

# **Algorithmen II**

**Peter Sanders, Timo Bingmann**

**Übungen:**

**Sebastian Lamm, Demian Hesse**

Institut für Theoretische Informatik

Web:

[http://algo2.itl.kit.edu/AlgorithmenII\\_WS18.php](http://algo2.itl.kit.edu/AlgorithmenII_WS18.php)

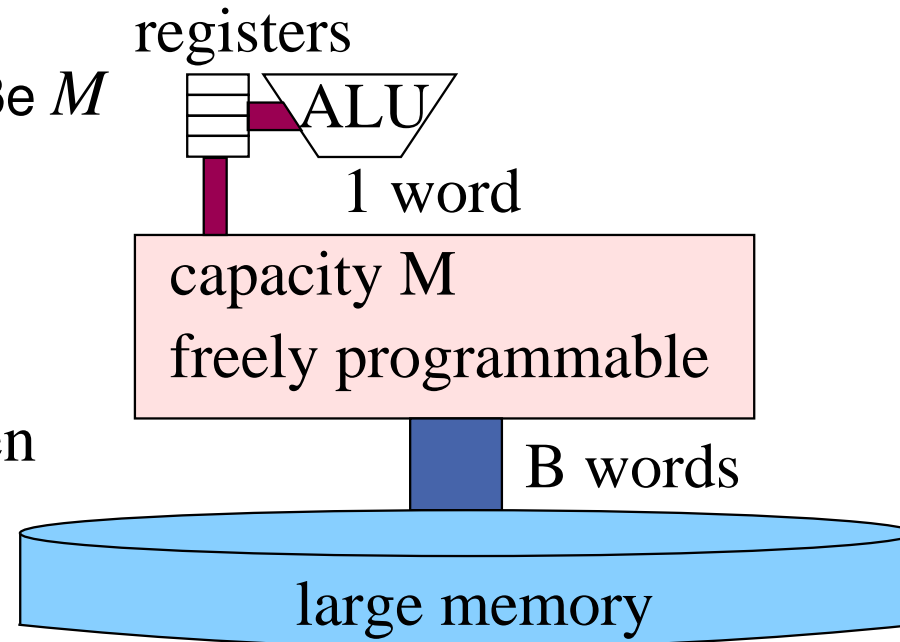
# 7 Externe Algorithmen

## 7.1 Das Sekundärspeichermodell

$M$ : Schneller Speicher der Größe  $M$

$B$ : Blockgröße

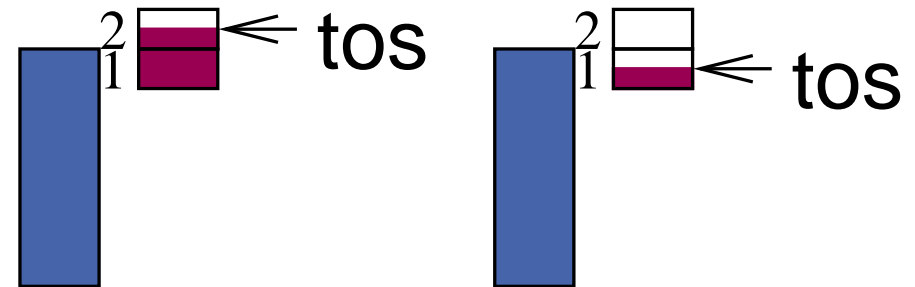
**Analyse:** Blockzugriffe zählen



## 7.2 Externe Stapel

Datei mit Blöcken

2 interne Puffer



**push:** Falls Platz, in Puffer.

Sonst schreibe Puffer **eins** in die Datei (push auf Blockebene)

Umbenennung: Puffer 1 und 2 tauschen die Plätze

**pop:** Falls vorhanden, pop aus Puffer.

Sonst lese Puffer **eins** aus der Datei (pop auf Blockebene)

Analyse: amortisiert  $O(1/B)$  I/Os pro Operation

Aufgabe 1: Beweis.

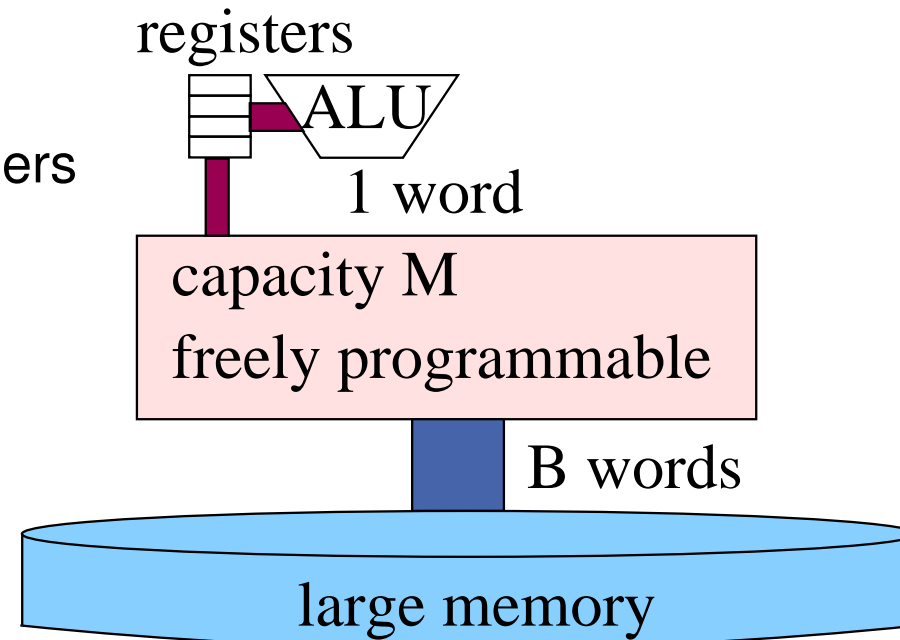
Aufgabe 2: effiziente Implementierung ohne überflüssiges Kopieren

