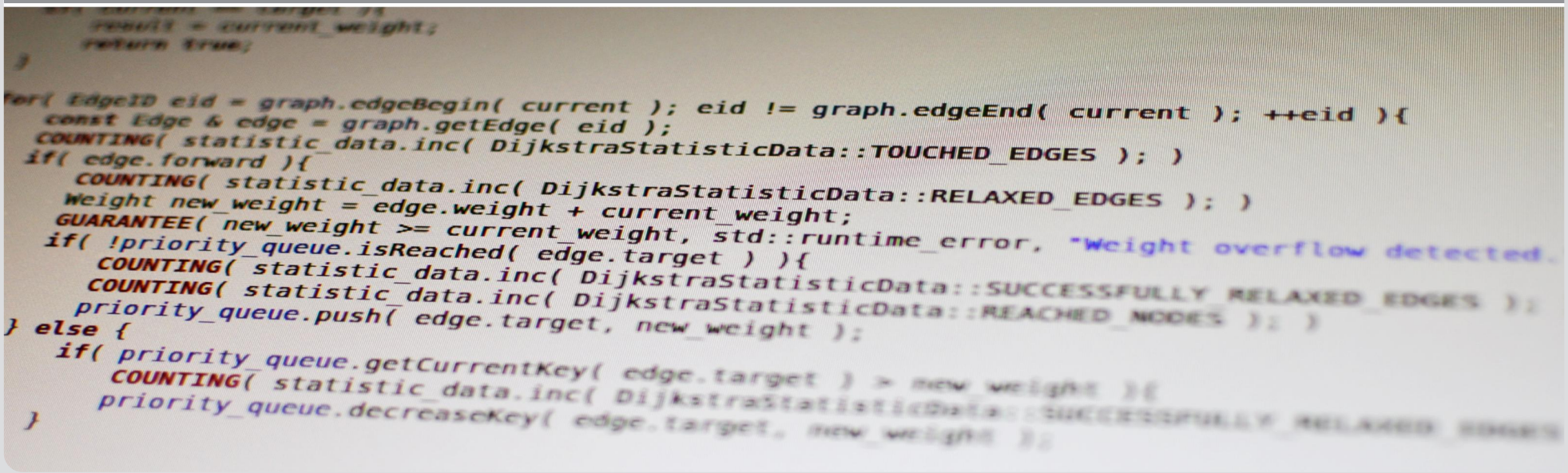
Karlsruher Institut für Technologie

Übung 3 – Algorithmen II

Sebastian Lamm, Demian Hespe – *lamm@kit.edu,hespe@kit.edu*

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS18.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II



Themen

- Suche in Graphen
  - Dijkstras Algorithmus
  - Bidirektionale Suche
  - A*-Suche
- SCC - Ein Ausblick
  - SCC Algorithmus
    - Wiederholung
    - Invarianten
  - vertiefendes Beispiel – Floyd Warshall
    - nicht relevant für Klausur

Suche in Graphen

Kürzeste-Wege-Suche

Eigenschaften

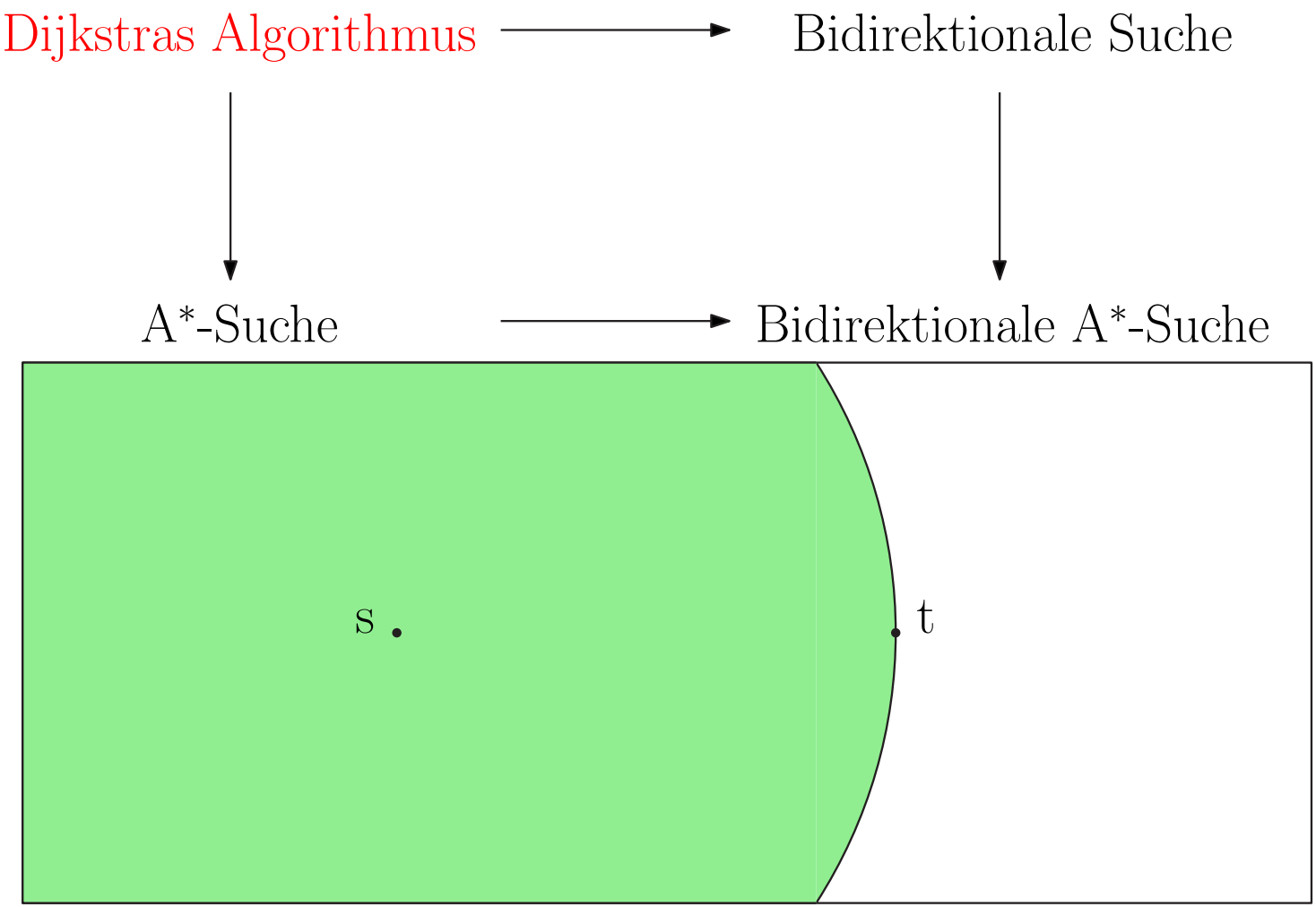
- gegeben
  - Graph $G = (V, E)$
  - Kantengewichte $c(u, v) : E \to \mathbb{R}_0^+$
- betrachte Suche von Start s nach Ziel t (One-to-One Query)
  $\to$ kürzeste Distanz $\mu(s, t)$ bestimmen

