Karlsruher Institut für Technologie

Burrows Wheeler Transformation – Algorithmen II

Timo Bingmann, Simon Gog

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS18.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

Burrows-Wheeler-Transformation

Einführung

Burrows, Wheeler (1983, 1994)

- "nur" eine Umordnung des Textes,
  $\rightarrow$ gruppiert Zeichen mit ähnlichem Kontext, reversibel
- ursprünglich eingeführt zur Textkompression
  $\rightarrow$ Teilschritt von bzip2
- später auch für Textindizierung verwendet
  $\rightarrow$ z.B. Rückwärtssuche, Berechnung des LCP-Array

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \end{array}$$

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
								g	$	8
							n	g	$	7
						g	n	g	$	6
					n	g	n	g	$	5
				a	n	g	n	g	$	4
			l	a	n	g	n	g	$	3
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Burrows-Wheeler-Transformation

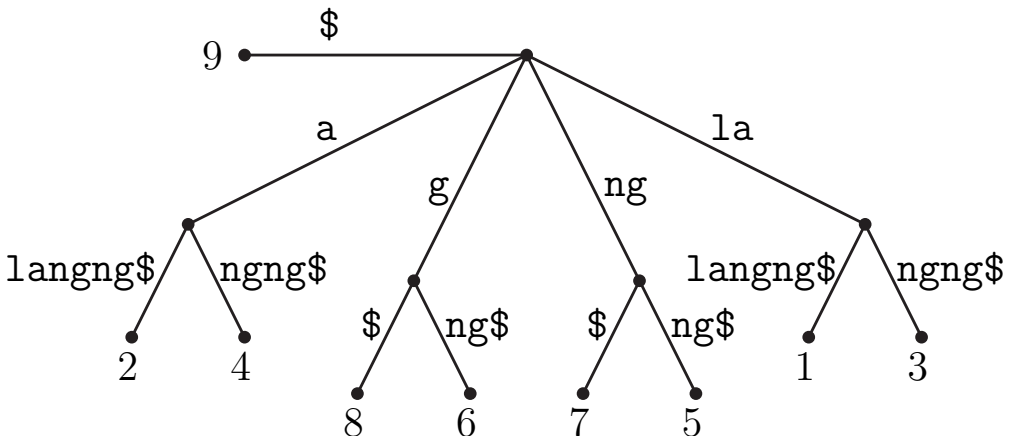
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



Burrows-Wheeler-Transformation

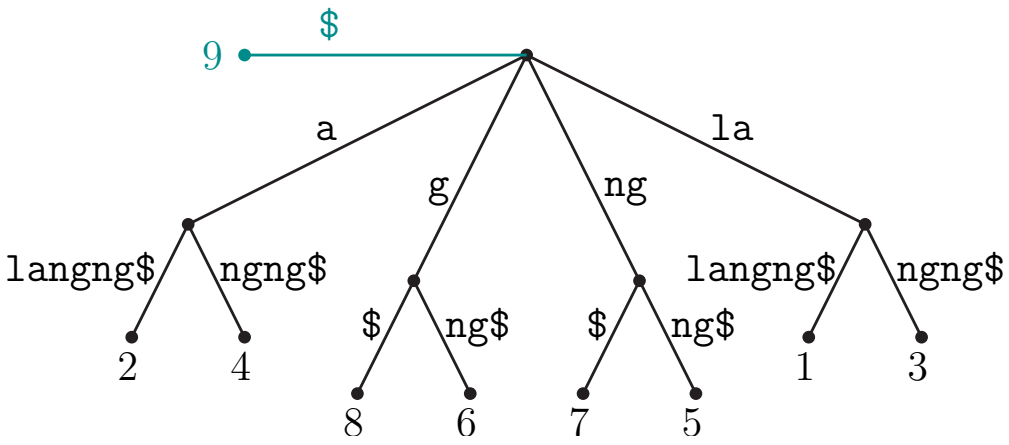
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



Burrows-Wheeler-Transformation

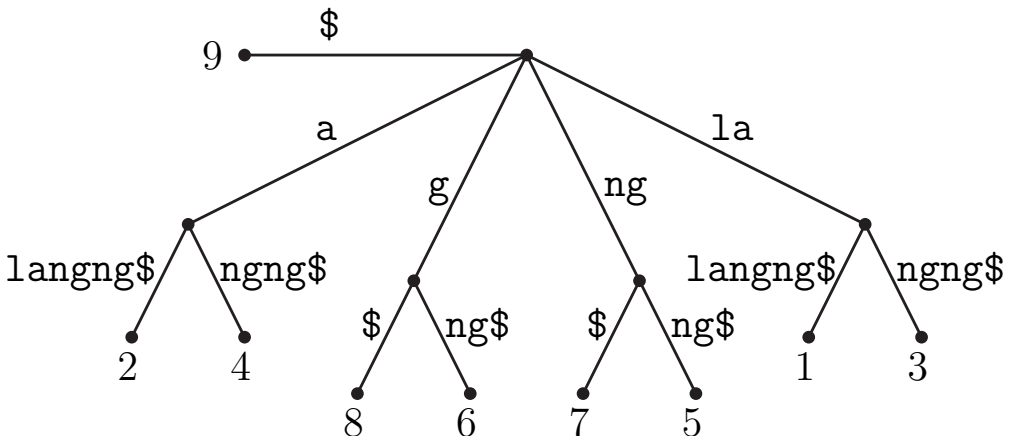
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



Burrows-Wheeler-Transformation

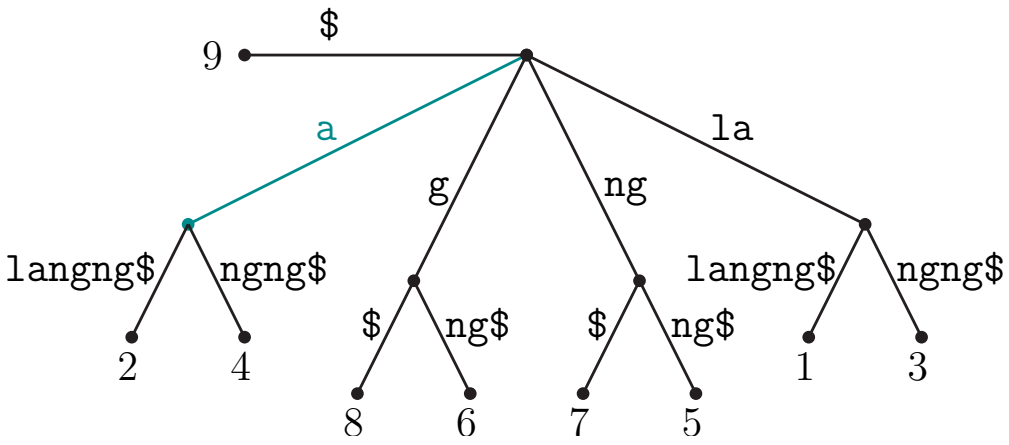
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
				a	l	a	n	g	$	2
					a	n	g	n	g	$ 4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



Burrows-Wheeler-Transformation

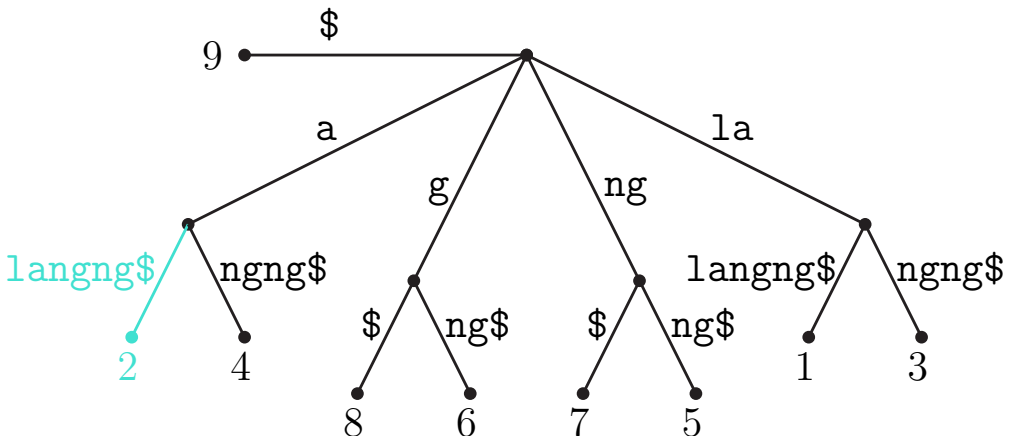
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



Burrows-Wheeler-Transformation

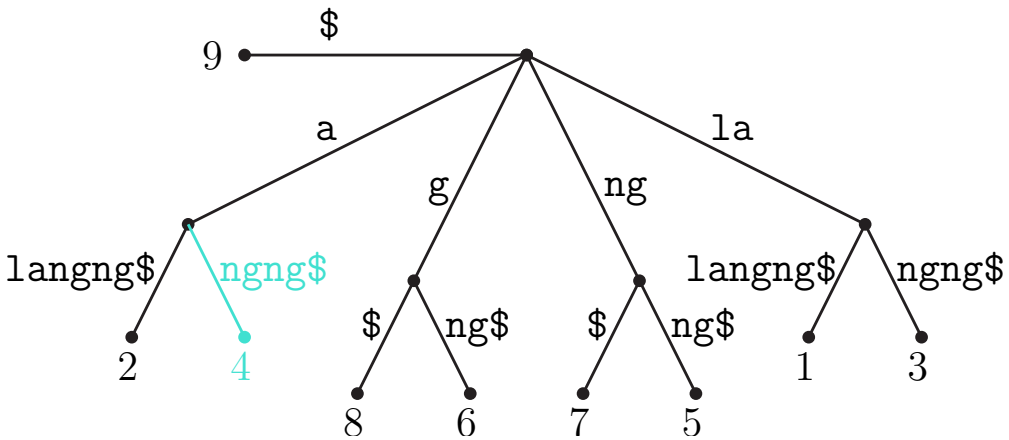
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
				a	l	a	n	g	n	g	$	2
					a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \triangleq$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



Burrows-Wheeler-Transformation

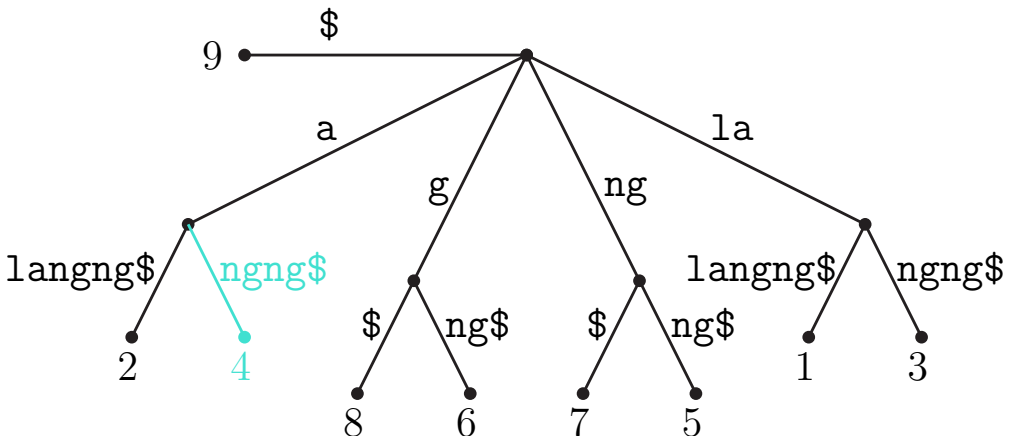
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  $\rightarrow$ schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	SA
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
				a	l	a	n	g	n	g	$	2
					a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \triangleq$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



USW.

