Algorithmen II

Peter Sanders, Timo Bingmann

Übungen:

Sebastian Lamm, Demian Hespe

Institut für Theoretische Informatik

Web:

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS18.php`

6 Randomisierte Algorithmen

verwende Zufall(sbits) zur Beschleunigung/Vereinfachung von Algorithmen

Las Vegas: Ergebnis immer korrekt, Laufzeit ist Zufallsvariable.

Schon gesehen:

- quicksort
- hashing

Monte Carlo: Ergebnis mit bestimmter Wahrscheinlichkeit p inkorrekt.

k-fache Wiederholung macht Fehlschlagswahrscheinlichkeit exponentiell klein (p^k).

Mehr in der Vorlesung Randomisierte Algorithmen von Thomas Worsch

6.1 Sortieren – Ergebnisüberprüfung (Checking)

Permutationseigenschaft (Sortiertheit: trivial.)

$\langle e_1,\ldots,e_n\rangle$ ist Permutation von $\langle e'_1,\ldots,e'_n\rangle$ gdw.

$$q(z) := \prod_{i=1}^{n}(z-\mathsf{field}(\mathsf{key}(e_i))) - \prod_{i=1}^{n}(z-\mathsf{field}(\mathsf{key}(e'_i))) = 0,$$

$\mathbb{F}$ sei Körper, field : Key $\to \mathbb{F}$ sei injektiv.

Beobachtung: q hat höchstens n Nullstellen.

Auswertung an zufälliger Stelle $x \in \mathbb{F}$.

$$\mathbb{P}[q \neq 0 \wedge q(x) = 0] \leq \frac{n}{|\mathbb{F}|}$$

Monte Carlo-Algorithmus, Linearzeit.

Frage: Welchen Körper $\mathbb{F}$ nehmen wir?

Sort Checking II – mit Lorenz Hübschle-Schneider

Ist Folge E eine Permutation von Folge E'?

Sei h zufällige Hash-Funktion mit Wertebereich $0..U-1$,

$h(S) := \sum_{e \in S} h(e)$

Checker: return $h(E) = h(E')$

Sort Checking II – mit Lorenz Hübschle-Schneider

Ist Folge E eine Permutation von Folge E'?

Sei h zufällige Hash-Funktion mit Wertebereich $0..U-1$,

$h(S) := \sum_{e \in S} h(e)$

Checker: return $h(E) = h(E')$

Korrekt falls $E = E'$.

Fall $E \neq E'$: Wir zeigen $\mathbb{P}[h(E) = h(E')] \leq \frac{1}{U}$

Sei e ein Element, das $k\times$ in E vorkommt und $k' \neq k\times$ in E'.

$$h(E) = h(E') \Leftrightarrow h(E \setminus e) + kh(e) = h(E' \setminus e) + k'h(e)$$

$$\Leftrightarrow h(e) = \frac{h(E' \setminus e) - h(E \setminus e)}{k - k'} =: x$$

$\mathbb{P}[h(e) = x] \leq \frac{1}{U}$ weil x unabhängig von $h(e)$ ■

6.2 Hashing II

Perfektes Hashing

Idee: mache h injektiv.

Braucht $\Omega(n)$ bits Platz !

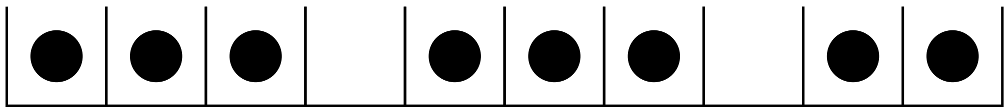
Here: Fast Space Efficient Hashing

Represent a set of n elements (with associated information) using space $(1+\varepsilon)n$.

Support operations insert, delete, lookup, (doall) efficiently.

Assume a truly random hash function h

(Trick [Dietzfelbinger, Weidling 2005]: läßt sich rechtfertigen.)



Related Work

Linear probing: $E[T_{\text{find}}] \approx \frac{1}{2\varepsilon^2}$

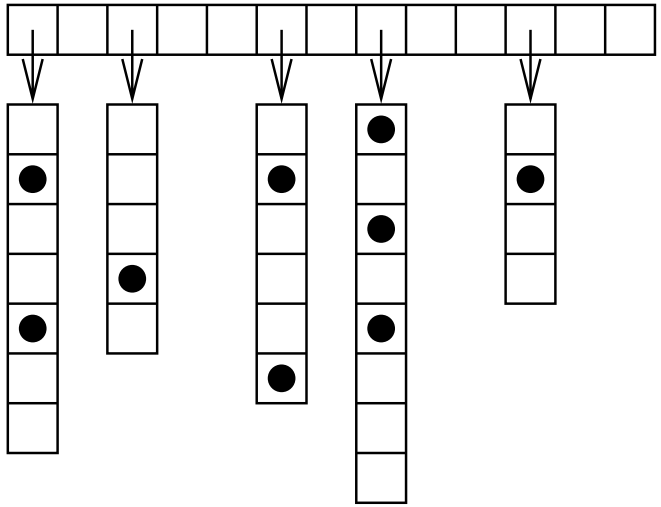
Uniform hashing: $E[T_{\text{find}}] \approx \frac{1}{\varepsilon}$