Übersicht über verschiedene Varianten

- Dijkstras Algorithmus (auch One-to-All Query)
- Bellmann Ford Algorithmus (auch negative Kantengewichte)
- Bidirektionale Suche (Beschleunigungstechnik)
- A*-Suche (Heuristik, wichtig in KI)
- ...

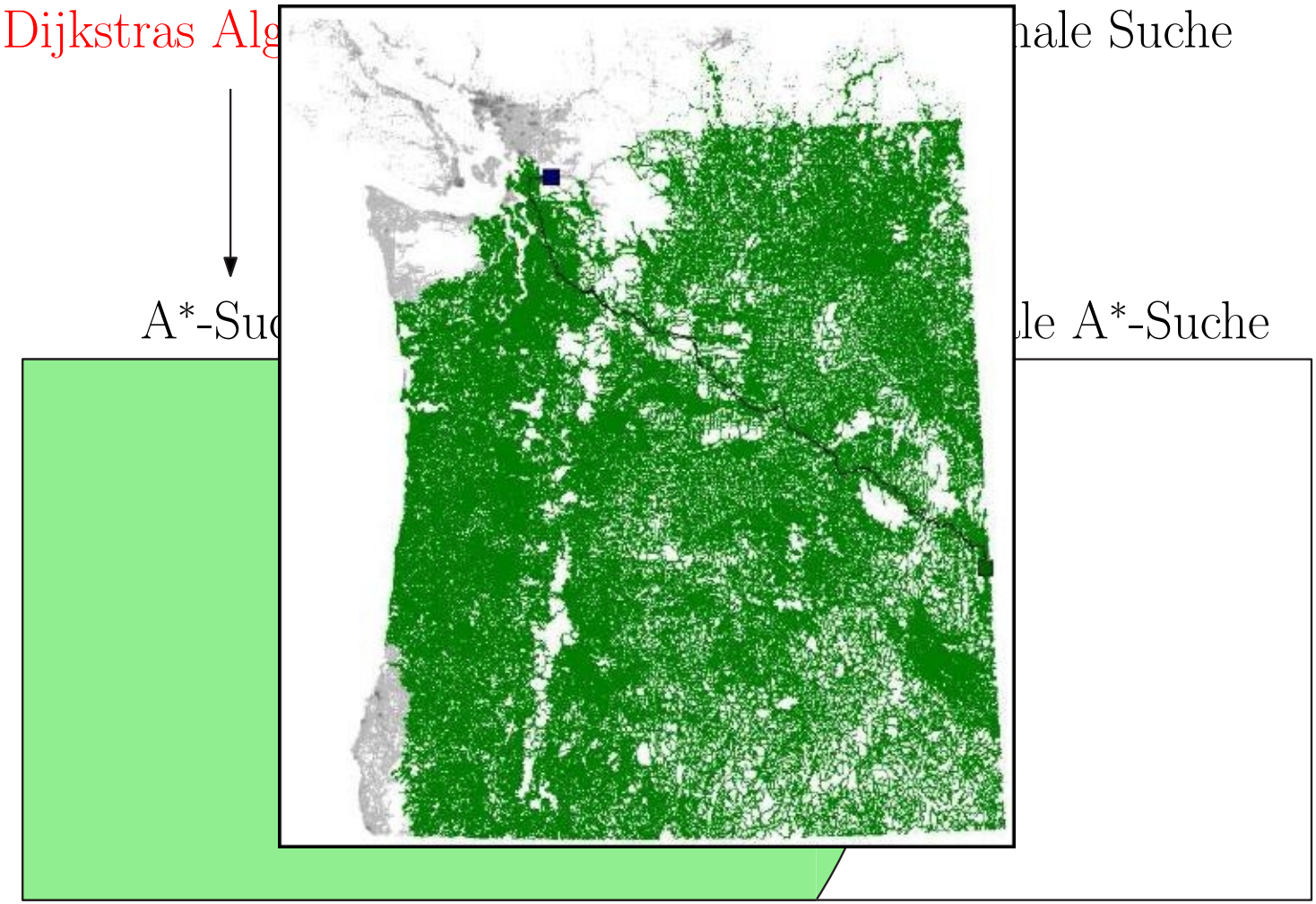
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