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l
	l	a	n	g	n	g	$	l	a

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ \\
 & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} \\
 & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\
 & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l}
\end{array}
$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ \\
 & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} \\
 & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\
 & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} \\
 & & & & & \vdots & & & &
\end{array}
$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l
	l	a	n	g	n	g	$	l	a
	a	n	g	n	g	$	l	a	l
	n	g	n	g	$	l	a	l	a
	g	n	g	$	l	a	l	a	n
	n	g	$	l	a	l	a	n	g
	g	$	l	a	l	a	n	g	n
	$	l	a	l	a	n	g	n	g

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	$\leftarrow T^{(1)}$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l	
	l	a	n	g	n	g	$	l	a	
	a	n	g	n	g	$	l	a	l	
	n	g	n	g	$	l	a	l	a	
	g	n	g	$	l	a	l	a	n	$\leftarrow T^{(6)}$
	n	g	$	l	a	l	a	n	g	
	g	$	l	a	l	a	n	g	n	
	$	l	a	l	a	n	g	n	g	$\leftarrow T^{(n)}$

- $T^{(i)} \mathrel{\hat{=}} T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9									
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	$\leftarrow T^{(1)}$		$	l	a	l	a	n	g	n	g
	a	l	a	n	g	n	g	$	l			a	l	a	n	g	n	g	$	l
	l	a	n	g	n	g	$	l	a			a	n	g	n	g	$	l	a	l
	a	n	g	n	g	$	l	a	l		sortiere Zeilen	g	$	l	a	l	a	n	g	n
	n	g	n	g	$	l	a	l	a			g	n	g	$	l	a	l	a	n
	g	n	g	$	l	a	l	a	n	$\leftarrow T^{(6)}$		l	a	l	a	n	g	n	g	$
	n	g	$	l	a	l	a	n	g			l	a	n	g	n	g	$	l	a
	g	$	l	a	l	a	n	g	n			n	g	$	l	a	l	a	n	g
	$	l	a	l	a	n	g	n	g	$\leftarrow T^{(n)}$		n	g	n	g	$	l	a	l	a

- $T^{(i)} \mathrel{\hat{=}} T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	$\leftarrow T^{(1)}$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l	
	l	a	n	g	n	g	$	l	a	
	a	n	g	n	g	$	l	a	l	
	n	g	n	g	$	l	a	l	a	
	g	n	g	$	l	a	l	a	n	$\leftarrow T^{(6)}$
	n	g	$	l	a	l	a	n	g	
	g	$	l	a	l	a	n	g	n	
	$	l	a	l	a	n	g	n	g	$\leftarrow T^{(n)}$

sortiere Zeilen

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

T^{BWT}

- $T^{(i)} \hat{=} T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$
- $T = \texttt{lalangng\$} \quad \rightarrow \quad T^{BWT} = \texttt{gllnn\$aga}$

$\mathcal{O}(n^2 + n \log n)$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	$\leftarrow T^{(1)}$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l	
	l	a	n	g	n	g	$	l	a	
	a	n	g	n	g	$	l	a	l	
	n	g	n	g	$	l	a	l	a	
	g	n	g	$	l	a	l	a	n	$\leftarrow T^{(6)}$
	n	g	$	l	a	l	a	n	g	
	g	$	l	a	l	a	n	g	n	
	$	l	a	l	a	n	g	n	g	$\leftarrow T^{(n)}$

sortiere Zeilen

$	l	a	l	a	n	g	n	g	$\leftarrow T^{(n)}$
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
a	n	g	n	g	$	l	a	l	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
n	g	$	l	a	l	a	n	g	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	

F $\qquad$ $T^{BWT} = L$

- $T^{(i)} \hat{=} T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$
- $T = \texttt{lalangng\$} \quad \rightarrow \quad T^{BWT} = \texttt{gllnn\$aga}$ $\qquad \mathcal{O}(n^2 + n \log n)$

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

										SA
$	l	a	l	a	n	g	n	g	1	9
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3	4
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4	8
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5	6
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6	1
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7	3
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8	7
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9	5

$T^{BWT} = L$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T
- $T^{BWT}[i] = L[i] = T[SA[i] - 1] = T^{(SA[i])}[n]$
  ($T^{BWT}[i]$ ist das Zeichen vor dem i-ten Suffix in T)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

$T^{(n)}$

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

$T^{(n)}$

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

$	l	a	l	a	n	g	n	g	← $T^{(n)}$
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
a	n	g	n	g	$	l	a	l	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
n	g	$	l	a	l	a	n	g	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	
F								$T^{BWT} = L$	

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

$T^{(n)}$

F

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

							L	F	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	← $T^{(1)}$
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	
$	l	a	l	a	n	g	n	g	
n	g	$	l	a	l	a	n	g	
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
a	n	g	n	g	$	l	a	l	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
g	n	g	$	l	a	l	a	n	

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

a	n	g	n	g	$	l	a	l	← $T^{(4)}$
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	
n	g	$	l	a	l	a	n	g	
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
$	l	a	l	a	n	g	n	g	
				L	F				

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

	L	F							
n	g	$	l	a	l	a	n	g	← $T^{(7)}$
$	l	a	l	a	n	g	n	g	
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
a	n	g	n	g	$	l	a	l	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	
l	a	n	g	n	g	$	l	a	

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

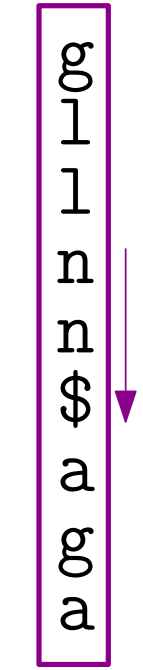
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert



T^{BWT}

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

$
a
a
g
g
l
l
n
n

F

sortiert nach letzter Spalte

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

T^{BWT}	F
g	$
l	a
l	a
n	g
n	g
$	l
a	l
g	n
a	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

F	sortiert nach vorletzter Spalte
$	l
a	l
a	n
g	$
g	n
l	a
l	a
n	g
n	g

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

T^{BWT}	F	
g	$	l
l	a	l
l	a	n
n	g	$
n	g	n
$	l	a
a	l	a
g	n	g
a	n	g

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

$$\begin{array}{ccc} \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\ \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\ \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} \\ \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} \\ \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} \\ \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} \\ \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \\ \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \\ \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} \end{array}$$

F

sortiert nach drittletzter Spalte

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

T^{BWT}	F		
g	$	l	a
l	a	l	a
l	a	n	g
n	g	$	l
n	g	n	g
$	l	a	l
a	l	a	n
g	n	g	$
a	n	g	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

$$\cdots \quad \begin{array}{cccc} \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\ \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\ \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} \\ \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} \\ \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} \\ \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} \\ \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \\ \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \\ \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} \end{array}$$

T^{BWT} F

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

$	l	a	l	a	n	g	n	g ← $T^{(n)}$
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

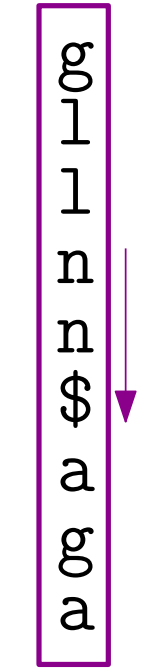
- $T^{BWT} = \texttt{gllnn\$aga} \quad \rightarrow \quad T = \texttt{lalangng\$}$ $\qquad \mathcal{O}(n^2 \log n)$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$	———	———	———	———	?	———	———	———	———

- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)



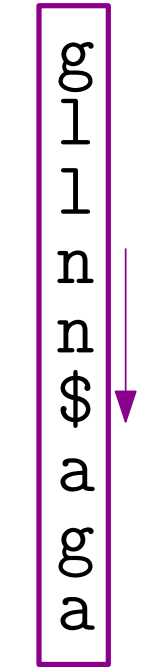
T^{BWT}

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$									$

- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)



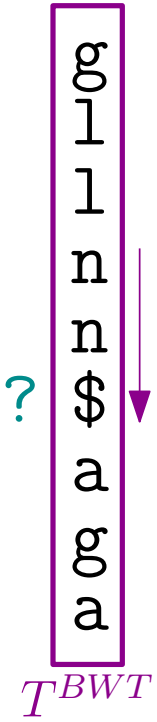
T^{BWT}

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$

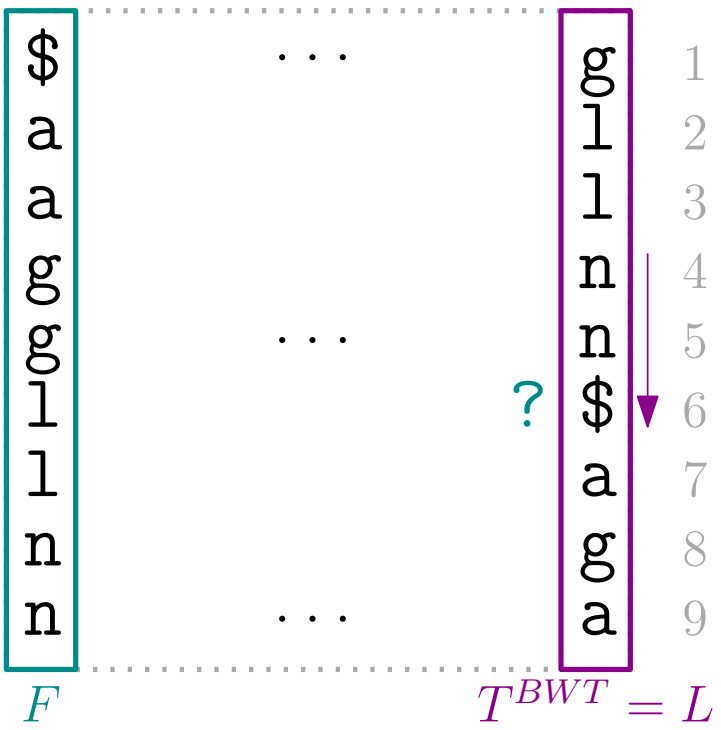
- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)



Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$



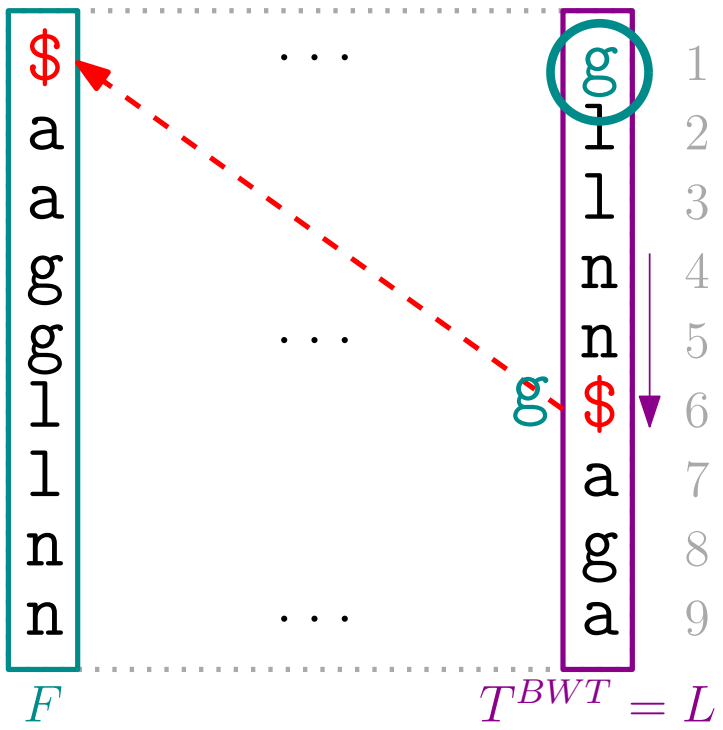
- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)

- $LF[6] = ?$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$



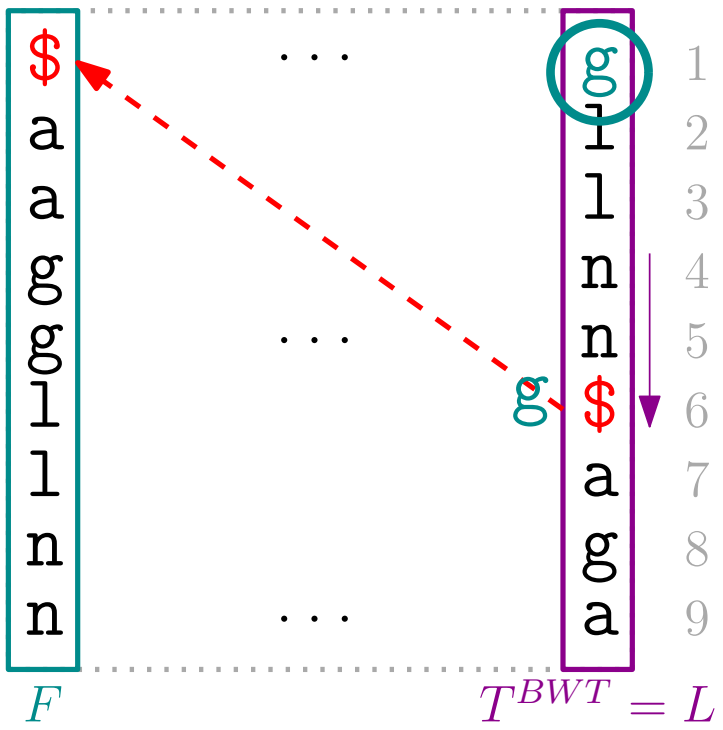
- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)

- $LF[6] = 1$
  ($LF[6]$ ist die Position in $F[\cdot]$ an der $L[6]$ steht)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$



- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)

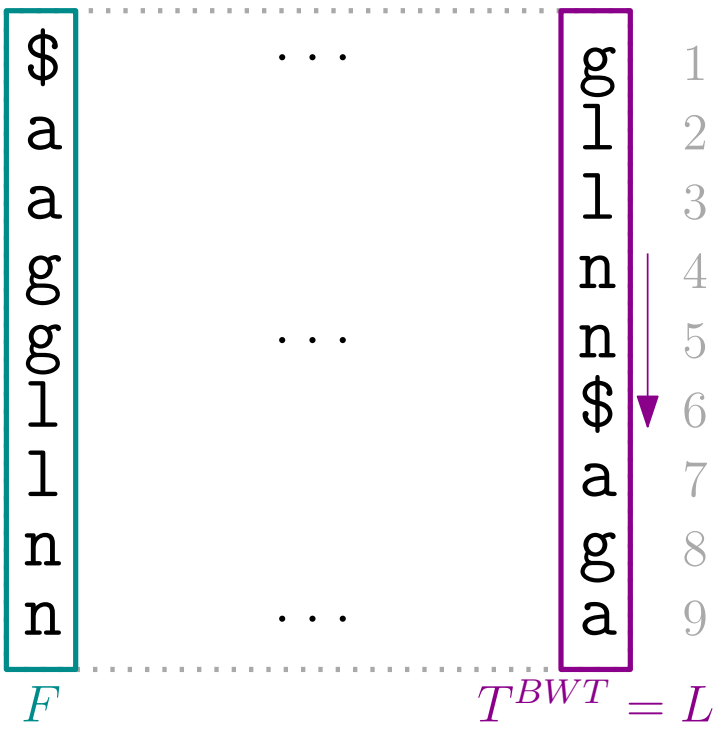
- $LF[i] = j \Leftrightarrow T^{(SA[j])} = (T^{(SA[i])})^{(n)} \Leftrightarrow SA[i] = SA[j] - 1 \pmod{n}$
  ($LF[i]$ ist die Position in $F[\cdot]$ an der $L[i]$ steht)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt
  - → gleiche Zeichen besitzen gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$
  - → falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$, dann $LF[i] < LF[j]$
- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)



Burrows-Wheeler-Transformation

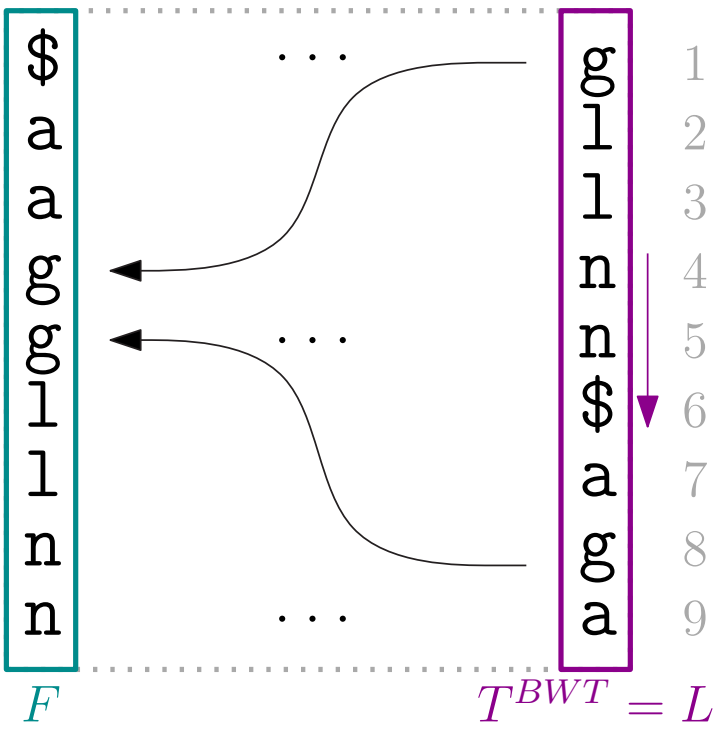
Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt

  $\rightarrow$ gleiche Zeichen besitzen gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$

  $\rightarrow$ falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$, dann $LF[i] < LF[j]$



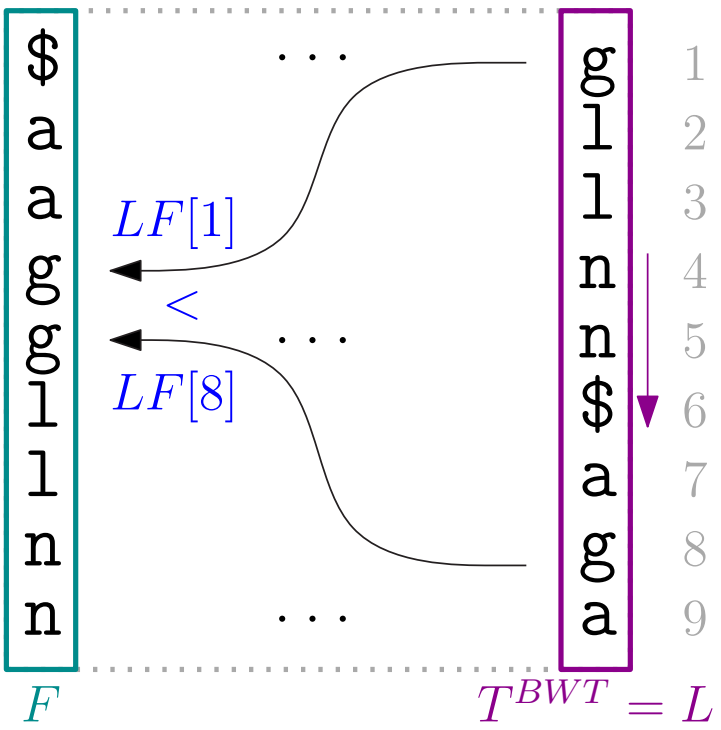
- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt
  - $\rightarrow$ gleiche Zeichen besitzen gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$
  - $\rightarrow$ falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$, dann $LF[i] < LF[j]$