Dynamic Perfect Hashing,

[Dietzfelbinger et al. 94]

Worst case constant time

for lookup but ε is not small.



Approaching the Information Theoretic Lower Bound:

[Brodnik Munro 99,Raman Rao 02]

Space $(1+o(1))\times$lower bound without associated information

[Botelho Pagh Ziviani 2007] static case.

Simple, fast, ≈ 3bits/element [FiRe/FiPHa:Müller,S,Schulze,Zhou 14]

Cuckoo Hashing

[Pagh Rodler 01]

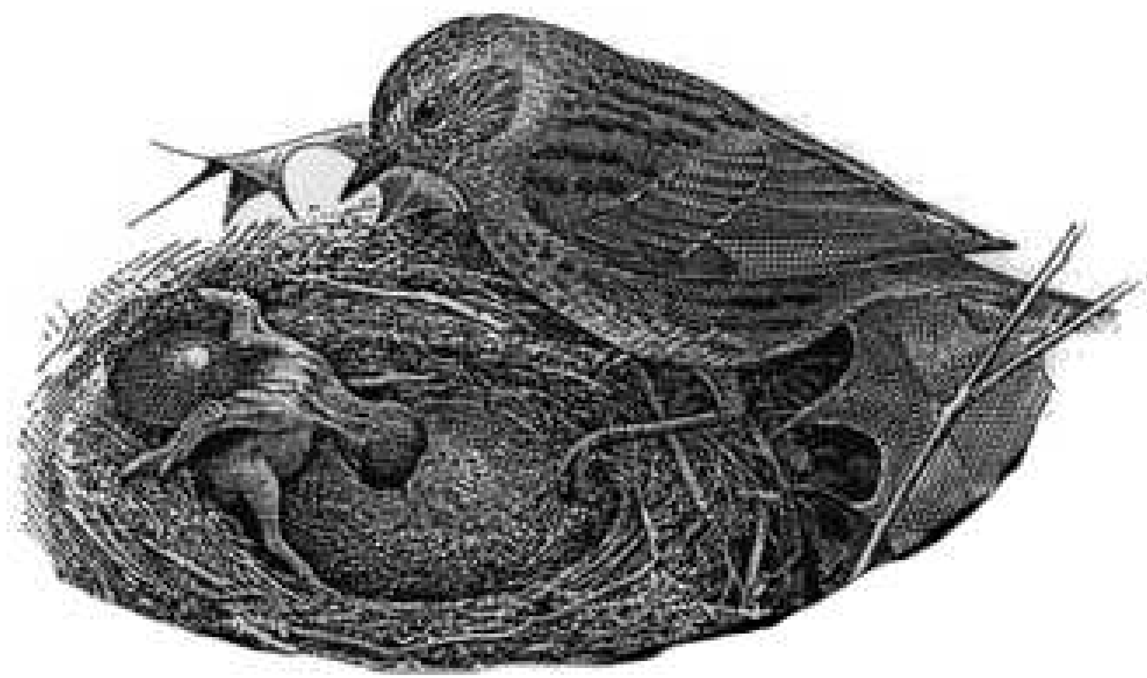


Table of size $(2+\varepsilon)n$.

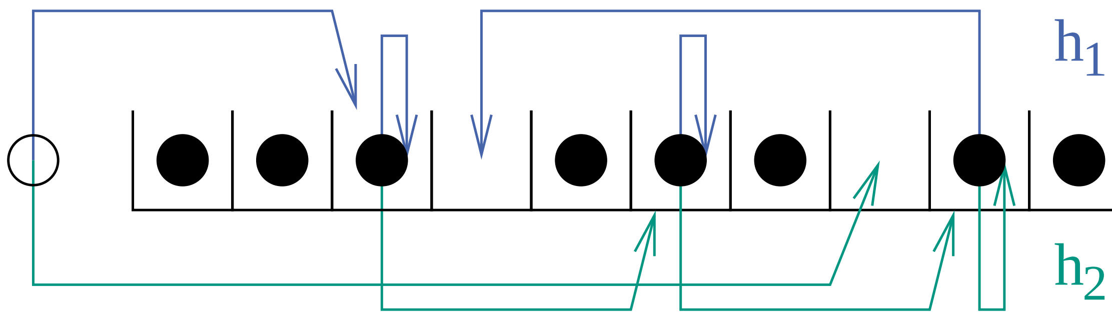
Two choices for each element.