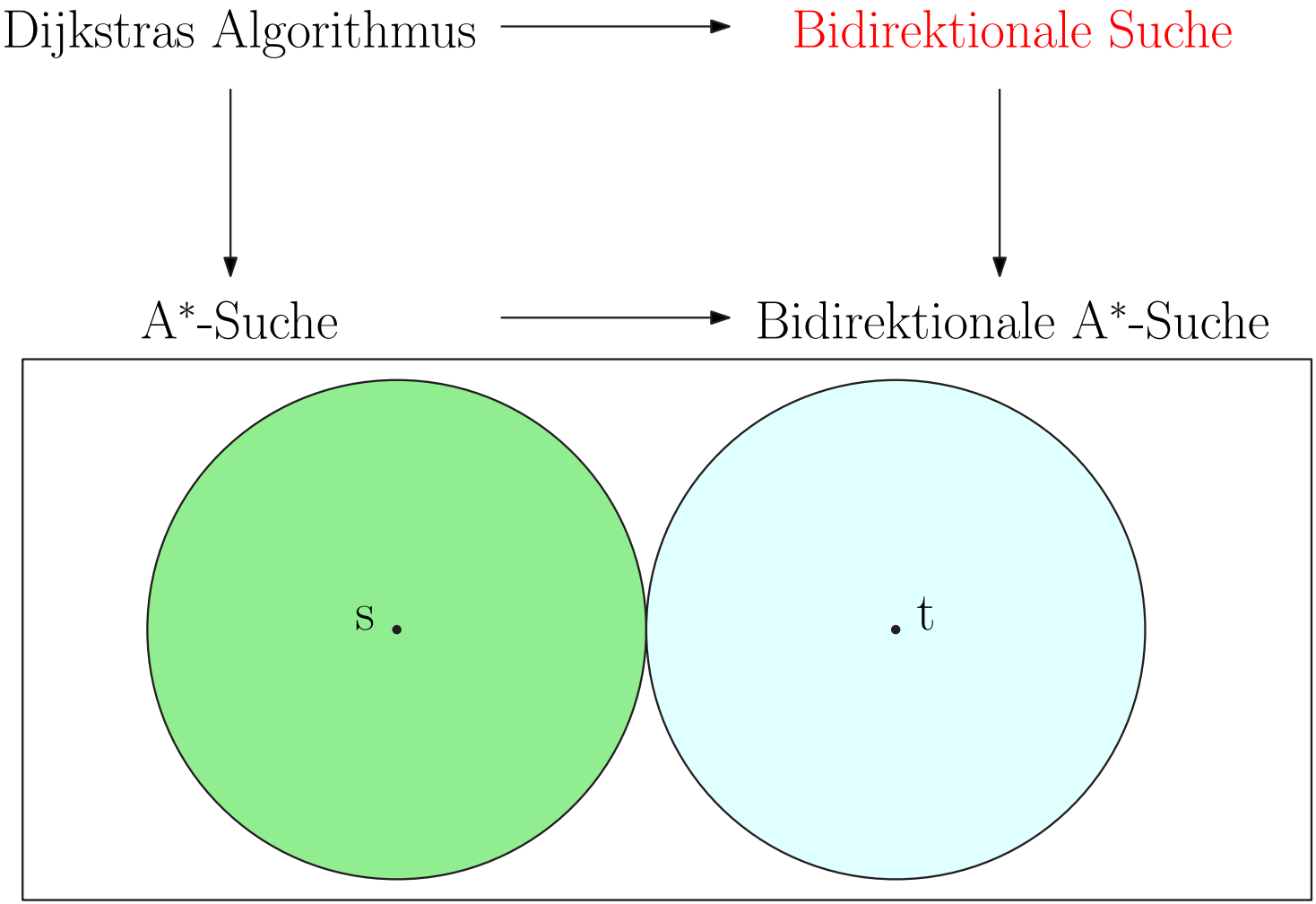
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



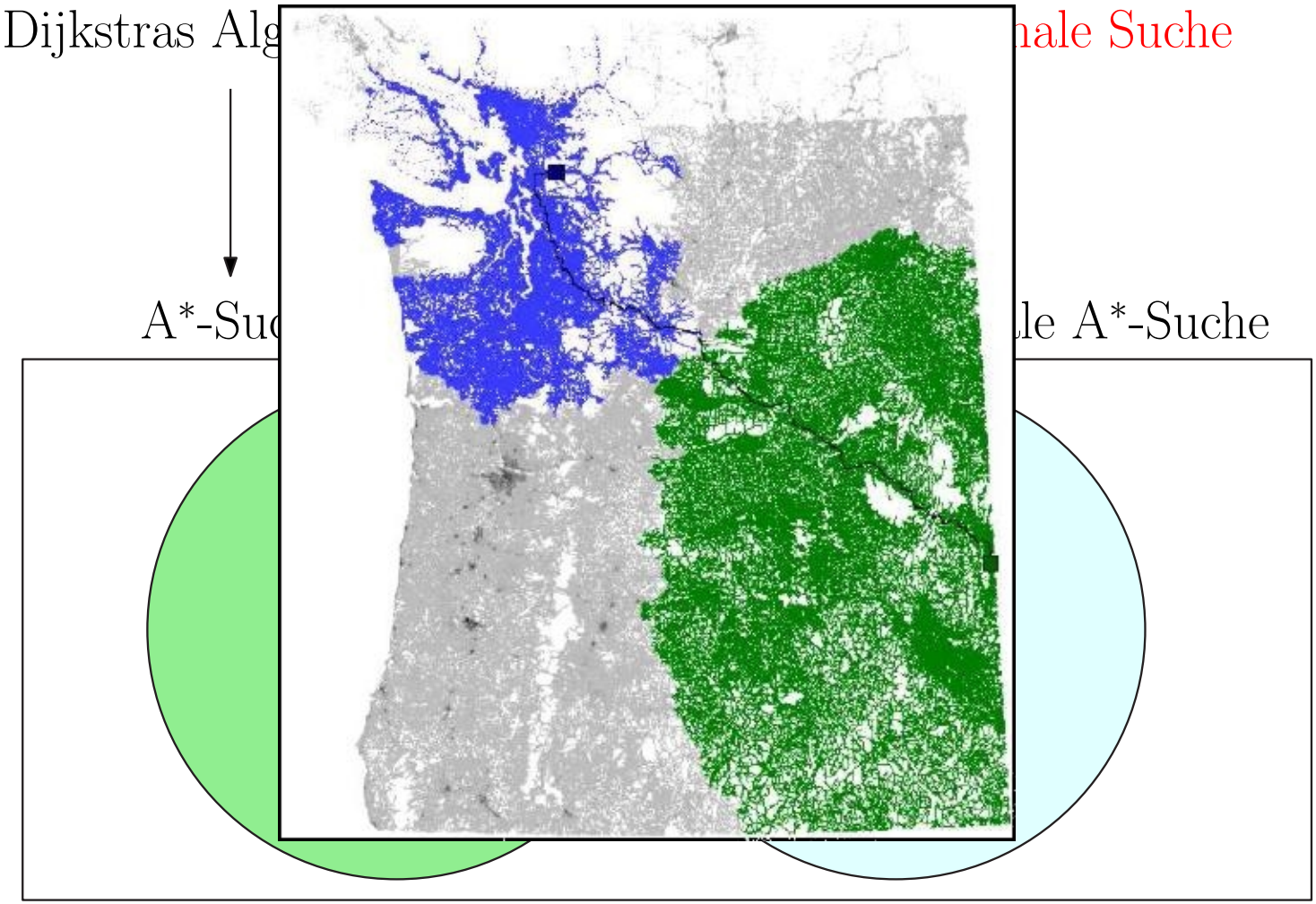
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



