Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
Sebastian Lamm, Demian Hespe

3. Übungsblatt zu Algorithmen II im WS 2018/2019

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS18.php
{sanders, lamm, hespe}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Kleinaufgaben: Eigenschaften von Flüssen*)

a) Nach Vorlesung ist eine gültige Distanzfunktion $d(\cdot)$ für *Dinitz Algorithmus* gegeben durch:

- $d(t) = 0$
- $d(u) \leq d(v) + 1 \quad \forall\ (u, v) \in G_f$

Zeigen Sie, falls $d(s) \geq n$, existiert kein *augmentierender Pfad*.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit von *Dinitz Algorithmus* für Graphen mit Kantengewichten gleich 1 (*unit edgeweights*) in $O((n + m)\sqrt{m})$ liegt. Vergleichen Sie diese Laufzeit zum *Ford Fulkerson Algorithmus*. Für welche Graphen mit *unit edgeweights* ist welcher der beiden Algorithmen schneller?

c) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, in dem maximale Flüsse berechnet werden sollen. Sei $e = (i, j) \in E$ ebenso wie $e' = (j, i) \in E$, d. h. G besitzt ein Paar entgegengesetzter Kanten. Außerdem sei $c(e) \geq c(e')$. Widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

Entfernt man e' aus E und reduziert $c(e) := c(e) - c(e')$, ändert sich der maximale Fluss nicht, d. h. man kann entgegengesetzte Kanten a-priori (für beliebige s und t) gegeneinander aufrechnen.

Aufgabe 2 (*Rechnen: Segmentierung mit Flüßen*)

Wir betrachten einen einfachen Fall für Bildbearbeitung. Die Vorder-/Hintergrundsegmentierung. Das Ziel dieses Prozesses ist es, ein Bild in Vorder und Hintergrund zu zerlegen. Die Transformation dafür weißt jedem Pixel $p_{i,j}$ des Bildes einen Knoten $v_{i,j}$ im Graphen zu. Für jedes Paar von benachbarten Pixeln $p_{i,j}$ und $p_{k,l}$ ($|i-k|+|j-l|=1$) fügen wir eine ungerichtete Kante $(v_{i,j}, v_{k,l})$ ein. Zusätzlich fügen wir je einen Knoten s für Vordergrund (Quelle) und einen Knoten t für Hintergrund (Senke) ein. Von Knoten s existiert eine gerichtete Kante zu jedem Knoten $p_{i,j}$ und von jedem Knoten $p_{i,j}$ existiert eine gerichtete Kante zu Knoten t. Wir definieren darüber hinaus folgende Kantengewichte:

$$c(e=(u,v)) = \begin{cases} p_v(v) & u = s \\ p_h(u) & v = t \\ f(u,v) & sonst \end{cases}$$

Wobei mit $p_v(x)$ die Wahrscheinlichkeit gegeben ist, dass x Vordergrundknoten ist, mit $p_h(x)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Hintergrundknoten und mit $f(x,y)$ eine Penaltyfunktion für das Trennen der beiden Knoten x und y. Für ein Graustufenbild B definieren wir
$p_v(x,y) = B[x,y]^2$, $p_h(x,y) = (4 - B[x,y])^2$ sowie $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (4 - |B[x_1,y_1] - B[x_2,y_2]|)^2$.
Hinweis: Diese Modellierung ist nur ein Beispiel und keine allgemeingültige Modellierung. Sie soll nur verdeutlichen wie Flow Alglorithmen für andere Probleme eingesetzt werden können.

a) Geben Sie den Flussgraphen für das unten angegebene Graustufenbild an.

b) Führen Sie einen augmenting Path Algorithmus auf dem entstandenen Graphen aus.

c) Wie würde die Segmentierung in Vorder- und Hintergrund im Bild als Ergebnis aussehen?

4	4	1
4	2	0
0	0	0

Aufgabe 3 (*Analyse: Königs Theorem*)

Das *Theorem von König* besagt, dass in jedem bipartiten Graphen $G = (V,\ E)$ die Größe eines Matchings größter Wertigkeit (*maximum-cardinality matching*) gleich der Größe einer minimalen Knotenüberdeckung (*minimal vertex cover*) ist.

Vertex Cover:
Ein *Vertex Cover* ist definiert als eine Teilmenge der Knoten $S \subseteq V$, so dass für alle Kanten $e = (u, v) \in E$ gilt $u \in S \vee v \in S$. Ein *minimales Vertex Cover* besitzt unter allen korrekten die kleinste Teilmenge an Knoten S.

Matching:
Ein *Matching* ist definiert als eine Teilmenge von Kanten $S \subseteq E$, so dass jeder Knoten $v \in V$ Endpunkt von höchstens einer Kante in S ist. Eine *maximales Matching* besitzt unter allen korrekten die größte Teilmenge an Kanten S.

Bipartiter Graph:
Ein bipartiter Graph enthält ausschließlich Kanten zwischen disjunkten Teilmengen der Knotenmenge: $e \in E \leftrightarrow (u, v) \in S \times T,\ V = S \cup T,\ S \cap T = \varnothing$.

Beweisen Sie das *Theorem von König*.