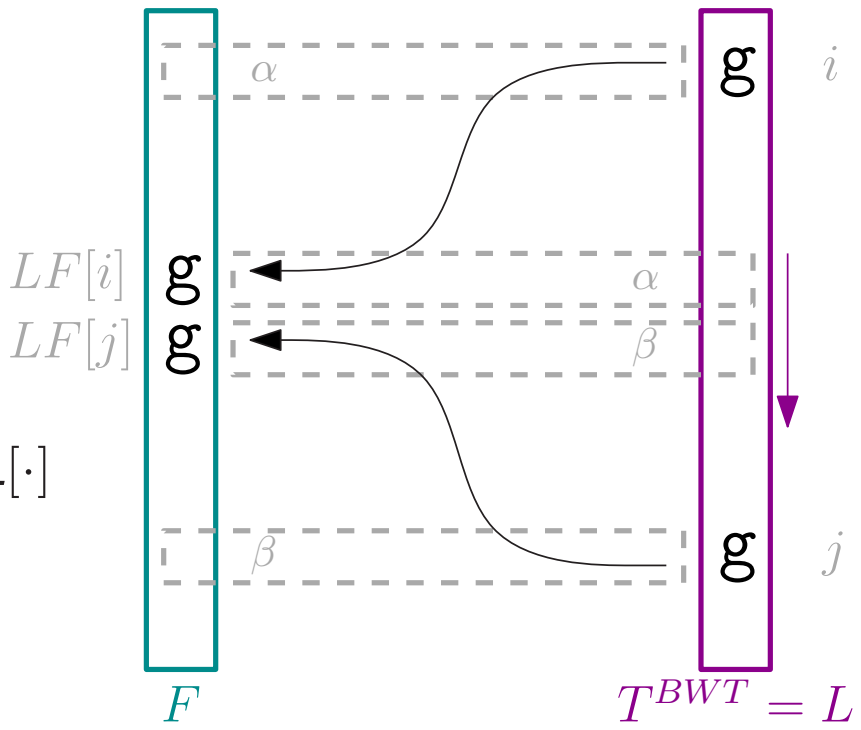
- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt
  - $\rightarrow$ gleiche Zeichen besitzen gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$
  - $\rightarrow$ falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$, dann $LF[i] < LF[j]$



- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)

Burrows-Wheeler-Transformation

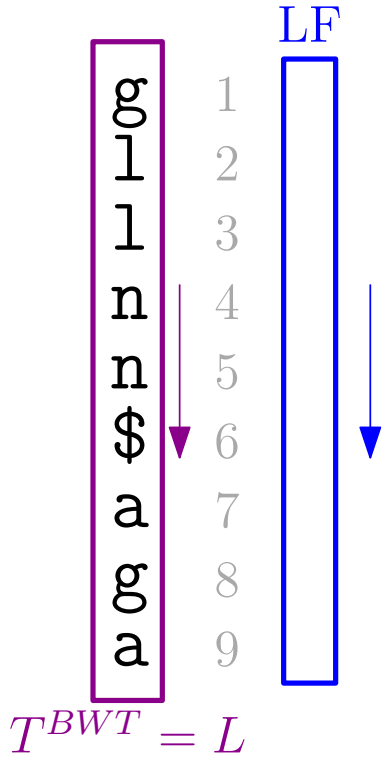
Berechnung von $LF[\cdot]$

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar

- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \quad = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

  ($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



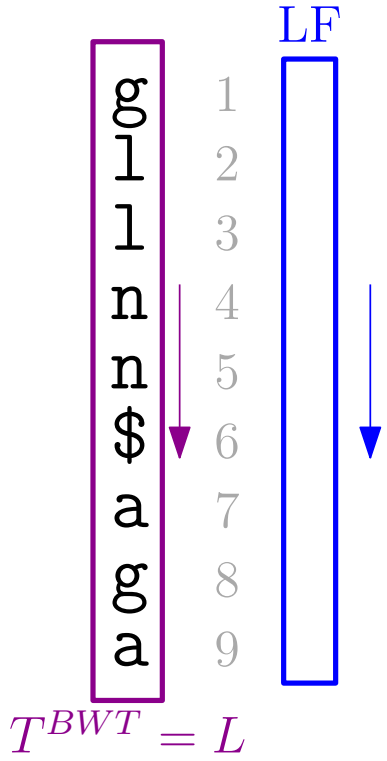
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \quad = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



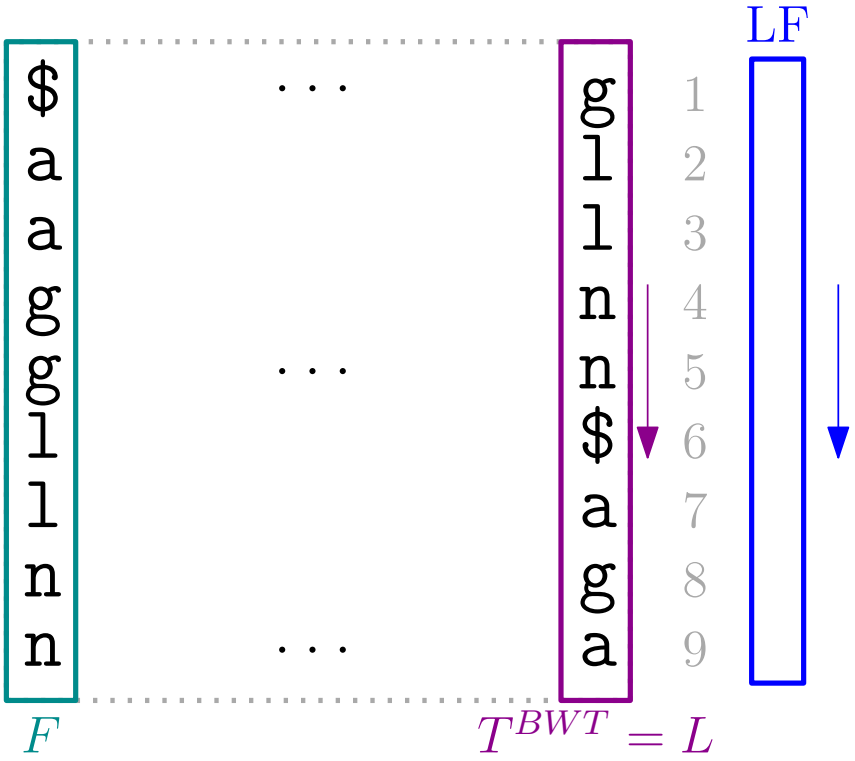
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \quad = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

  ($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



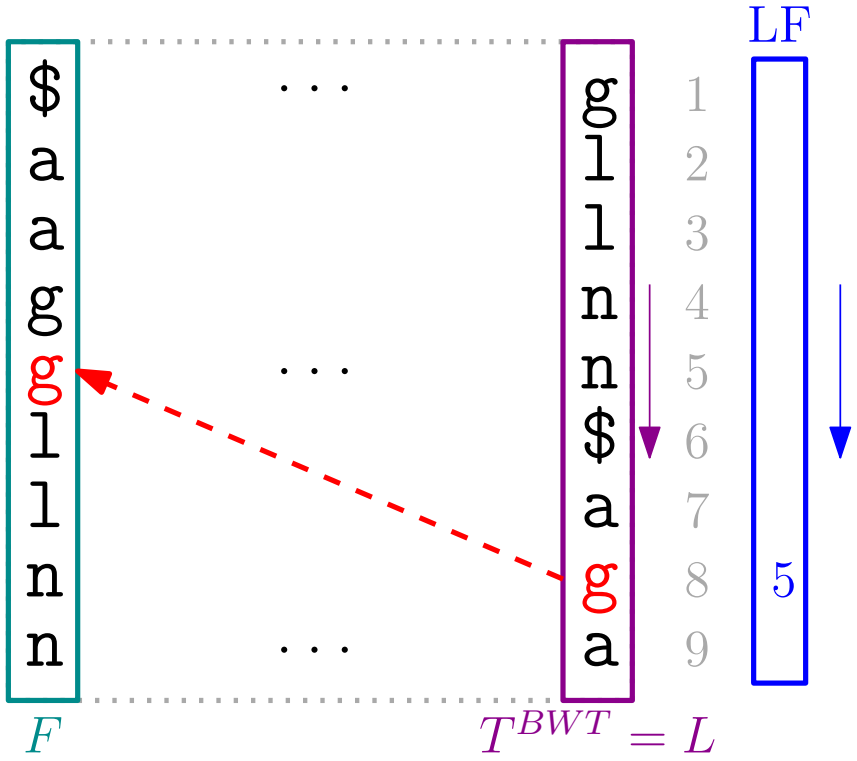
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \quad = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

  ($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



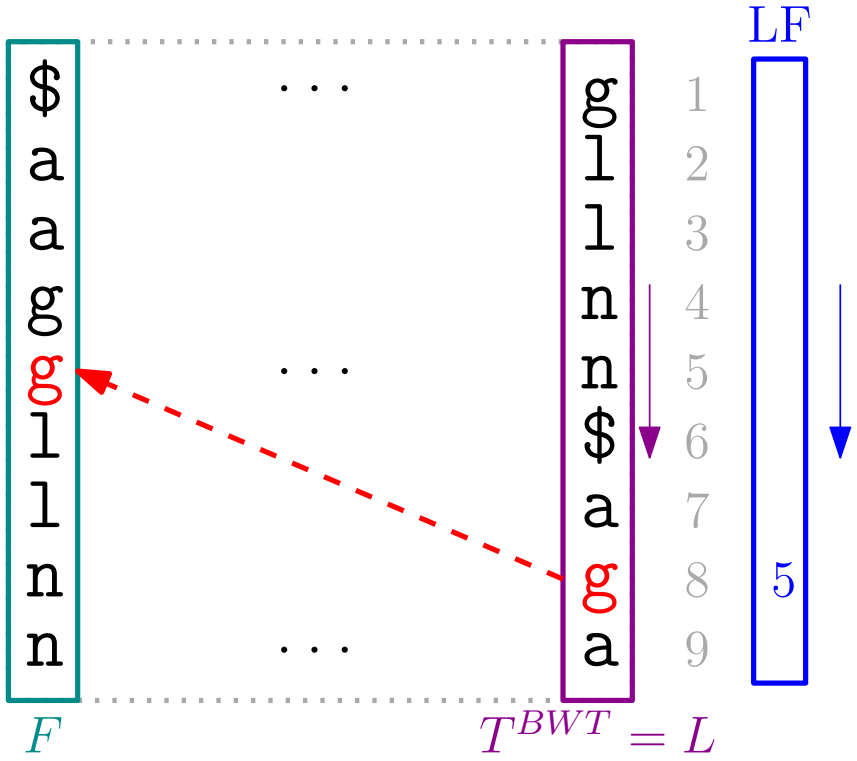
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\$}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \quad = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