## 7.3 Externes Sortieren

$n$ : Eingabegröße

$M$ : Größe des schnellen Speichers

$B$ : Blockgröße



**Procedure** externalMerge( $a, b, c$  :File of Element)

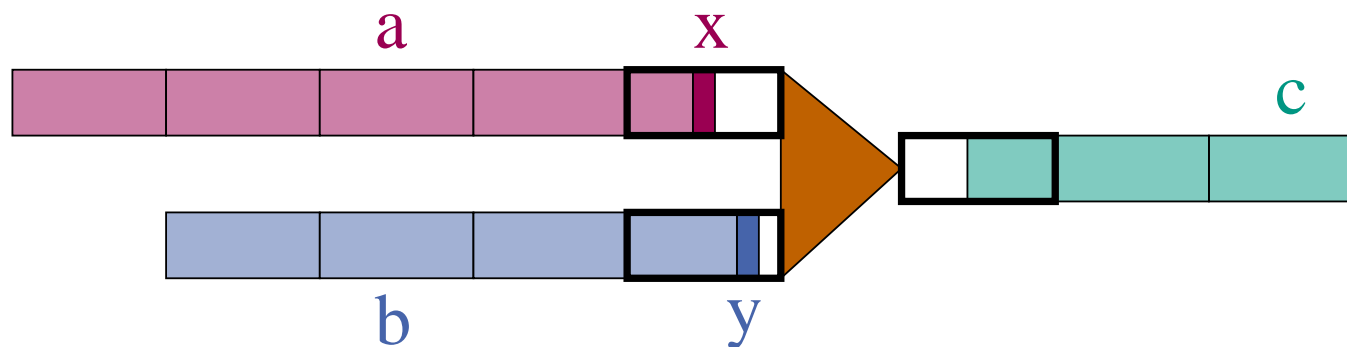
$x := a.readElement$  // Assume emptyFile.readElement =  $\infty$

$y := b.readElement$

**for**  $j := 1$  **to**  $|a| + |b|$  **do**

**if**  $x \leq y$  **then**  $c.writeElement(x)$ ;  $x := a.readElement$

**else**  $c.writeElement(y)$ ;  $y := b.readElement$



## Externes (binäres) Mischen – I/O-Analyse

Datei  $a$  lesen:  $\lceil |a|/B \rceil \leq |a|/B + 1$ .

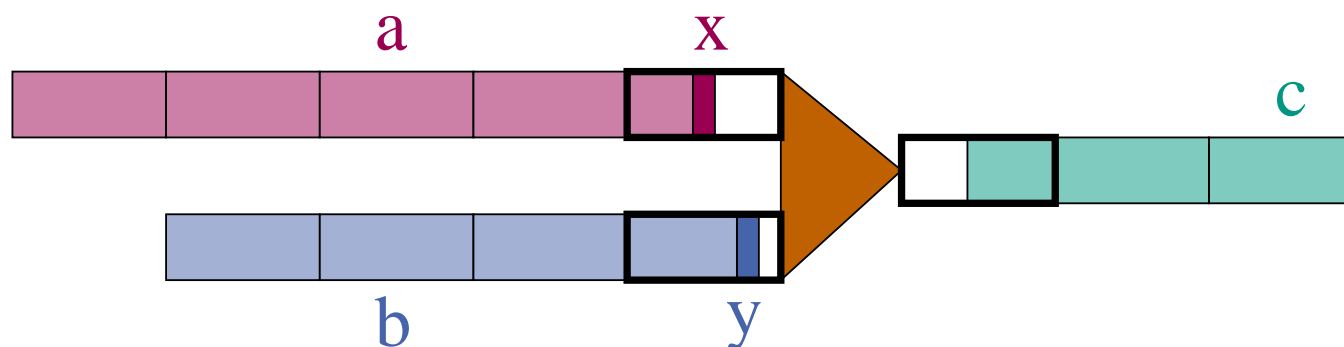
Datei  $b$  lesen:  $\lceil |b|/B \rceil \leq |b|/B + 1$ .

Datei  $c$  schreiben:  $\lceil (|a| + |b|)/B \rceil \leq (|a| + |b|)/B + 1$ .

Insgesamt:

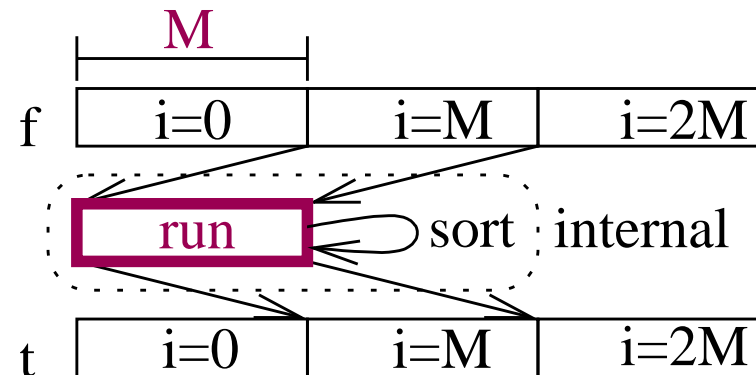
$$\leq 3 + 2 \frac{|a| + |b|}{B} \approx 2 \frac{|a| + |b|}{B}$$

Bedingung: Wir brauchen 3 Pufferblöcke, d.h.,  $M > 3B$ .