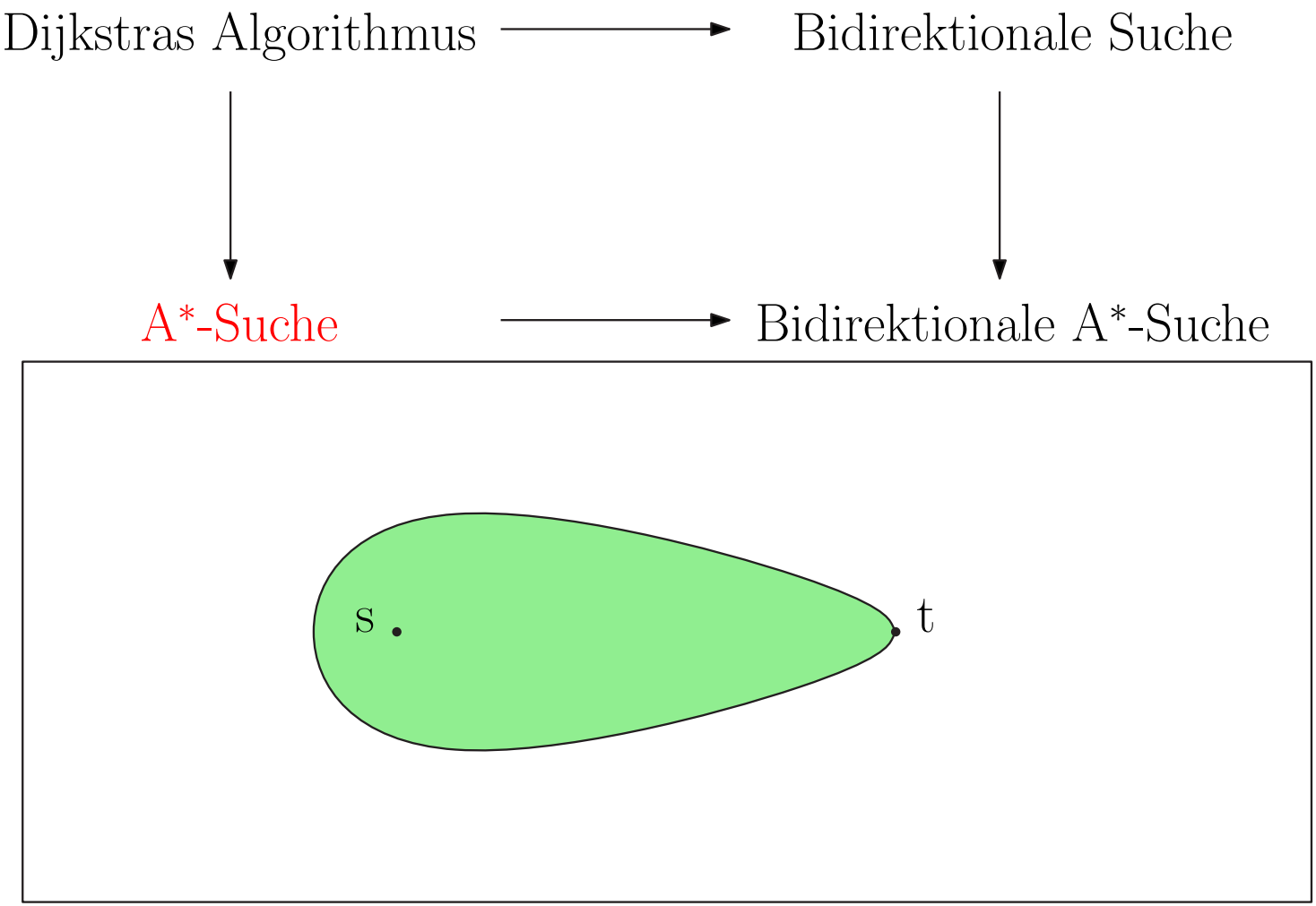
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



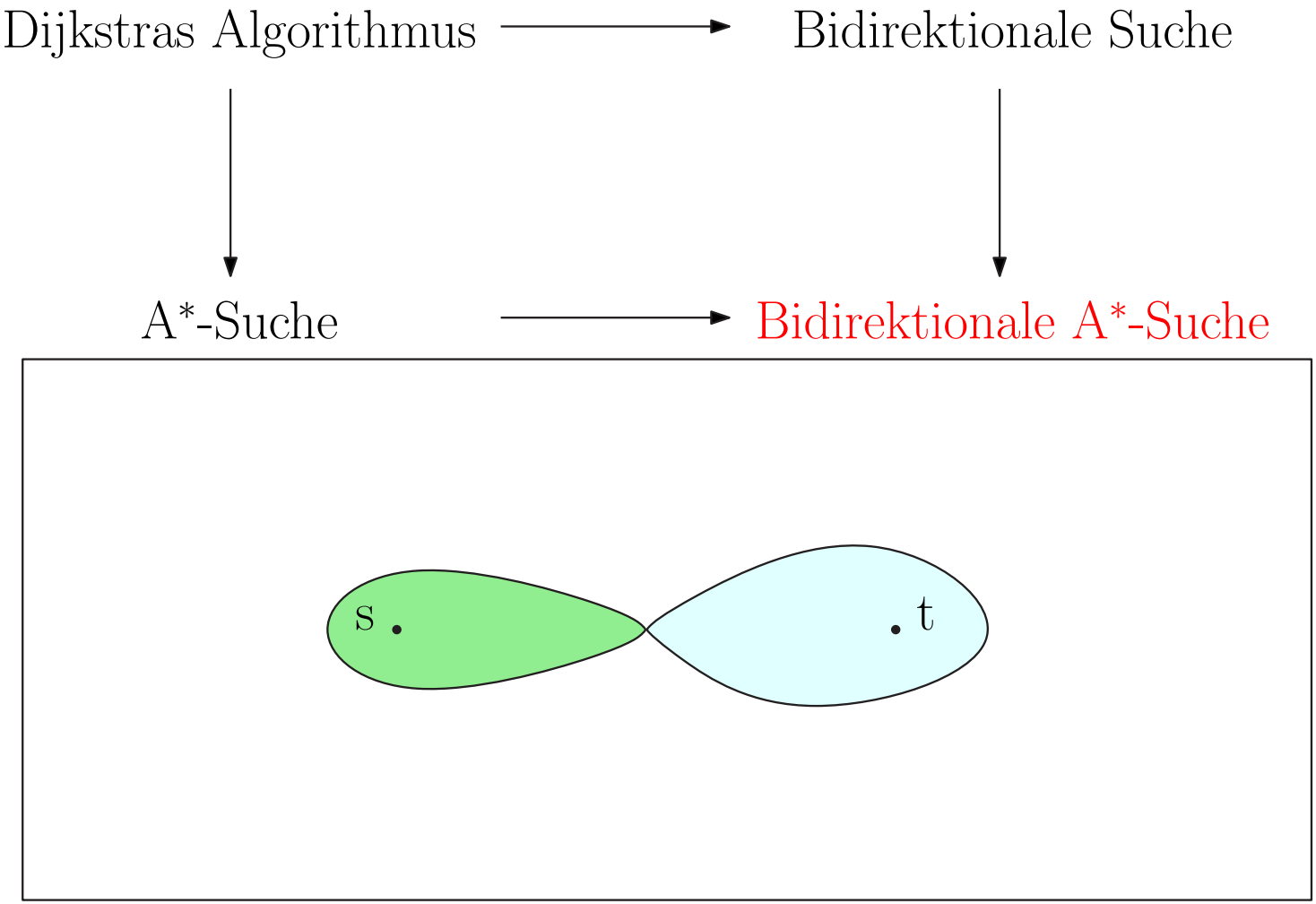
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