  ($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



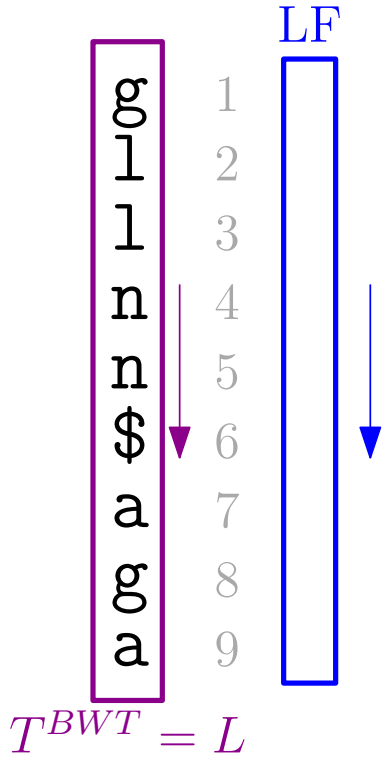
- $C(\cdot)$, $occ[\cdot]$ in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar $\rightarrow$ $LF[\cdot]$ auch in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$									

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	0	0	0	0	0



- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$									

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	0	0	0	0	0

		LF
g	1	
l	2	
l	3	
n	4	
n	5	
$	6	
a	7	
g	8	
a	9	

$T^{BWT} = L$

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$									

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	0	0	1	0	0

		LF
g	1	
l	2	
l	3	
n	4	
n	5	
$	6	
a	7	
g	8	
a	9	

$T^{BWT} = L$

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1								

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	0	0	1	0	0

		LF
g	1	
l	2	
l	3	
n	4	
n	5	
$	6	
a	7	
g	8	
a	9	

$T^{BWT} = L$

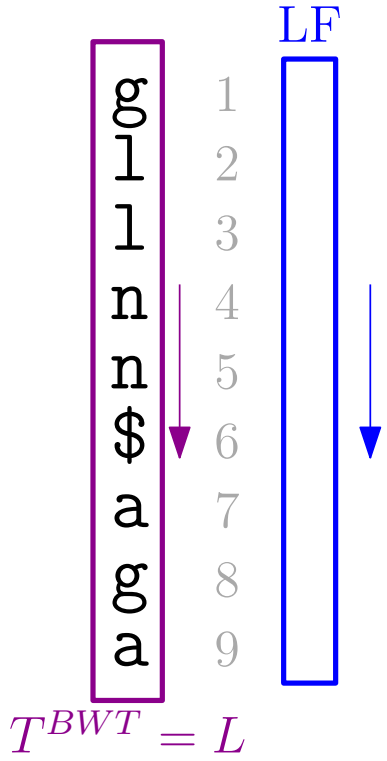
- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1	1							

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	0	0	1	1	0



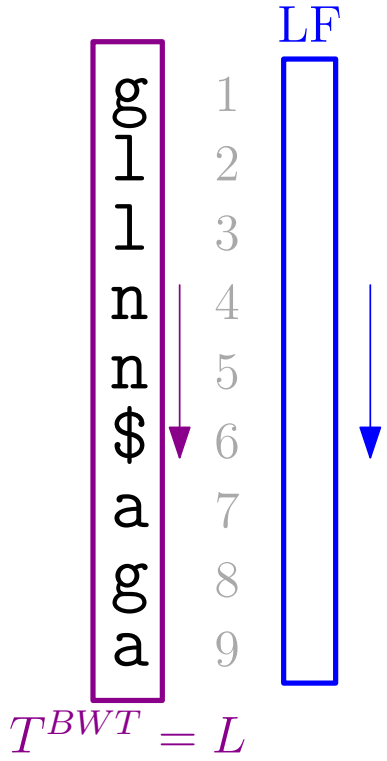
- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1	1	2						

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	0	0	1	2	0



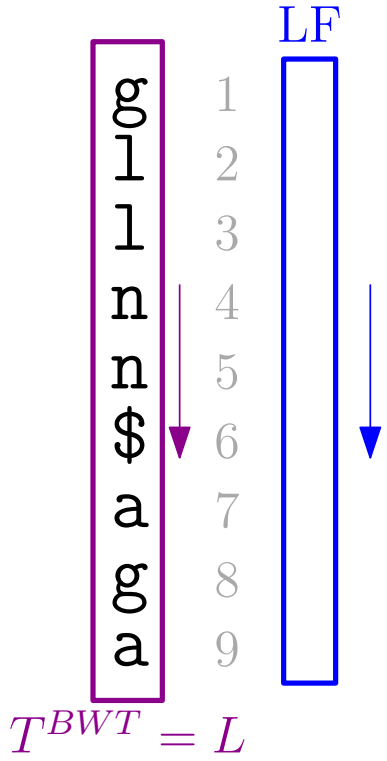
- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1	1	2	...					

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	0	0	1	2	0



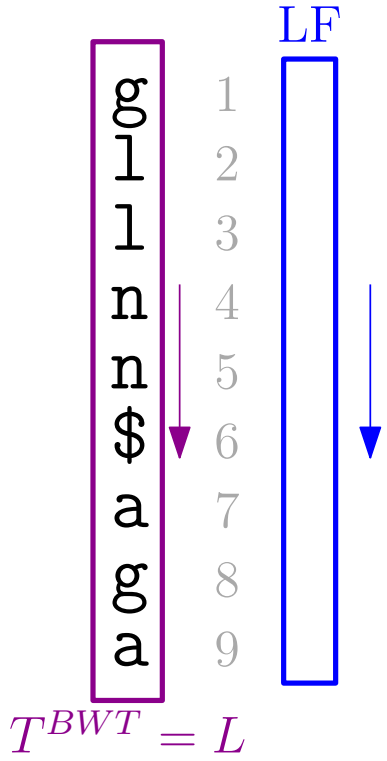
- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1	1	2	1	2	1	1	2	2

	$	a	g	l	n
$h =$ (zählt Zeichen)	1	2	2	2	2



- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

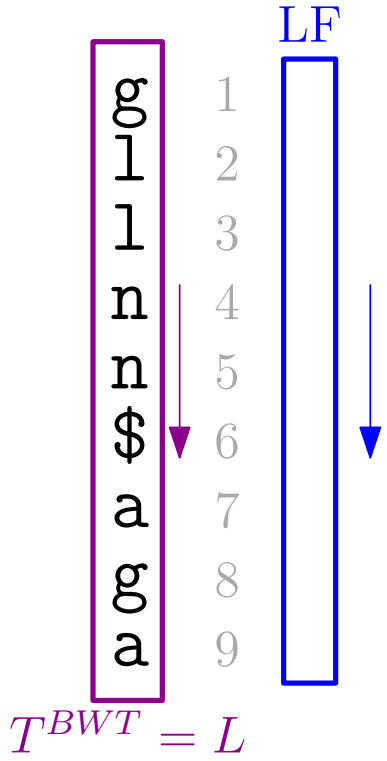
Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1	1	2	1	2	1	1	2	2

	$	a	g	l	n
$h =$	1	2	2	2	2
$C =$	0	1	3	5	7

(Präfixsumme von h)



- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1	1	2	1	2	1	1	2	2

	$	a	g	l	n
$h =$	1	2	2	2	2
$C =$	0	1	3	5	7

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$									

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$									$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

			LF
	g	1	4
	l	2	6
	l	3	7
	n	4	8
	n	5	9
?	$	6	1
	a	7	2
	g	8	5
	a	9	3

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

			LF
	g	1	4
	l	2	6
	l	3	7
	n	4	8
	n	5	9
?	$	6	1
	a	7	2
	g	8	5
	a	9	3

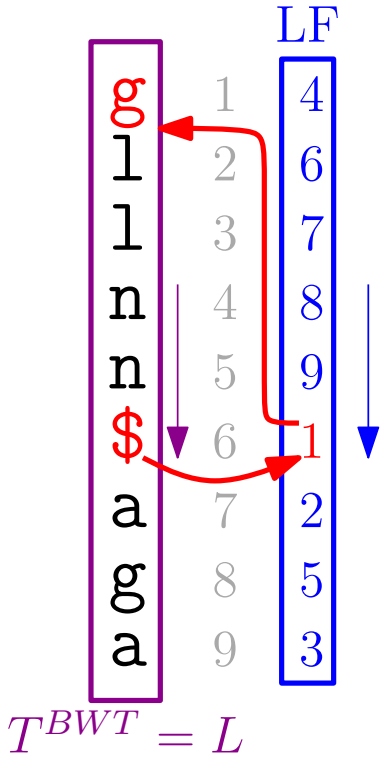
$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								g	$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

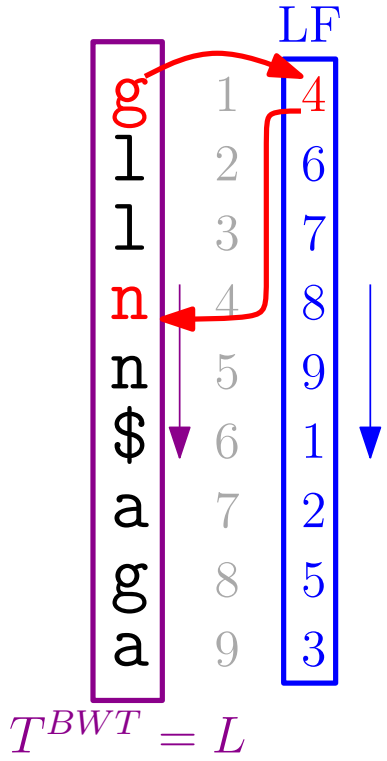


Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$							n	g	$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

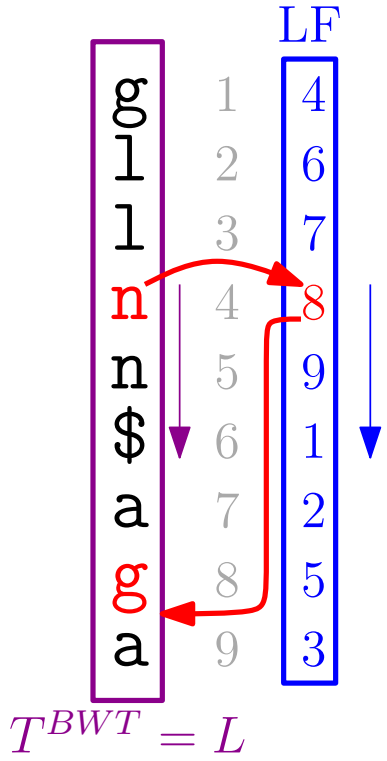


Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$					...	g	n	g	$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...



Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...
- Allgemein: $T[n-i] = L[LF(LF(\ldots(LF(1))\ldots))]$ $(i-1)$ LF Anwendungen

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...
- Allgemein: $T[n-i] = L[LF(LF(\ldots(LF(1))\ldots))]$ $(i-1)$ LF Anwendungen
- Rücktransformation in $\mathcal{O}(n)$ (ohne Zusatzinformationen)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  $\rightarrow$ scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  $\rightarrow$ vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit
  vielen gleichen Substrings
  $\rightarrow$ Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar $\rightarrow$ Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  $\rightarrow$ scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  $\rightarrow$ vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit
  vielen gleichen Substrings
  $\rightarrow$ Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar $\rightarrow$ Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  $\rightarrow$ scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  $\rightarrow$ vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit
  vielen gleichen Substrings
  $\rightarrow$ Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar $\rightarrow$ Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  $\rightarrow$ scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  $\rightarrow$ vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  $\rightarrow$ Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

```
  ⋮                    ⋮
t h e ...        ...  _
t h e ...        ...  _
t h e ...        ...  _
  ⋮                    ⋮
```

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar $\rightarrow$ Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  $\rightarrow$ scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  $\rightarrow$ vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  $\rightarrow$ Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

```
  ⋮                    ⋮
h e ...          ...  t
h e ...          ...  t
h e ...          ...  t
  ⋮                    ⋮
t h e ...        ...  _
t h e ...        ...  _
t h e ...        ...  _
  ⋮                    ⋮
```

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar $\rightarrow$ Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  $\rightarrow$ scheinbar keine Vorteile ?!?
- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  $\rightarrow$ vereinfacht Komprimierung
- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  $\rightarrow$ Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

T^{BWT}

```
  ⋮                    ⋮
h e ...        ...   t
h e ...        ...   t
h e ...        ...   t
  ⋮                    ⋮
t h e ...      ...   _
t h e ...      ...   _
t h e ...      ...   _
  ⋮                    ⋮
```

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar $\rightarrow$ Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  $\rightarrow$ scheinbar keine Vorteile ?!?
- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  $\rightarrow$ vereinfacht Komprimierung
- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  $\rightarrow$ Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

T^{BWT}

```
  ⋮                    ⋮
h e ...        ...   t
h e ...        ...   t
h e ...        ...   t
  ⋮                    ⋮
t h e ...      ...   _
t h e ...      ...   _
t h e ...      ...   _
  ⋮                    ⋮
```

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar $\rightarrow$ Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression

gegeben: Text T
gesucht : komprimierter Text C

bzip2 (1996)

- (Huffmann Kodierung)
- erzeuge *Burrows-Wheeler-Transformation*
- *Move-To-Front* (MTF) Kodierung
- Huffmann Kodierung
  (eigentliche Kompression)

bzip2

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \mathtt{\$} \end{array}$$

$$R =$$

$$\begin{array}{lccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ Y = & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \mathtt{\$} \end{array}$$

$R = 3$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ Y = & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \mathtt{\$} \\ R = & 3 & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ Y = & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \mathtt{\$} \\ R = & 3 & 4 & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ Y = & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	a	g	a	$
$R =$	3	4							

	1	2	3	4	5
	$	a	g	l	n
	g	$	a	l	n
$Y =$	l	g	$	a	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	a	g	a	$
$R =$	3	4	1						

	1	2	3	4	5
	$	a	g	l	n
	g	$	a	l	n
$Y =$	l	g	$	a	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \mathtt{\$} \\ R = & 3 & 4 & 1 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ & \mathtt{l} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \\ Y = & \mathtt{l} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rcccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \$ \\ R = & 3 & 4 & 1 & \ldots & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & & & \vdots & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \$ & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ & \mathtt{l} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{a} & \mathtt{n} \\ Y = & \mathtt{l} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{a} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	a	g	a	$
$R =$	3	4	1	5	1	5	4	2	5

	1	2	3	4	5
	$	a	g	l	n
	g	$	a	l	n
	l	g	$	a	n
	l	g	$	a	n
	n	l	g	$	a
	n	l	g	$	a
	a	n	l	g	$
	g	a	n	l	$
	a	g	n	l	$
$Y =$	$	a	g	n	l

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ T^{BWT} = & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{c} & \mathtt{c} & \mathtt{c} & \mathtt{c} & \mathtt{d} \end{array}$$

$R =$

$$\begin{array}{lcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Y = & \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{c} & \mathtt{d} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$T^{BWT} =$	a	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	c	d
$R =$	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	4

	1	2	3	4
	a	b	c	d
		⋮		
	b	a	c	d
		⋮		
	c	b	a	d
		⋮		
$Y =$	d	c	b	a

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

- präfixfreie Codes variabler Länge
- können greedy konstruiert werden

Ablauf

- erzeuge binären Baum *bottom-up*
  - nimm seltenste 2 Zeichen(-gruppen)
  - erzeuge neuen Knoten, der beide Zeichen(-gruppen) repräsentiert, neue Häufigkeit $\hat{=}$ Summe beider Häufigkeiten
- Beschriftungen der Baumkanten (links:0, rechts:1) ergeben Zeichenkodierungen

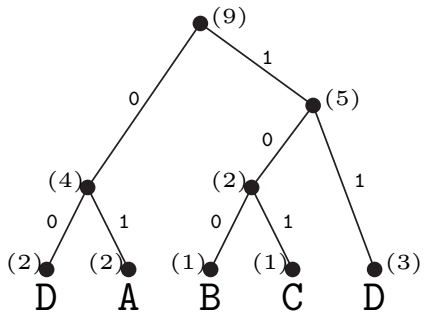
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

- präfixfreie Codes variabler Länge
- können greedy konstruiert werden

Ablauf

- erzeuge binären Baum *bottom-up*
  - nimm seltenste 2 Zeichen(-gruppen)
  - erzeuge neuen Knoten, der beide Zeichen(-gruppen) repräsentiert, neue Häufigkeit $\hat{=}$ Summe beider Häufigkeiten
- Beschriftungen der Baumkanten (links:0, rechts:1) ergeben Zeichenkodierungen



Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ l a l a n g n g \$
$R =$ 3 4 1 5 1 5 4 2 5

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`
$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`
$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

$\overset{(2)}{\bullet}$ $\overset{(2)}{\bullet}$ $\overset{(1)}{\bullet}$ $\overset{(1)}{\bullet}$ $\overset{(3)}{\bullet}$

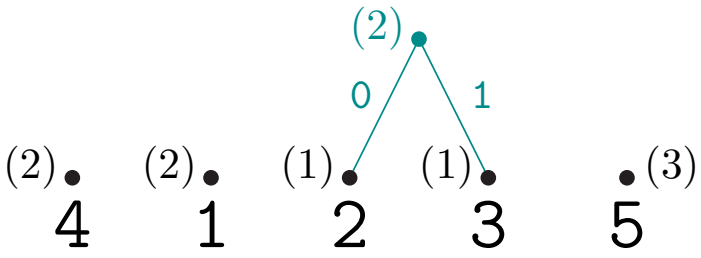
4 1 2 3 5

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ l a l a n g n g \$
$R =$ 3 4 1 5 1 5 4 2 5

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

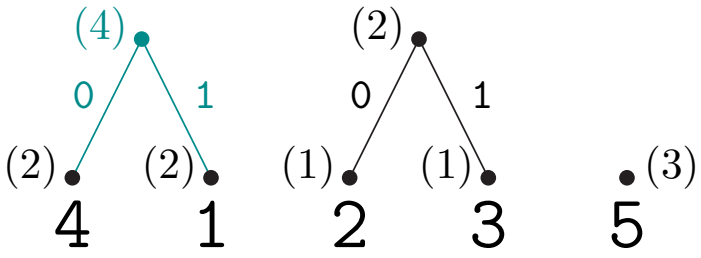


Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`
$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

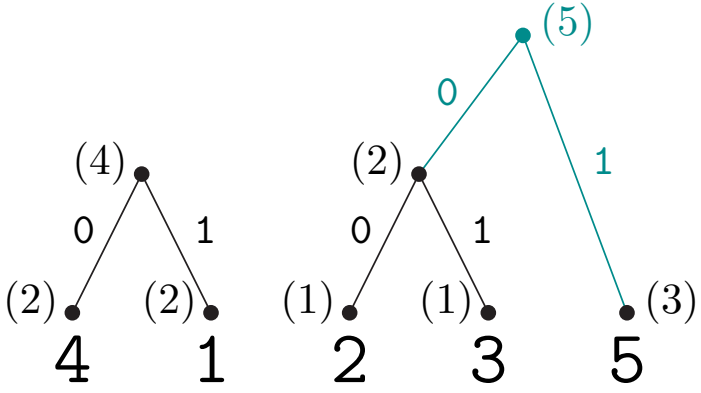


Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ l a l a n g n g \$
$R =$ 3 4 1 5 1 5 4 2 5

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3



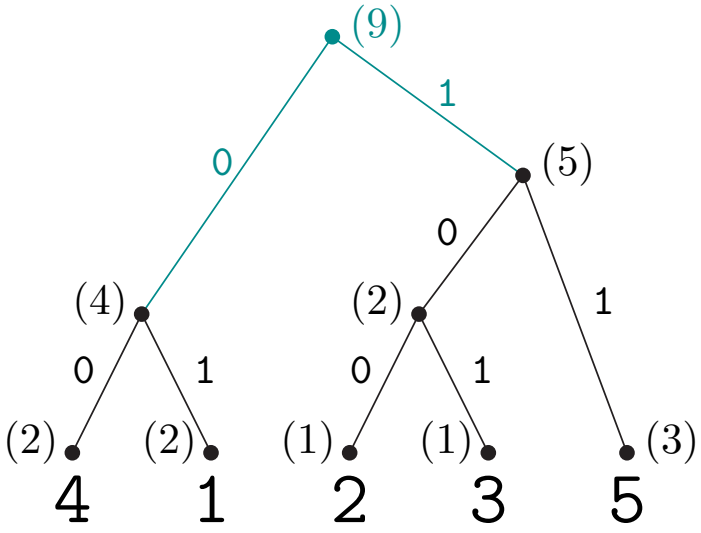
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ l a l a n g n g $