# Run Formation

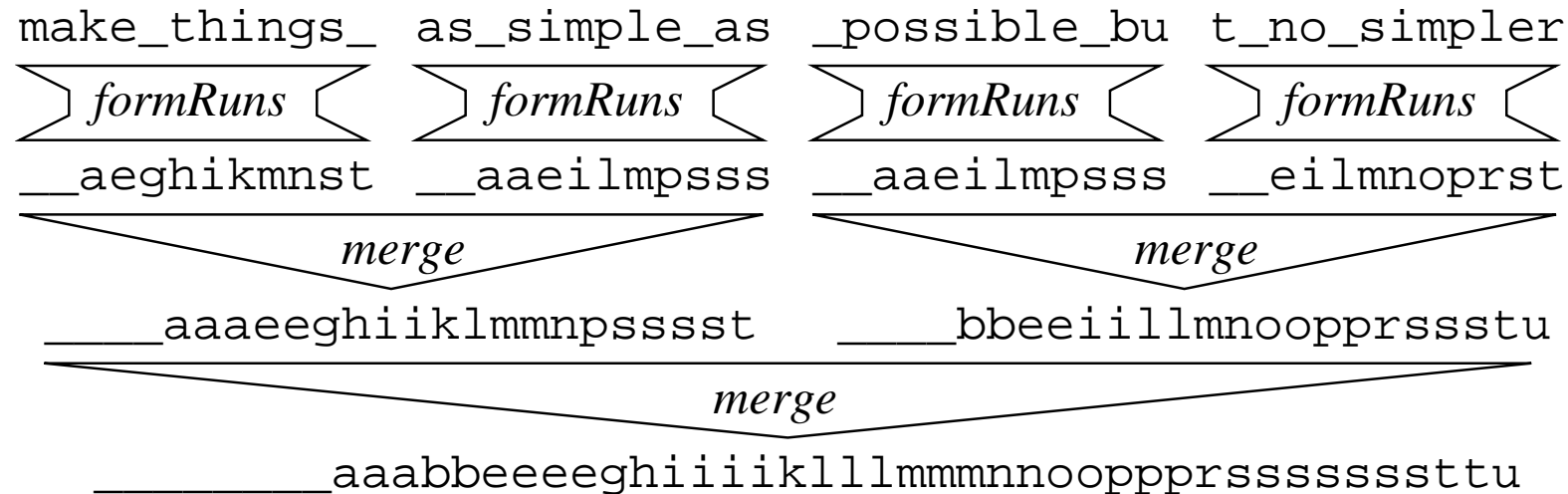
Sortiere Eingabeportionen der Größe  $M$



$$I/Os: \approx 2 \frac{n}{B}$$



# Sortieren durch Externes Binäres Mischen



**Procedure** externalBinaryMergeSort // I/Os:  $\approx$

run formation //  $2n/B$

**while** more than one run left **do** //  $\lceil \log \frac{n}{M} \rceil \times$

    merge pairs of runs //  $2n/B$

output remaining run //  $\Sigma : 2 \frac{n}{B} \left( 1 + \lceil \log \frac{n}{M} \rceil \right)$

## Zahlenbeispiel: PC 2018

$$n = 2^{40} \text{ Byte}$$

$$M = 2^{34} \text{ Byte}$$

$$B = 2^{22} \text{ Byte}$$

I/O braucht  $2^{-4}$  s

$$\text{Zeit: } 2 \frac{n}{B} \left( 1 + \left\lceil \log \frac{n}{M} \right\rceil \right) = 2 \cdot 2^{17} \cdot (1 + 6) \cdot 2^{-4} \text{ s} = 2^{16} \text{ s} \approx 32 \text{ h}$$

Idee: 7 Durchläufe  $\rightsquigarrow$  2 Durchläufe

# Mehrwegemischen

**Procedure** multiwayMerge( $a_1, \dots, a_k, c$  :File of Element)

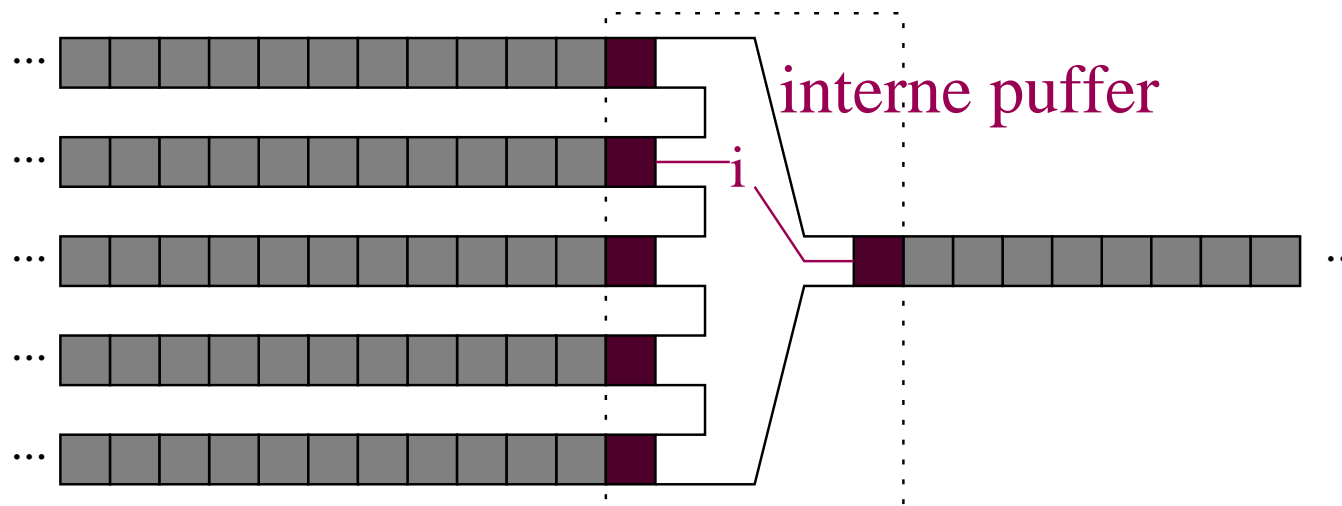
**for**  $i := 1$  **to**  $k$  **do**  $x_i := a_i.readElement$

