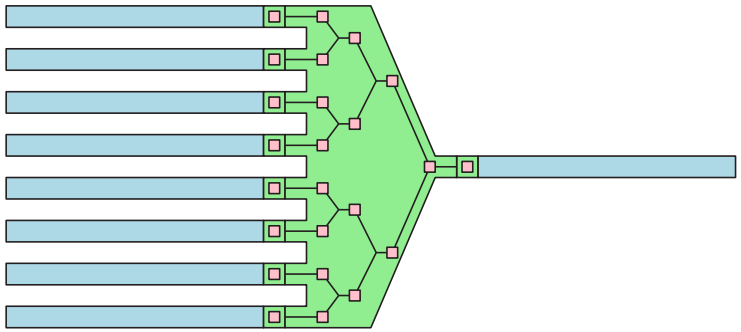
- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$



Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

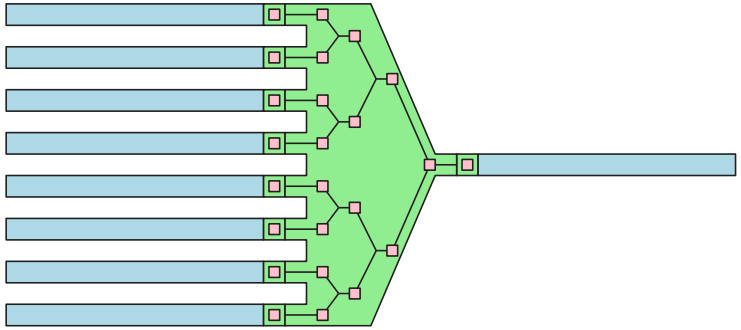
- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$



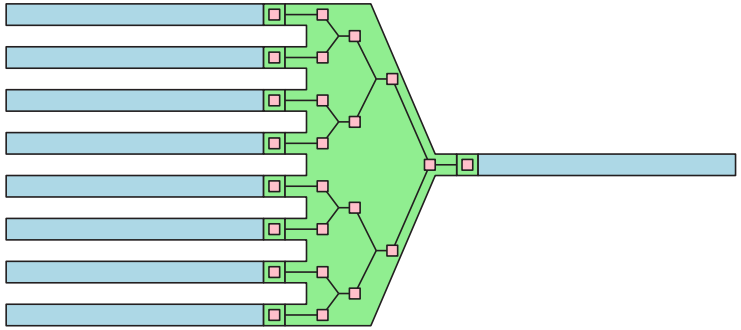
Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$



Externes Sortieren

Zwei-Phasen Algorithmus

- *Run Formation*
  - Run entspricht einem Teilbereich zu sortierender Daten
  - $\lceil \frac{n}{M} \rceil$ Stück, Größe M
  - jeweils $\mathcal{O}(M \log M)$ Arbeit (Sortieren)
  - alle Daten einmal lesen + schreiben
- *Multiway Merge*
  - jede Mischphase liest und schreibt alle Daten $\rightarrow \frac{2n}{B}$ I/Os
  - Hilfsmittel: Interne PQ für $\frac{M}{B}$ Eingabeströme
  - Pro Phase: Gruppen von $\frac{M}{B}$ Runs zu einem Run mergen $\rightarrow \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil$ Phasen
- Innere Arbeit:
  $\mathcal{O}\left(\frac{n}{M} \cdot M \log M + n \log \frac{M}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$
- I/O Operationen:
  $\mathcal{O}\left(\frac{2n}{B} + \frac{2n}{B} \cdot \lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \rceil\right)$