$R =$ 3 4 1 5 1 5 4 2 5

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

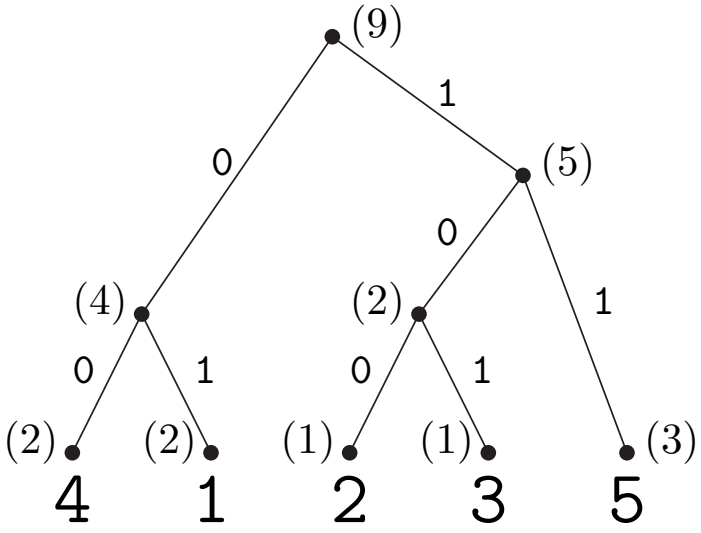


Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ l a l a n g n g \$
$R =$ 3 4 1 5 1 5 4 2 5

Symbol	Häufigkeit	Code
1	2	01
2	1	100
3	1	101
4	2	00
5	3	11



Burrows-Wheeler-Transformation

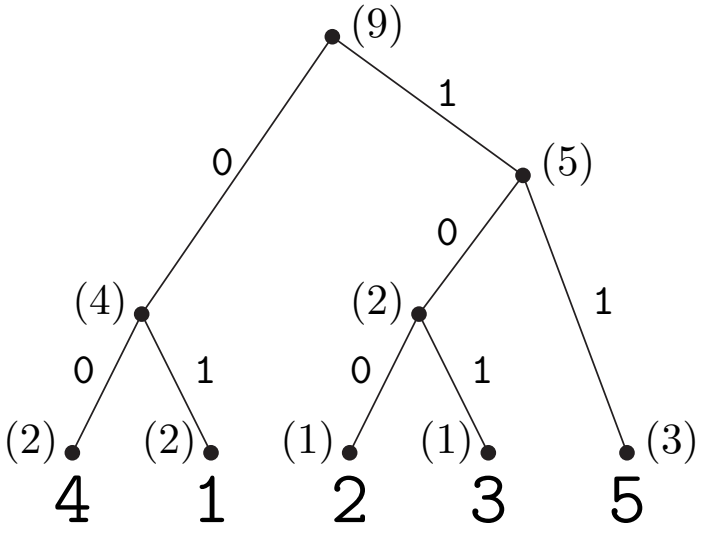
Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ l a l a n g n g $

$R =$ 3 4 1 5 1 5 4 2 5

101 00 01 11 01 11 00 100 11 20 Bits

Symbol	Häufigkeit	Code
1	2	01
2	1	100
3	1	101
4	2	00
5	3	11



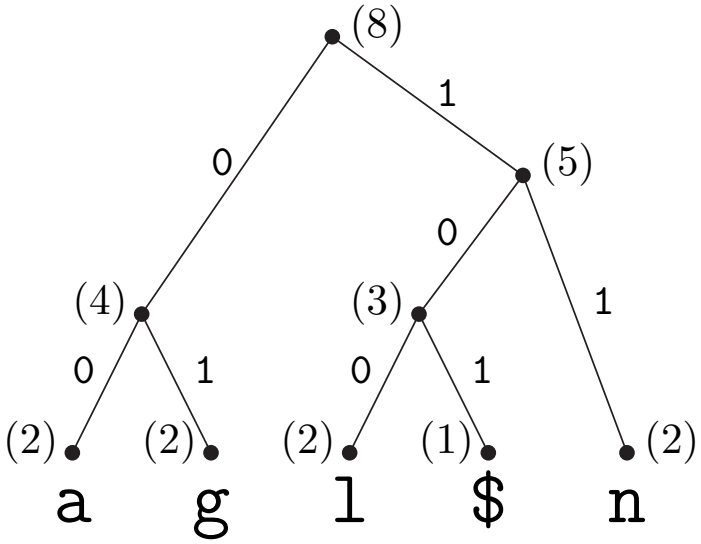
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ l a l a n g n g $

100 00 100 00 11 01 11 01 101 21 Bits

Symbol	Häufigkeit	Code
$	1	101
a	2	00
g	2	01
l	2	100
n	2	11



Burrows-Wheeler-Transformation

Zusammenfassung

- erzeugt (sinnvolle) Permutation der Eingabe
  (gruppiert Zeichen mit ähnlichem Kontext nahe beieinander)
- keine Zusatzinformation für Rücktransformation nötig
  (alle Informationen in Struktur der Permutation)
- Hin- und Rücktransformation in $\mathcal{O}(n)$
  (einfache Papier-und-Bleistift-Methode existiert auch)
- Vorverarbeitung (statischer) Texte
  (Komprimierung, Indizierung, Suche)

Suche in der Burrows-Wheeler-Transformation

Karlsruher Institut für Technologie

Ferragina &Manzini (2000)

- Index basierend auf der Burrows-Wheeler-Transformation (BWT)
- Vergleich des Musters von rechts nach links
- Zeitkomplexität: $\mathcal{O}(m \log \sigma)$

BWT

- $BWT[i] = \mathcal{T}[SA[i] - 1 \bmod n]$
- Unkomprimierte Größe: $n \log \sigma$ Bits
- Komprimierte Größe: $nH_k(\mathcal{T})$ Bits (+Kontextinformation)

Backward Search

i	$SA[i]$	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	18	a	$
1	17	r	a$
2	10	r	abarbara$
3	7	d	abrabarbara$
4	0	$	abracadabrabarbara$
5	3	r	acadabrabarbara$
6	5	c	adabrabarbara$
7	15	b	ara$
8	12	b	arbara$
9	14	r	bara$
10	11	a	barbara$
11	8	a	brabarbara$
12	1	a	bracadabrabarbara$
13	4	a	cadabrabarbara$
14	6	a	dabrabarbara$
15	16	a	ra$
16	9	b	rabarbara$
17	2	b	racadabrabarbara$
18	13	a	rbara$

- $BWT[i] = \mathcal{T}[SA[i]-1]$, for $SA[i] > 0$
- $BWT[i] = \mathcal{T}[n-1]$, for $SA[i] = 0$
- I.e. $BWT[i]$ is the character preceding suffix $SA[i]$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	\$
1	r	a\$
2	r	abarbara\$
3	d	abrabarbara\$
4	\$	abracadabrabarbara\$
5	r	acadabrabarbara\$
6	c	adabrabarbara\$
7	b	ara\$
8	b	arbara\$
9	r	bara\$
10	a	barbara\$
11	a	brabarbara\$
12	a	bracadabrabarbara\$
13	a	cadabrabarbara\$
14	a	dabrabarbara\$
15	a	ra\$
16	b	rabarbara\$
17	b	racadabrabarbara\$
18	a	rbara\$

Array C contains for each $c \in \Sigma$ the position of the first suffix in SA which starts with c:

\$	a	b	c	d	r	r+1
0	1	9	13	14	15	19

- Operation $rank(i, X, BWT)$ returns how often character $X \in \Sigma$ occurs in the prefix $BWT[0..i-1]$.
- Example: search for $\mathcal{P} = bar$.

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for r:
  $sp_1 = C[r] + rank(sp_0, r, BWT)$
  $ep_1 = C[r] + rank(ep_0 + 1, r, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for r:
  $sp_1 = 15 + rank(0, r, BWT)$
  $ep_1 = 15 + rank(19, r, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for r:
  $sp_1 = 15 + 0$
  $ep_1 = 15 + rank(19, r, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for r:
  $sp_1 = 15+0 = 15$
  $ep_1 = 15+4-1 = 18$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = C[a] + rank(sp_1, a, BWT)$
  $ep_2 = C[a] + rank(ep_1 + 1, a, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = 1 + rank(15, a, BWT)$
  $ep_2 = 1 + rank(ep_1, a, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = 1 + rank(15, a, BWT)$
  $ep_2 = 1 + rank(ep_1, a, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C					
$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = 1 + 6$
  $ep_2 = 1 + rank(19, a, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = 1+6 = 7$
  $ep_2 = 1+8-1 = 8$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = C[b] + rank(sp_2, b, BWT)$
  $ep_3 = C[b] + rank(ep_2 + 1, b, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9 + rank(7, b, BWT)$
  $ep_3 = 9 + rank(ep_1, b, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9 + rank(7, b, BWT)$
  $ep_3 = 9 + rank(ep_1, b, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C					
$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9 + 0$
  $ep_3 = 9 + rank(9, b, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9+0 = 9$
  $ep_3 = 9+2-1 = 10$

Backward Search

Summary

- Only C and a data structure R supporting the *rank* operation on *BWT* are required for existence and count queries.
- Space: $\sigma \log n$ bits for C + space for R
- Time: $\mathcal{O}(m \cdot t_{rank})$, where t_{rank} is time for one rank operation. Independent from n?
- Next: How to implement *rank*?