**for**  $j := 1$  **to**  $\sum_{i=1}^k |a_i|$  **do**

    find  $i \in 1..k$  that minimizes  $x_i$    // no I/Os!,  $O(\log k)$  time

$c.writeElement(x_i)$

$x_i := a_i.readElement$



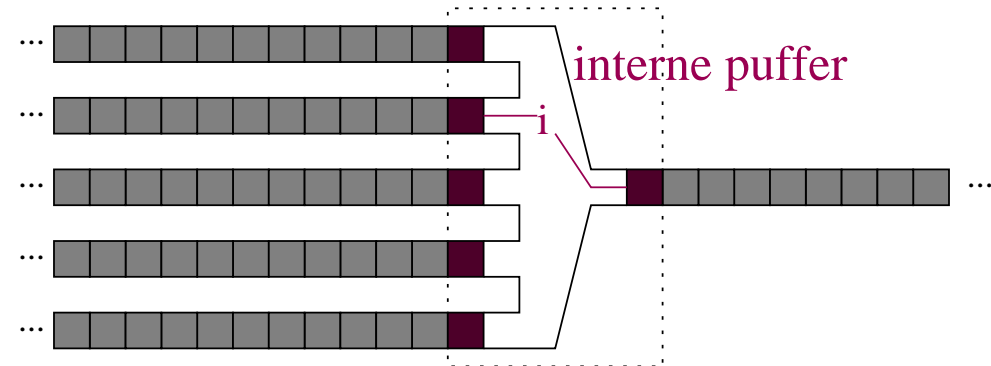
# Mehrwegemischen – Analyse

**I/Os:** Datei  $a_i$  lesen:  $\approx |a_i|/B$ .

Datei  $c$  schreiben:  $\approx \sum_{i=1}^k |a_i|/B$

Insgesamt:

$$\leq \approx 2 \frac{\sum_{i=1}^k |a_i|}{B}$$



Bedingung: Wir brauchen  $k + 1$  Pufferblöcke, d.h.,  $k + 1 < M/B$

(im Folgenden vereinfacht zu  $k < M/B$ )

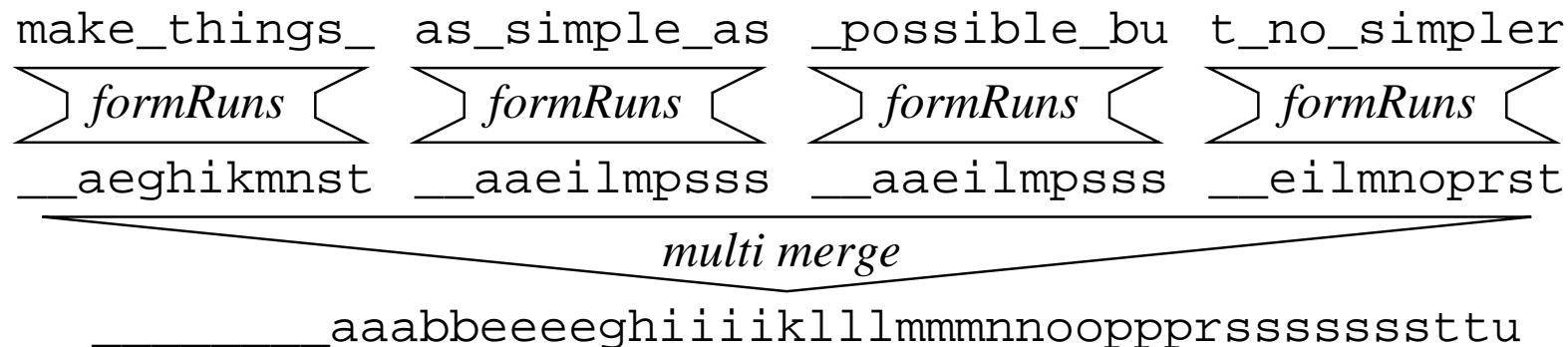
**Interne Arbeit:** (benutze Prioritätsliste !)

$$O\left(\log k \sum_{i=1}^k |a_i|\right)$$

# Sortieren durch Mehrwege-Mischen

- Sortiere  $\lceil n/M \rceil$  runs mit je  $M$  Elementen  $2n/B$  I/Os
- Mische jeweils  $M/B$  runs  $2n/B$  I/Os
- bis nur noch ein run übrig ist  $\times \left\lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \right\rceil$  Mischphasen

Insgesamt  $\text{sort}(n) := \frac{2n}{B} \left( 1 + \left\lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \right\rceil \right)$  I/Os



# Sortieren durch Mehrwege-Mischen

## Interne Arbeit:

$$O \left( \underbrace{n \log M}_{\text{run formation}} + \underbrace{n \log \frac{M}{B}}_{\text{PQ access per phase}} \overbrace{\left\lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \right\rceil}^{\text{phases}} \right) = O(n \log n)$$

## Mehr als eine Mischphase?:

Nicht für Hierarchie Hauptspeicher, Festplatte.

$$\text{Grund } \frac{\overbrace{M}^{>1000}}{B} > \frac{\overbrace{\text{RAM Euro/bit}}{\approx 300}}{\text{Platte Euro/bit}}$$

## Mehr zu externem Sortieren

Untere Schranke  $\approx \frac{2^{(?)n}}{B} \left( 1 + \left\lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \right\rceil \right)$  I/Os

[Aggarwal Vitter 1988]

Obere Schranke  $\approx \frac{2n}{DB} \left( 1 + \left\lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \right\rceil \right)$  I/Os (erwartet)  
für  $D$  parallele Platten

[Hutchinson Sanders Vitter 2005, Dementiev Sanders 2003]

Offene Frage: deterministisch?