Aufgabe 4 (*Analyse+Entwurf+Rechnen: Grenzüberwachung*)

Eine (eindimensionale) Grenzlinie soll durch ein Sensornetz überwacht werden. Zu diesem Zweck wurde eine große Anzahl an Sensorknoten unregelmäßig an der Grenze ausgebracht. Jeder Knoten kann einen Bereich der Grenze für eine gewisse Zeit proportional zu seiner Batteriekapazität überwachen. Die Grenze gilt als vollständig gesichert, wenn jeder Abschnitt der Grenzlinie von mindestens einem Sensorknoten abgedeckt ist. Aufgrund der großen Menge an Knoten sind ihre Überwachungsbereiche stark überlappend. Daher müssen nicht immer alle Knoten aktiv sein, um eine vollständige Sicherung der Grenze zu gewährleisten. So kann Energie gespart werden und die maximale Dauer der Grenzsicherung erhöht werden.
Durch die unregelmäßige Anbringung der Knoten und durch große Fertigungstoleranzen in der Batteriekapazität und dem Überwachungsbereich (*man hat unbedingt beim billigsten Hersteller einkaufen müssen...*) ist zunächst nicht klar, wie lange die Grenze maximal vollständig gesichert werden kann. Glücklicherweise wurden die Positionen der Knoten und ihre jeweiligen Kapazitäten und Detektionsbereiche protokolliert und können verwendet werden, um diese Frage zu beantworten.

a) In der Vorlesung haben Sie Flussprobleme mit beschränkten Kantenkapazitäten $c(e)$ kennengelernt. Ebenso können Flussprobleme mit beschränkten Knotenkapazitäten $c(v)$ sinnvoll sein. In diesem Fall darf für einen gültigen Fluss die Summe der in den Knoten ankommenden bzw. ausgehenden Flüsse die Kapazität des Knotens nicht überschreiten. Außerdem muss wie bisher für jeden Knoten (außer der Quelle und Senke) die Summe der ankommenden Flüsse gleich der Summe der ausgehenden Flüsse sein.

   Erklären Sie, wie maximale Flüsse mit Knotenkapazitäten berechnet werden können. Begründen Sie kurz, warum Ihr Ansatz einen zulässigen und optimalen Fluss berechnet.

b) Konstruieren Sie ein Flussnetzwerk, das das oben beschriebene Problem der Bestimmung einer maximalen Dauer für die vollständige Grenzüberwachung lösen kann.

   Hinweis: Jeder Knoten entspricht einem Sensorknoten. Batteriekapazität kann als äquivalent zur Flussmenge betrachtet werden.

c) Erstellen Sie ein Flussnetz, das dem folgenden Sensornetz entspricht. Wie lange kann dieses Netz die Grenze im Bereich $[0, 13]$ überwachen? Welche Sensorknoten müssen wann aktiv sein?

   Format der Angaben: $x_{nodeID} = \{[begin\_range, end\_range], capacity\}$

   $x_1 = \{[0, 5], 4\}$
   $x_2 = \{[0, 7], 3\}$
   $x_3 = \{[4, 9], 2\}$
   $x_4 = \{[3, 8], 5\}$
   $x_5 = \{[8, 13], 5\}$
   $x_6 = \{[7, 11], 3\}$
   $x_7 = \{[11, 15], 2\}$

   Hinweis: Bevor Sie langwierig einen maximalen Fluss berechnen, versuchen Sie ihn durch *scharfes Hinschauen* zu bestimmen.

Aufgabe 5 (*Analyse: Eigenschaften von Flüssen*)

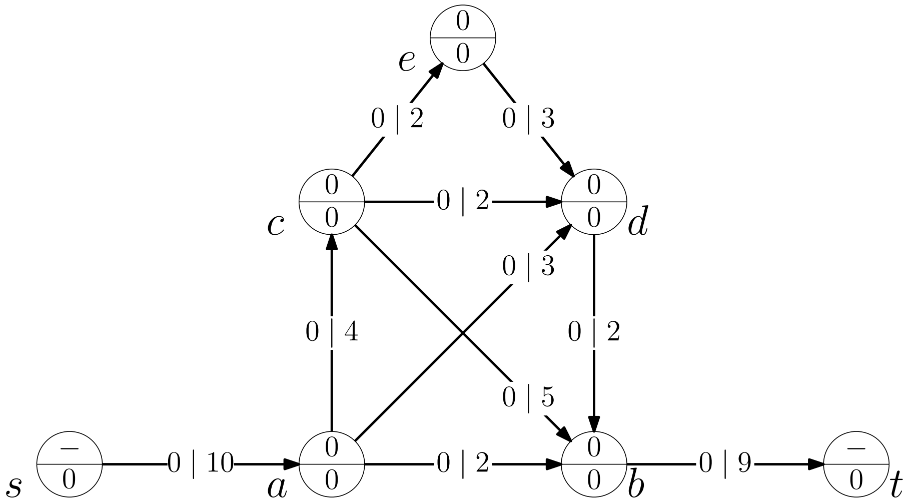
a) Seien (S, T) und (S', T') zwei minimale (s, t) Schnitte in einem Flußgraphen G. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(S \cup S', T \cap T')$ und $(S \cap S', T \cup T')$ auch minimale (s, t) Schnitte sind.

b) Sei (S, T) ein minimaler (s, t) Schnitt in einem Flussgraphen G. Zeigen oder widerlegen Sie, dass (S, T) ein minimaler (x, y) Schnitt ist f.a. $(x, y) \in S \times T$.

c) Zeigen Sie, dass für den *preflow-push Algorithmus* aus der Vorlesung mit beliebiger Wahl des nächsten Knotens $\mathcal{O}(n^2)$ die bestmögliche obere Schranke ist.

Aufgabe 6 (*Rechnen: preflow-push Algorithmus*)

Gegeben sei folgender Flussgraph:



(das Haus vom Nikolaus mit Vorgarten und Hinterhof)

Knotenbeschriftung: Level (unten), Überschuss (oben)
Kantenbeschriftung: Fluss (vorne), Kapazität (hinten)

Bestimmen Sie den maximalen Fluss von s nach t mit dem generischen *preflow-push* Algorithmus.

Ausgabe: 20.11.2018
Abgabe: keine Abgabe, keine Korrektur