Rank operation

- Constant time and $o(n)$ extra space solution on bitvectors (Jacobson 1989)
- Solution on general sequences: Wavelet Tree (Grossi & Vitter 2003)

Backward Search

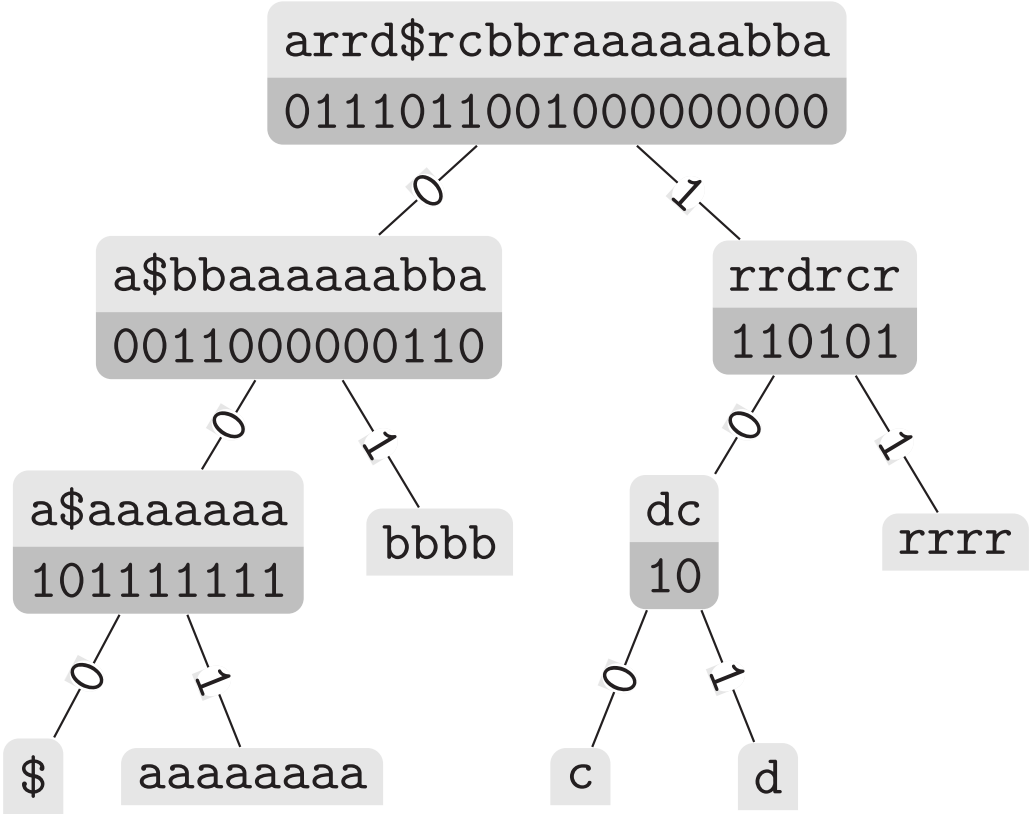
Summary

- Only C and a data structure R supporting the *rank* operation on *BWT* are required for existence and count queries.
- Space: $\sigma \log n$ bits for C + space for R
- Time: $\mathcal{O}(m \cdot t_{rank})$, where t_{rank} is time for one rank operation. Independent from n? If t_{rank} is independent from n
- Next: How to implement *rank*?

Rank operation

- Constant time and $o(n)$ extra space solution on bitvectors (Jacobson 1989)
- Solution on general sequences: Wavelet Tree (Grossi & Vitter 2003)

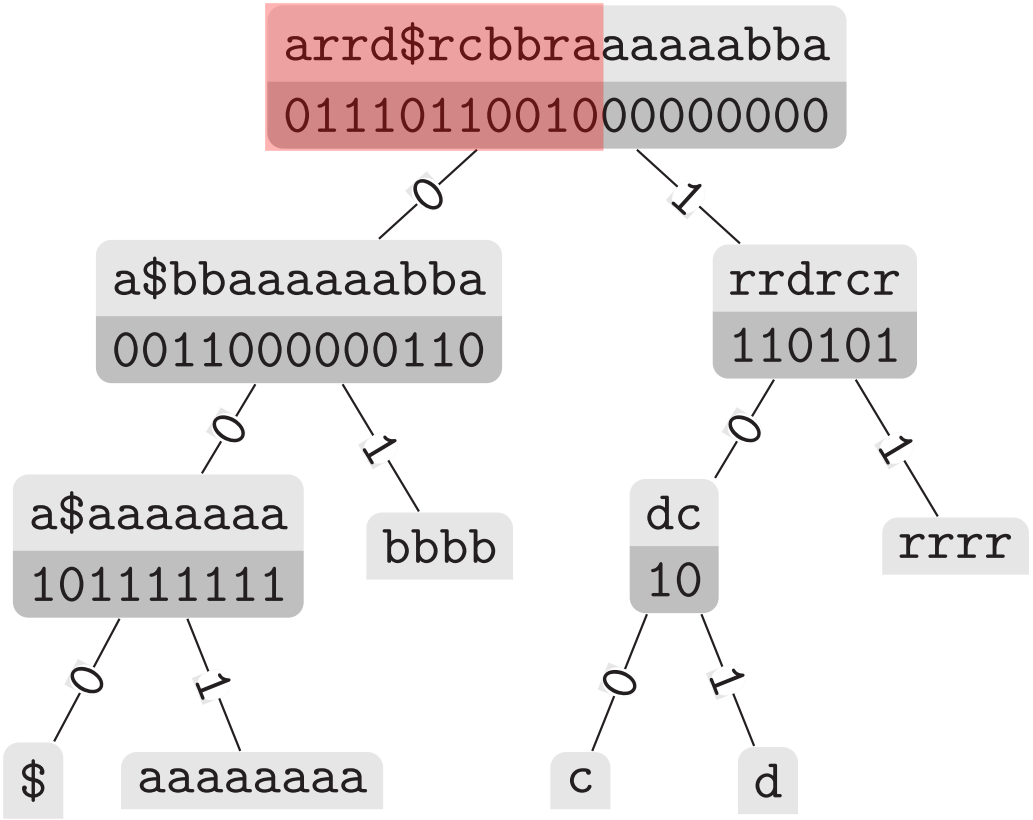
Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_\epsilon) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$$

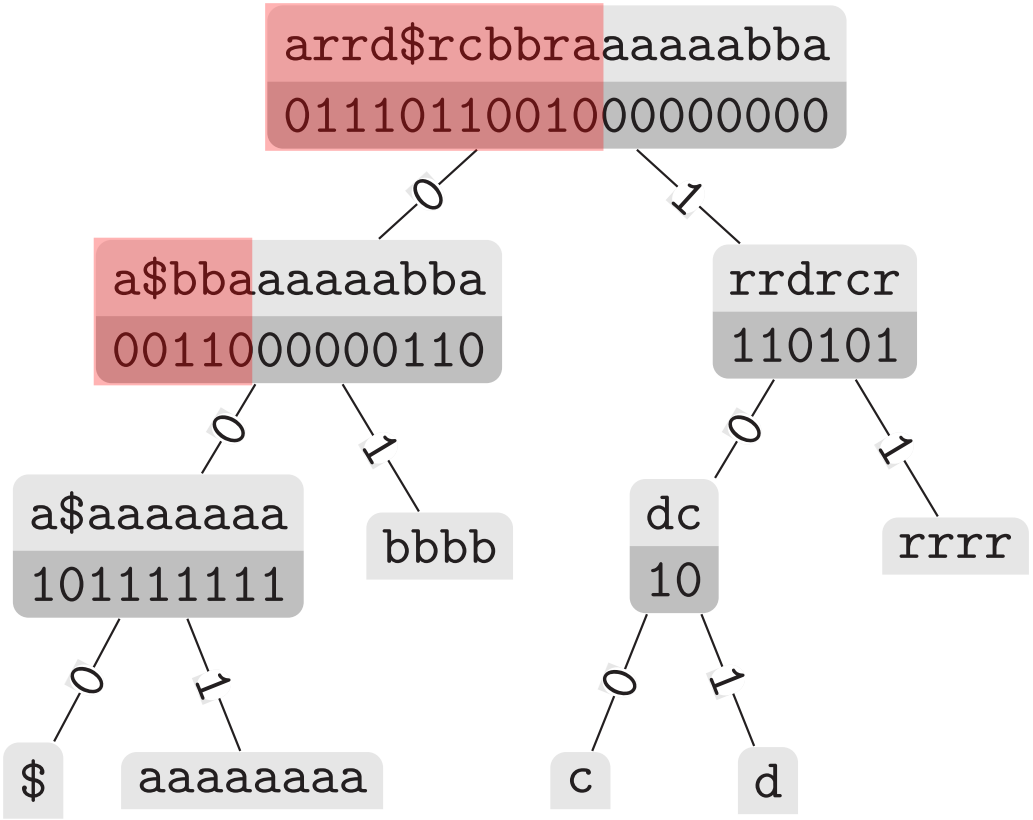
Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_\epsilon) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$$

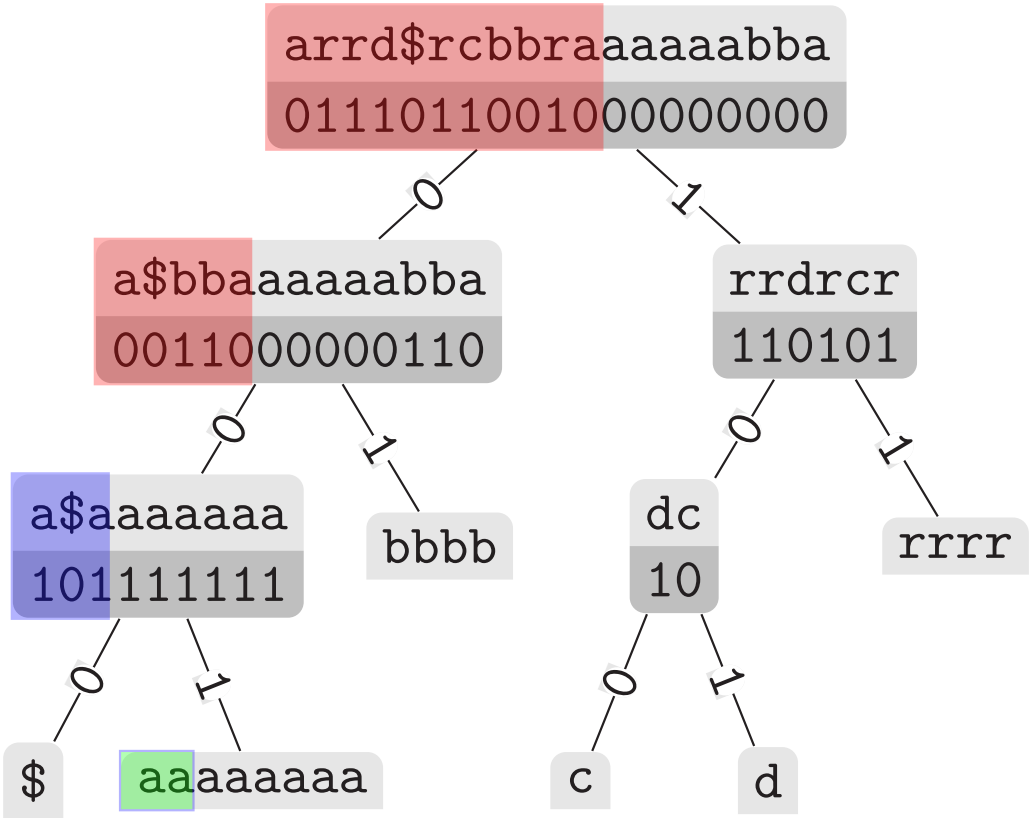
Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_\epsilon) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$$

Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_\epsilon) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$$