## Externe Prioritätslisten

Problem: Binary heaps brauchen

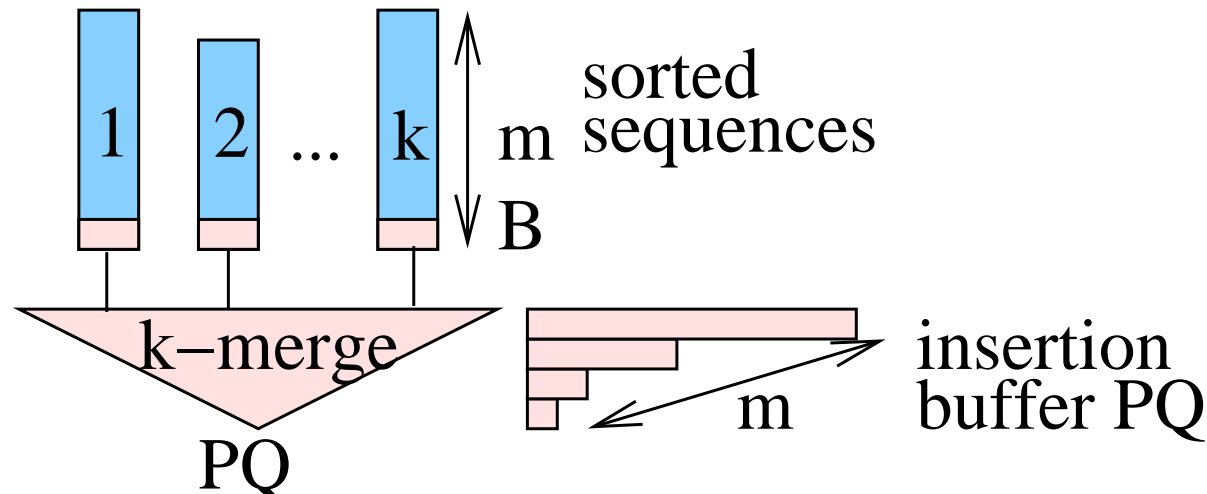
$$\Theta\left(\log \frac{n}{M}\right) \text{ I/Os pro deleteMin}$$

Wir hätten gerne:

$$\Theta\left(\frac{1}{B} \log_{M/B} \frac{n}{M}\right) \text{ I/Os amortisiert}$$



# Mittelgroße PQs – $km \ll M^2 / B$ Einfügungen



**Insert:** Anfangs in **insertion buffer**.

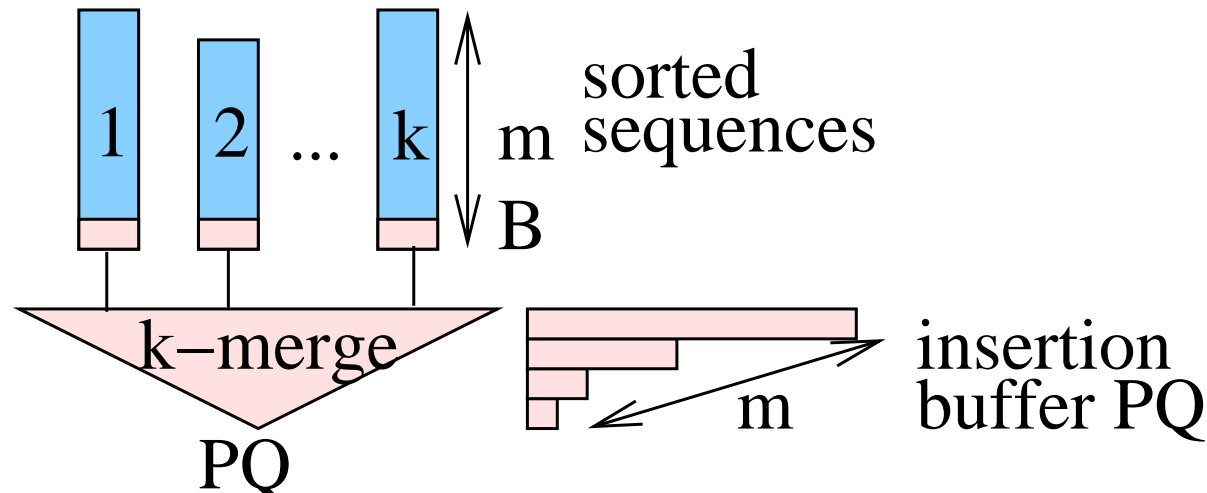
Überlauf  $\longrightarrow$

sort; flush; kleinster Schlüssel in merge-PQ

**Delete-Min:** deleteMin aus der PQ mit kleinerem min

# Analyse – I/Os

deleteMin: jedes Element wird  $\leq 1 \times$  gelesen, zusammen mit  $B$  anderen – **amortisiert**  $1/B$  penalty für insert.



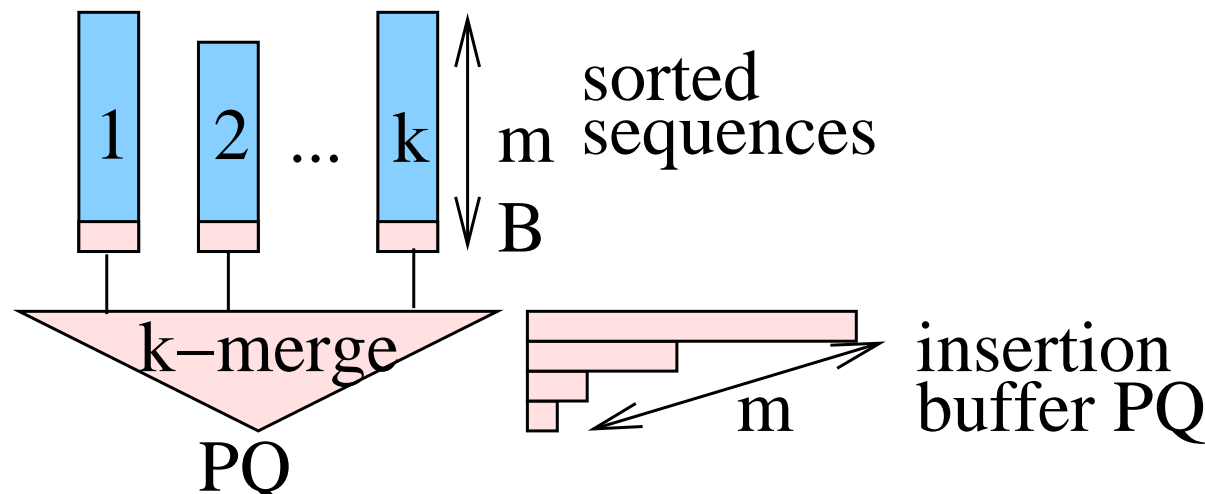
# Analyse – Vergleiche (Maß für interne Arbeit)

deleteMin:  $1 + O(\max(\log k, \log m)) = O(\log m)$

genauere Argumentation: amortisiert  $1 + \log k$  bei geeigneter PQ

insert:  $\approx m \log m$  alle  $m$  Ops. Amortisiert  $\log m$

Insgesamt nur  $\log km$  amortisiert !