Insert moves elements;

rebuild if necessary.

Very fast lookup and delete.

Expected constant insertion time.



Cuckoo Hashing – Rebuilds

When needed ?

Graph model.

node: table cells

undirected edge: element $x \rightsquigarrow$

edge $\{h_1(x), h_2(x)\}$

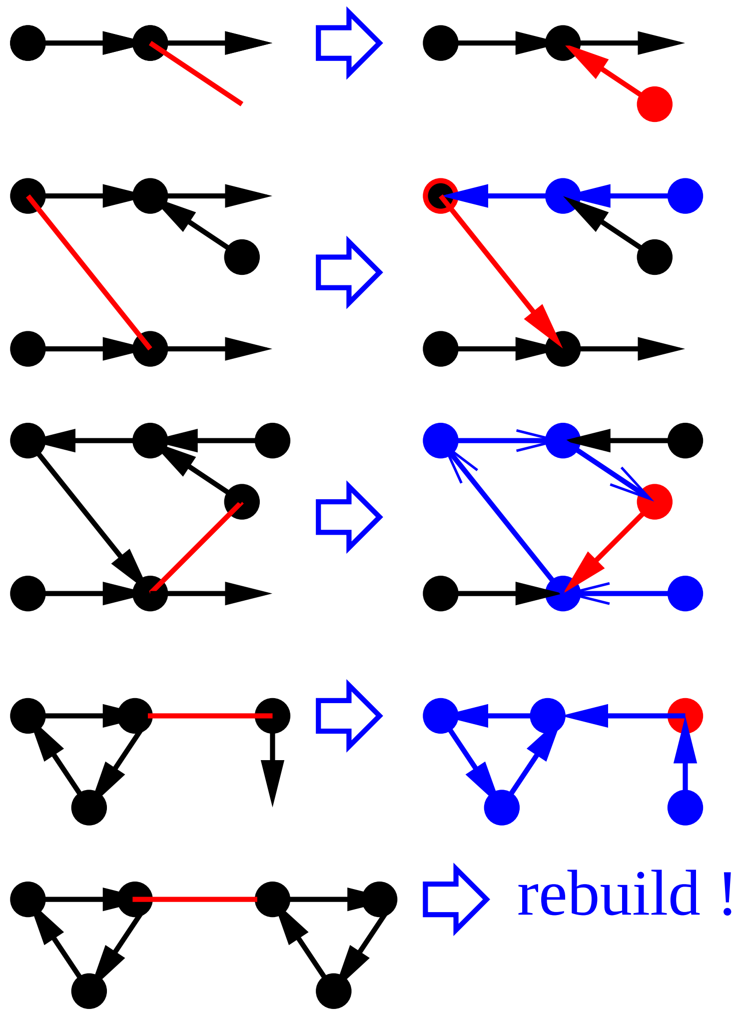
directed: $(h_2(x), h_1(x))$ means

element x is stored at cell $h_2(x)$

Lemma: insert(x) succeeds iff

the component containing $h_1(x), h_2(x)$

contains no more edges than nodes.



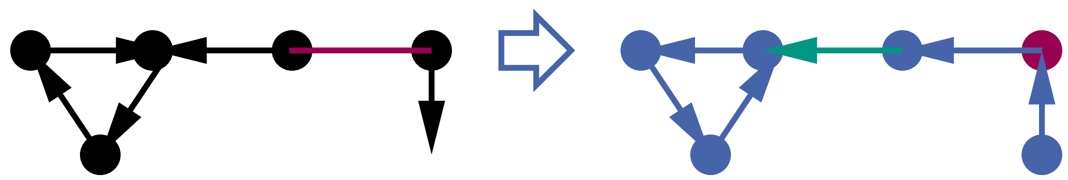
Cuckoo Hashing – Rebuilds

Lemma: insert(x) succeeds iff
the component containing $h_1(x), h_2(x)$
contains no more edges than nodes.

Proof outline: (if-part)

$h_1(x)$ **in tree:** flip path to root

$h_1(x)$ **in pseudotree** p**,** $h_2(x)$ **in tree** t**:**
flip cycle and path to root in t



Cuckoo Hashing – How Many Rebuilds?