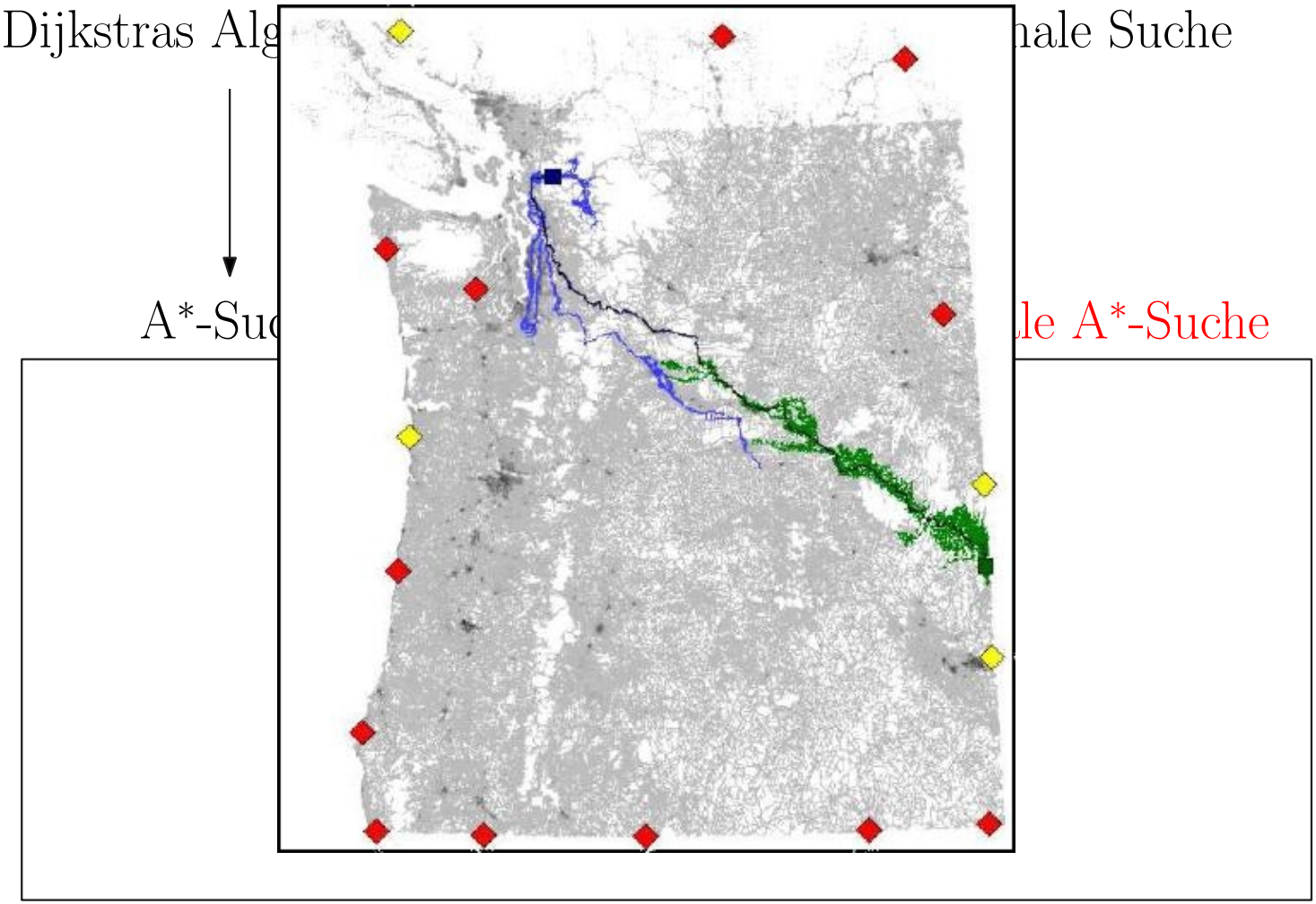
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten



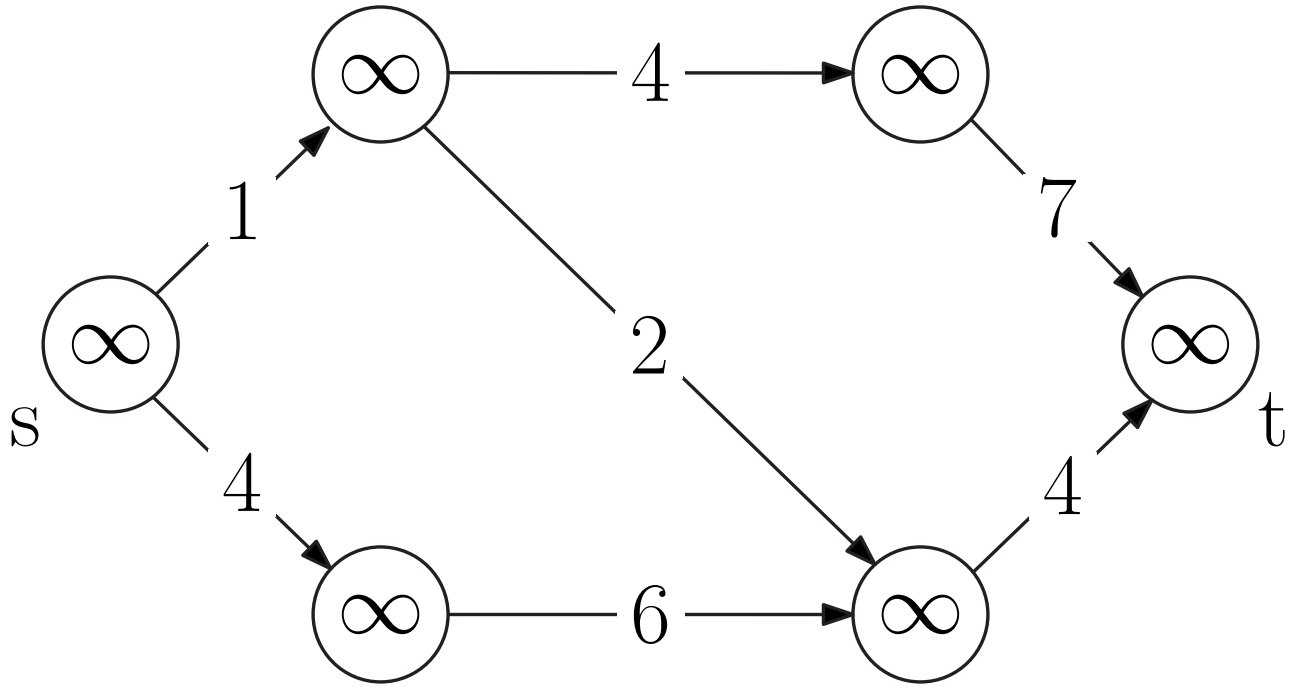
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



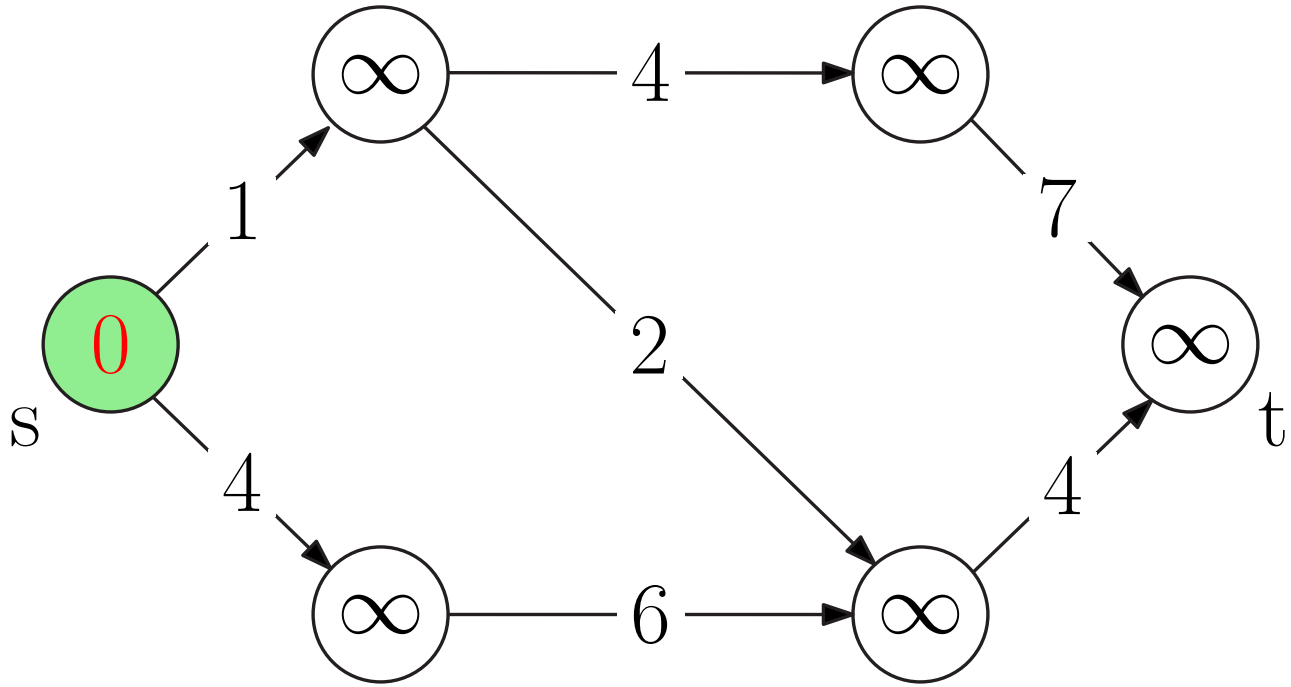
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



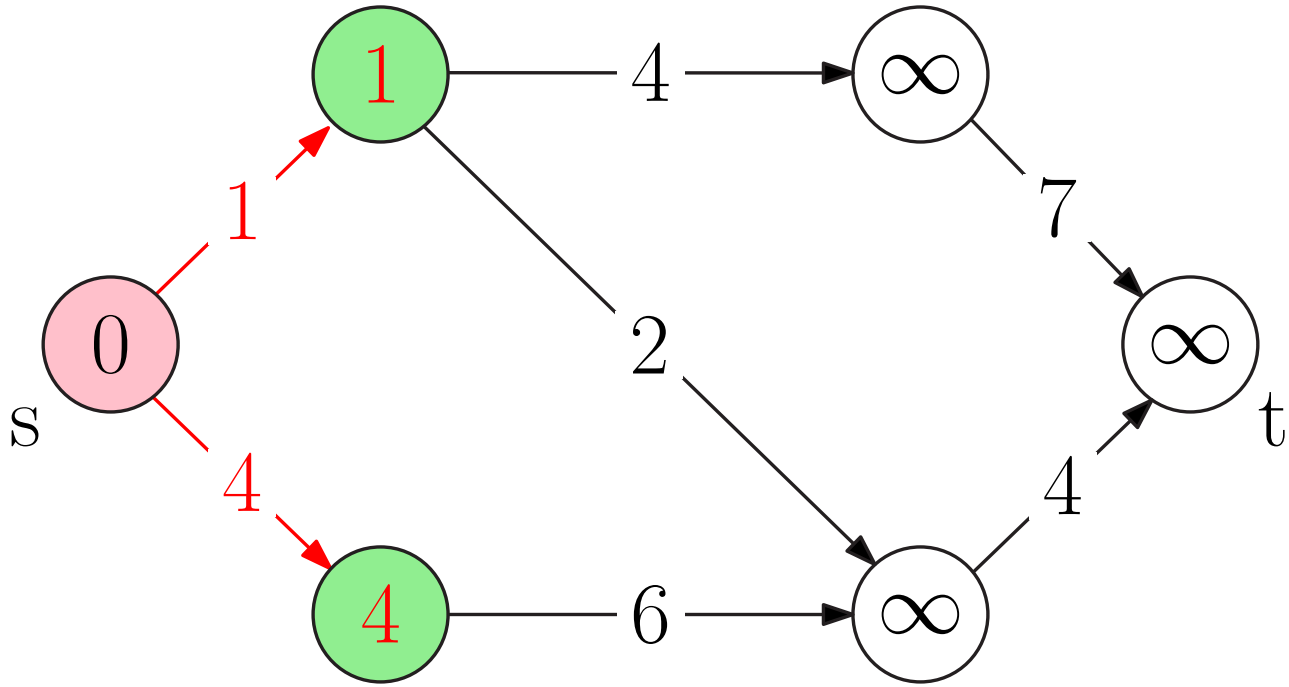
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