# Große Queues

$$\approx \frac{2n}{B} \left( 1 + \left\lceil \log_{M/B} \frac{n}{M} \right\rceil \right)$$

I/Os für  $n$  Einfügeoperationen

$O(n \log n)$  Arbeit.

[Sanders 1999].

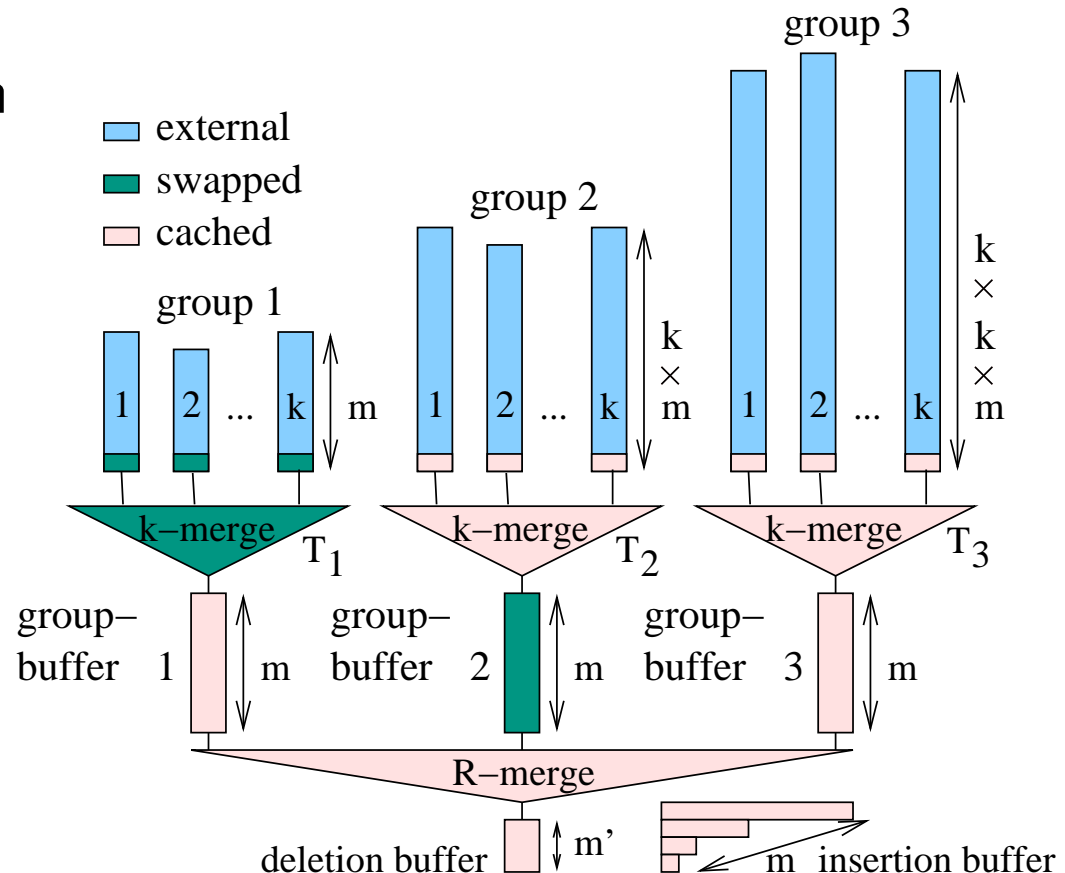
deleteMin:

“amortisiert umsonst”.

Details:

Vorlesung

Algorithm Engineering.



# Experiments

Keys: random 32 bit integers

Associated information: 32 dummy bits

Deletion buffer size: 32

Near optimal

Group buffer size: 256

: performance on

Merging degree  $k$ : 128

all machines tried!