Theorem: For truly random hash functions,

$\mathbf{Pr}[\text{rebuild necessary}] = \mathrm{O}(1/n)$

Proof: via random graph theory

Random Graph Theory

[Erdős, Rényi 1959]

$\mathscr{G}(n,m)$:= sample space of all graphs with n nodes, m edges.

A random graph from $\mathscr{G}(n,m)$ has certain properties with high probability, here $\geq 1 - \mathrm{O}(1/n)$.

Famous: The evolution of component sizes with increasing m:

$< (1-\varepsilon)n/2$: Trees and Pseudotrees of size $\mathrm{O}(\log n)$

$> (1+\varepsilon)n/2$: A "giant" component of size $\Theta(n)$ (sudden emergence)

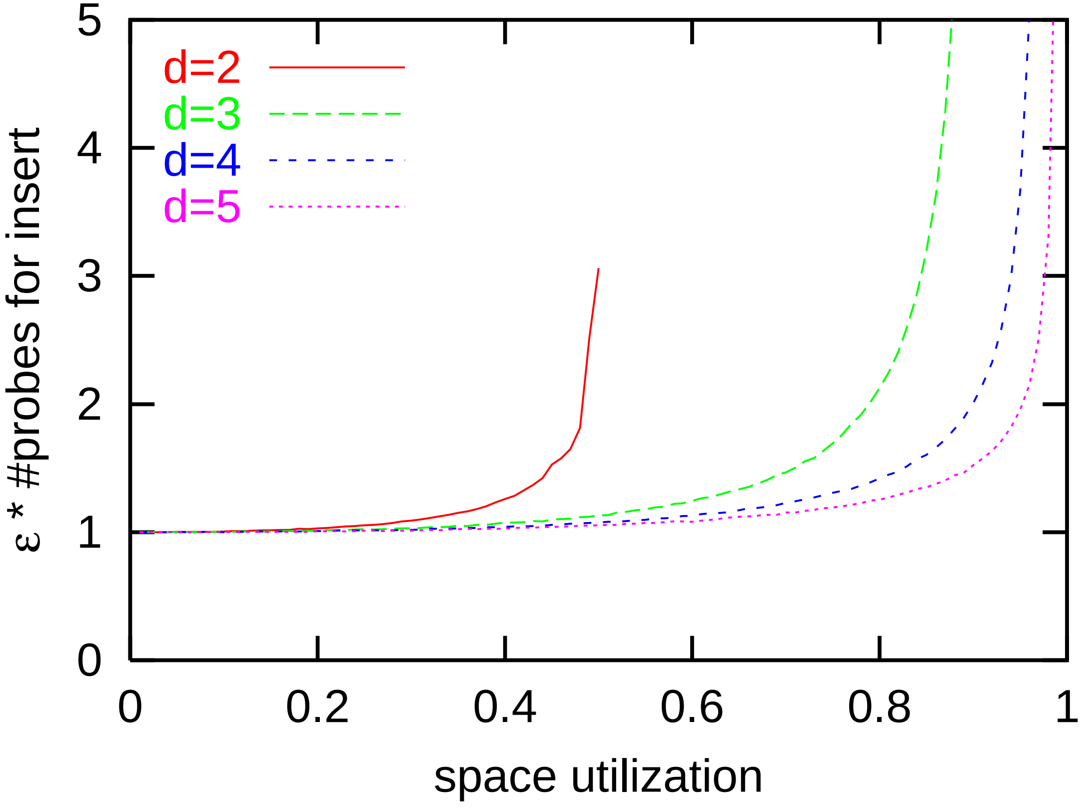
$> (1+\varepsilon)n \ln n/2$: One single component

Space Efficient Cuckoo Hashing

***d*-ary:** [Fotakis, Pagh, Sanders, Spirakis 2003] d possible places.

Insertion: BFS, random walk, ...

expected time: $\mathrm{O}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$?



Space Efficient Cuckoo Hashing

d-ary: [Fotakis, Pagh, Sanders, Spirakis 2003] d possible places.

blocked: [Dietzfelbinger, Weidling 2005] cells house d elements.

Cache efficient !

blocked, d-ary, dynamic growing:

[Maier, Sanders 2017]

Zusammenfassung: Randomisierte Algorihtmen

- einfache, effiziente Algorithmen
- Analyse oft nichttrivial
- z.T. wird aus esoterischer Theorie ein praxisrelevantes Werkzeug, z.B. random graph evolution
- Las Vegas versus Monte Carlo
- Brücke zur Algebra: z.B. Checker für Sortieren

Ausblick: Randomisierte Algorihtmen

- externe minimale Spannbäume
- mehr quicksort (strings, parallel)
- kleinster umschließender Kreis
- online paging