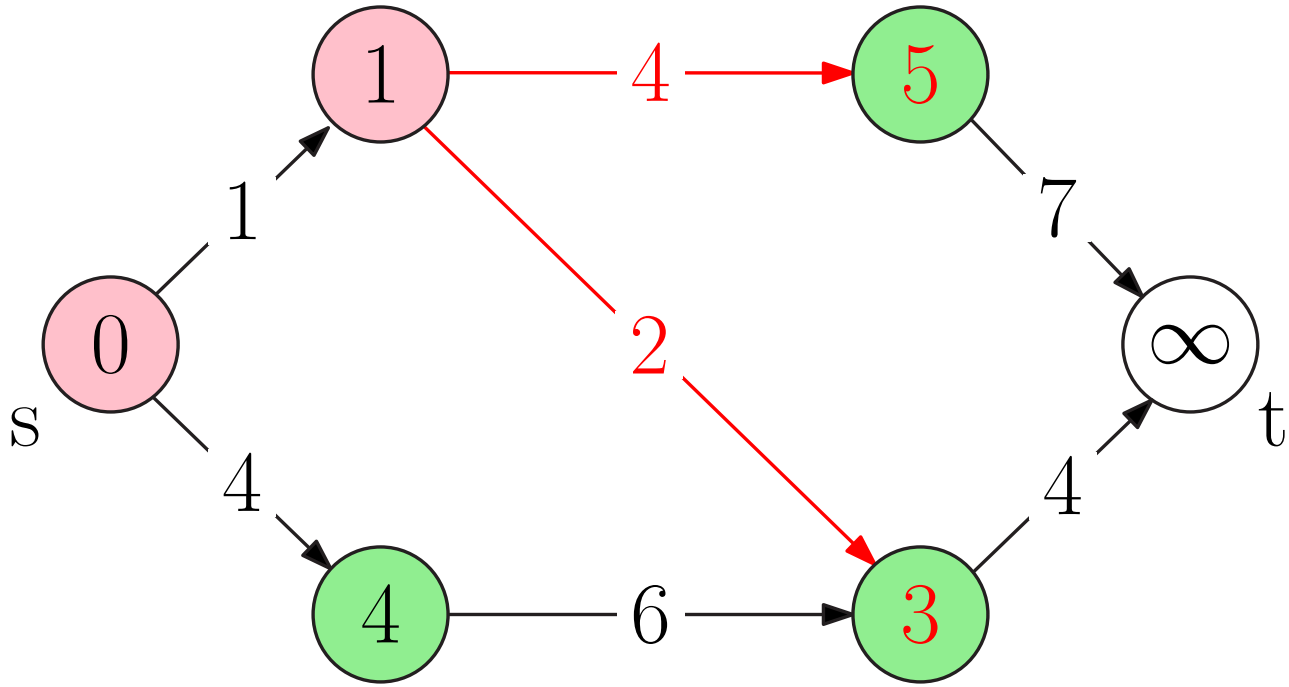
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



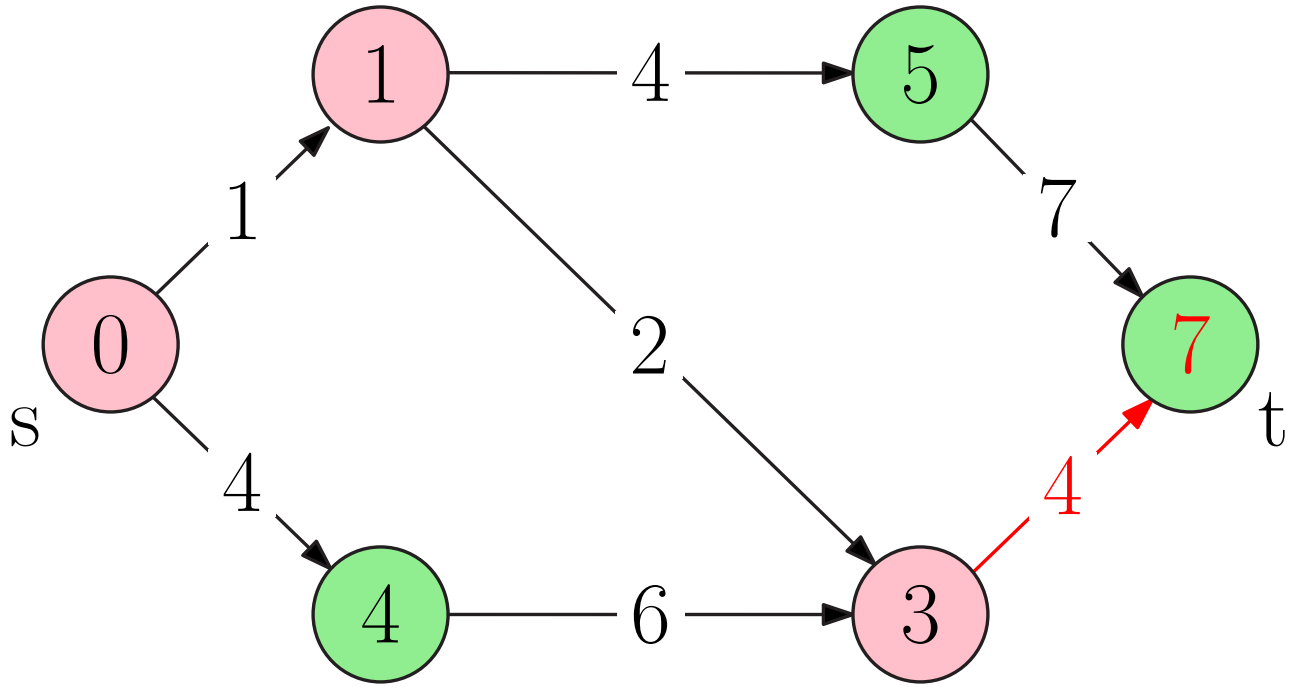
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