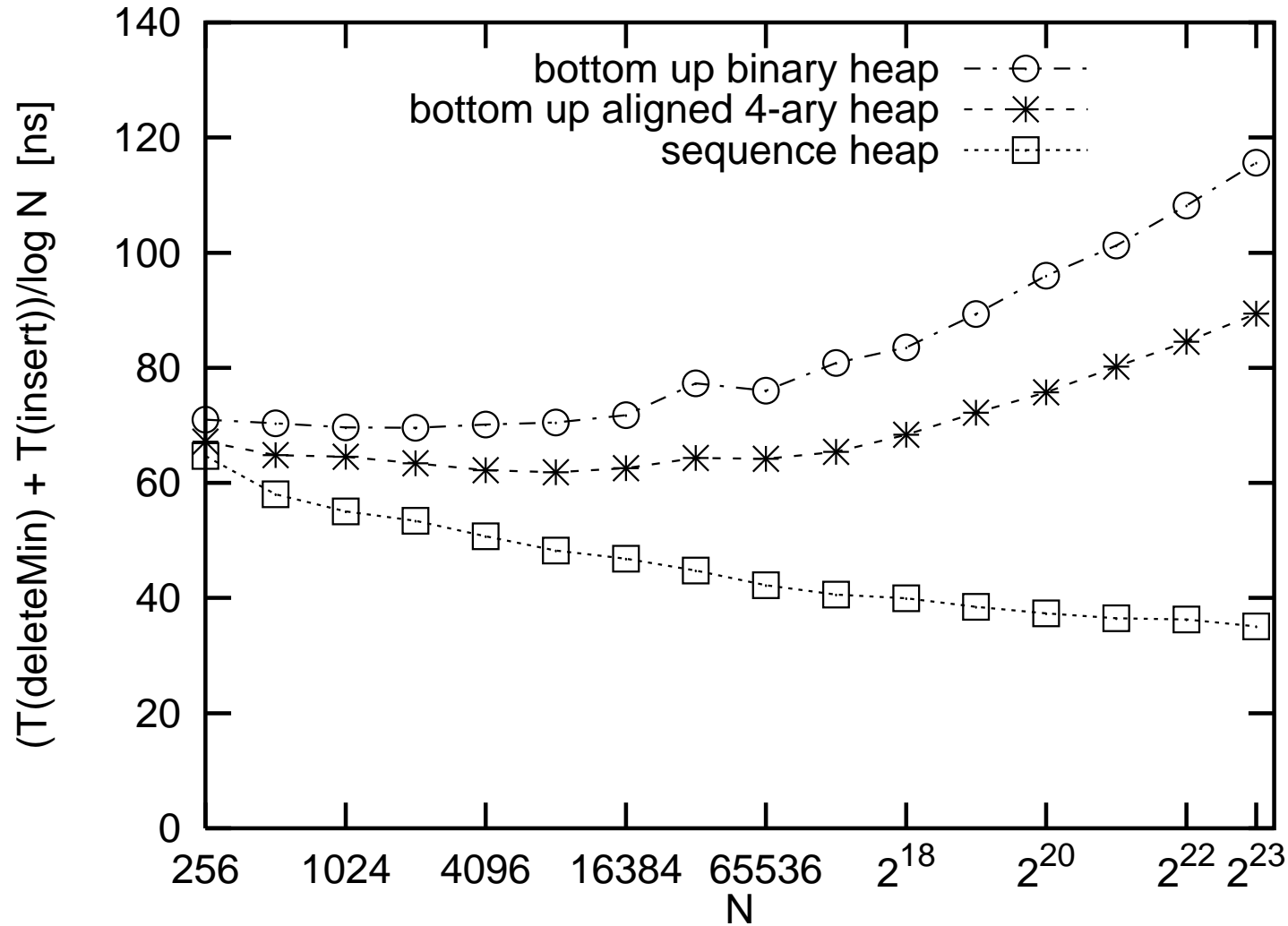
Compiler flags: Highly optimizing, nothing advanced

Operation Sequence:

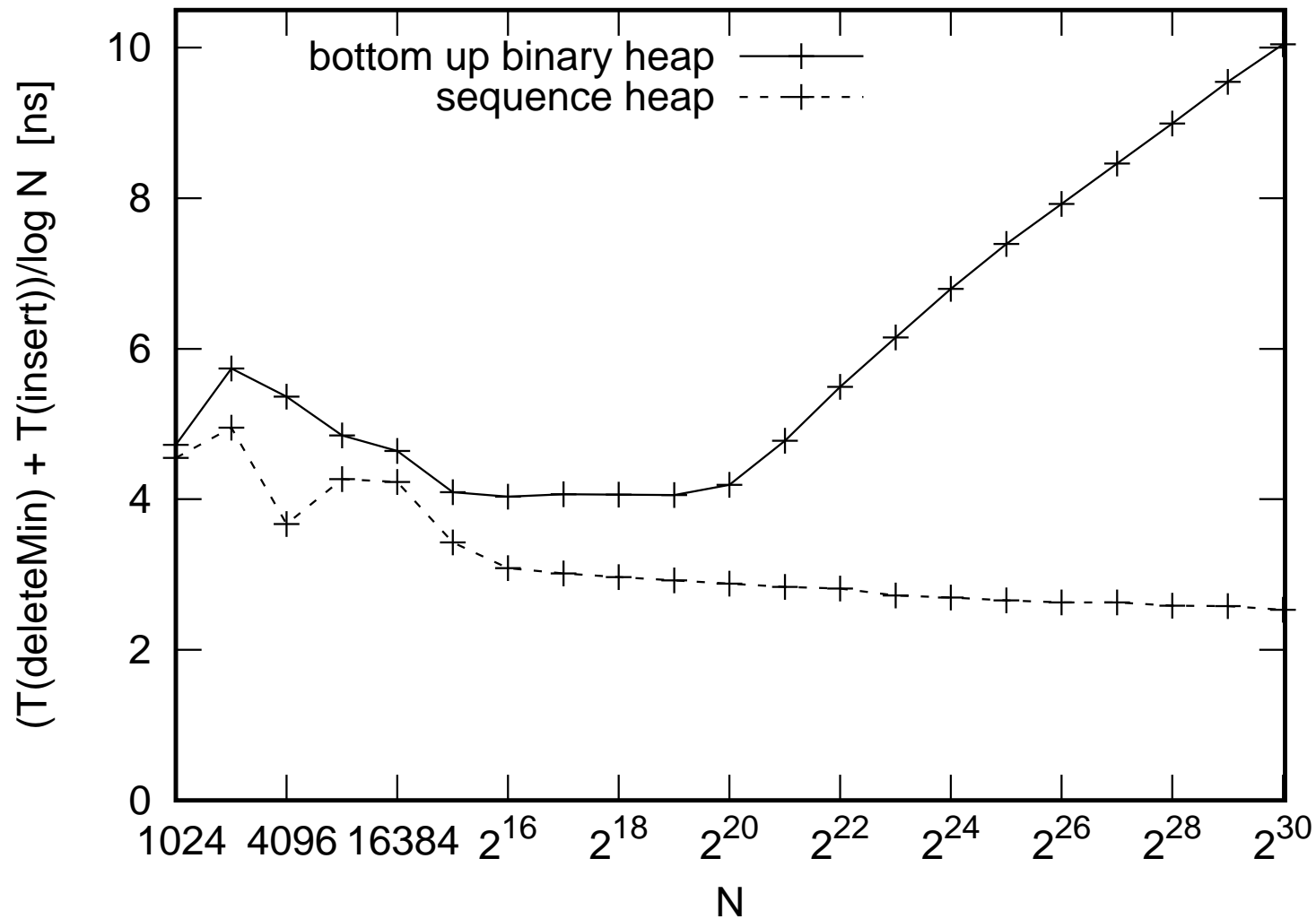
$(\text{Insert-DeleteMin-Insert})^N (\text{DeleteMin-Insert-DeleteMin})^N$

Near optimal performance on all machines tried!

# Alpha-21164, 533 MHz, 1997



# AMD Ryzen 1800X, 16MB L3, 3.6 GHz, 2017



# Minimale Spannbäume

## Semiexterner Kruskal

Annahme:  $M = \Omega(n)$  konstant viele Maschinenworte pro Knoten

**Procedure** seKruskal( $G = (1..n, E)$ )

sort  $E$  by decreasing weight // sort( $m$ ) I/Os

Tc : UnionFind( $n$ )

**foreach**  $(u, v) \in E$  in ascending order of weight **do**

**if** Tc.find( $u$ )  $\neq$  Tc.find( $v$ ) **then**

        output  $\{u, v\}$

        Tc.union( $u, v$ ) // link reicht auch



## Externe MST-Berechnung

- Reduziere Knotenzahl mittels **Kontraktion** von MST-Kanten

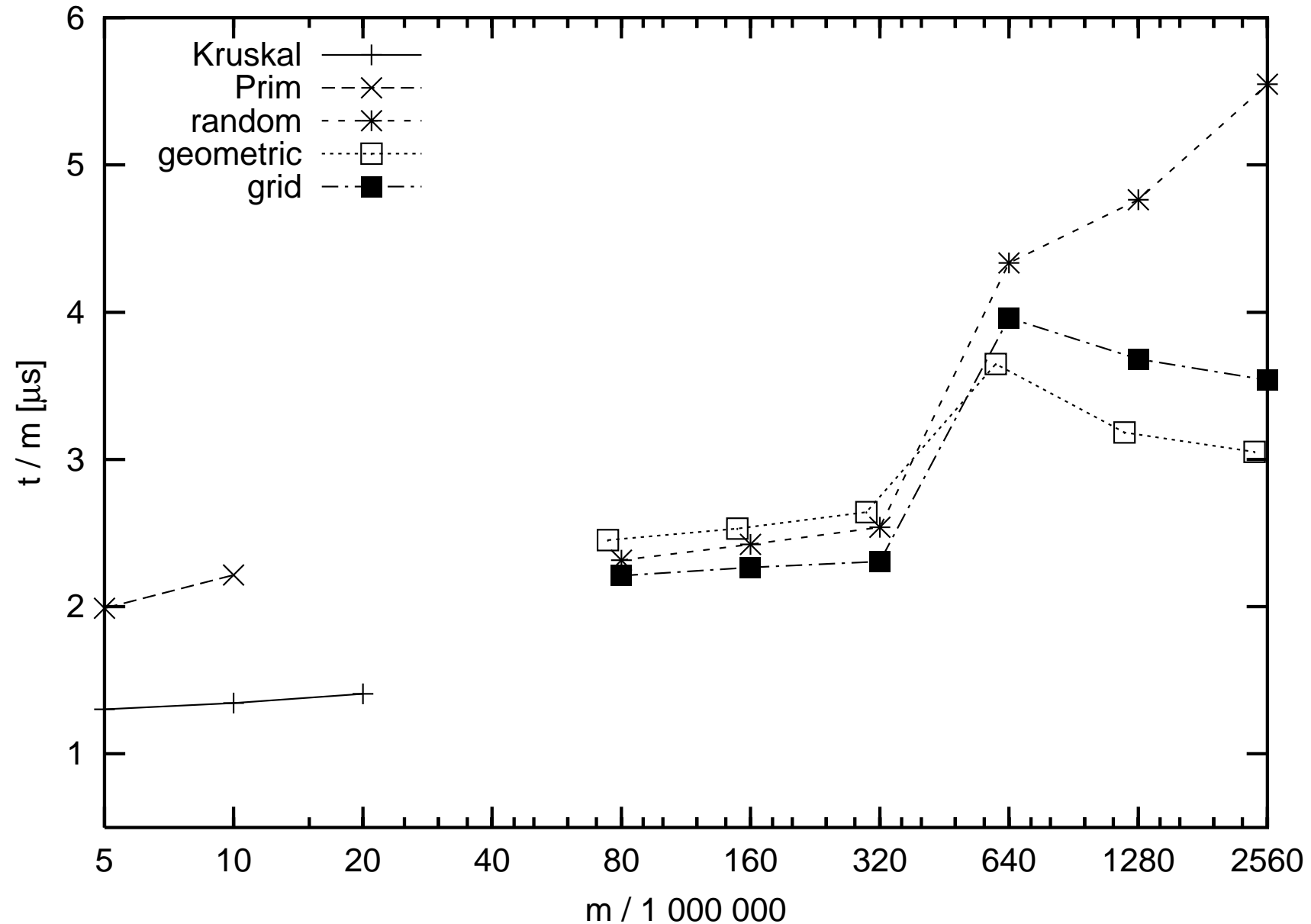
Details: Vorlesung Algorithm Engineering, Sibeyn's Algorithmus.

Implementierung  $\approx$  Sortierer + ext. Prioritätsliste + 1

Bildschirmseite. (STXXL Bibliothek)

- benutze semiexternen Algorithmus sobald  $n < M$ .

# Beispiel, Sibeyn's algorithm, $m \approx 2n$



## Mehr zu externen Algorithmen – Basic Toolbox ?

Externe Hashtabellen: geht aber 1 I/O pro Zugriff

Suchbäume:  $(a, 2a)$ -Bäume mit  $a = \Theta(B) \rightsquigarrow \log_B n$  I/Os für  
Basisoperationen. Brot-und-Butter-Datenstruktur für Datenbanken.  
Inzwischen auch in Dateisystemen. Viel Tuning: Große Blätter,  
Caching, ....

BFS: OK bei kleinem Graphdurchmesser

DFS: noch schwieriger. Heuristiken für den **semiexternen** Fall

kürzeste Wege: ähnlich BFS.