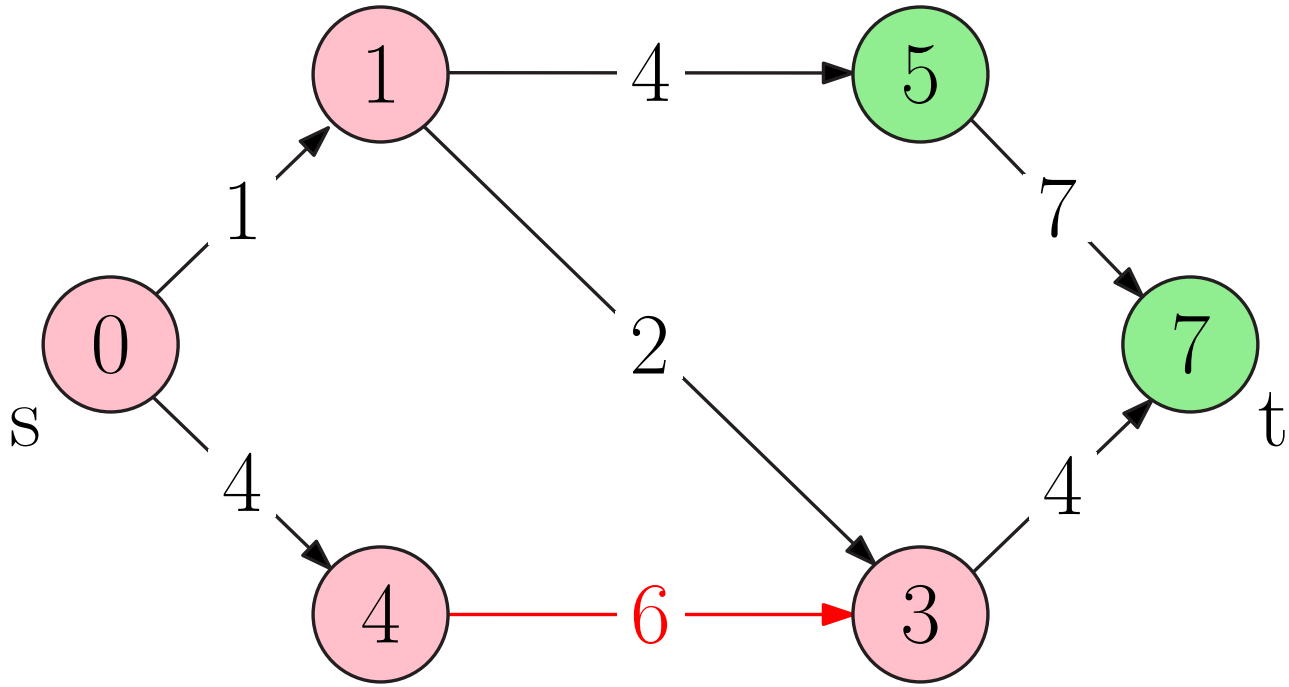
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



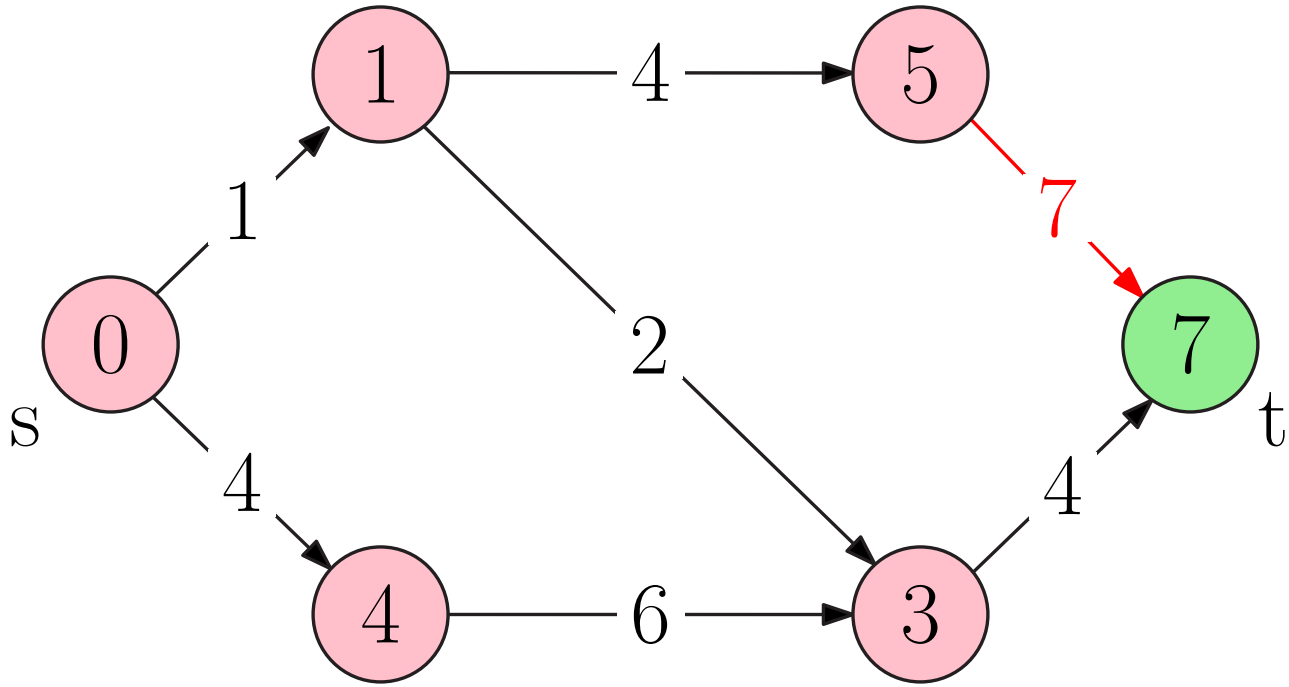
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



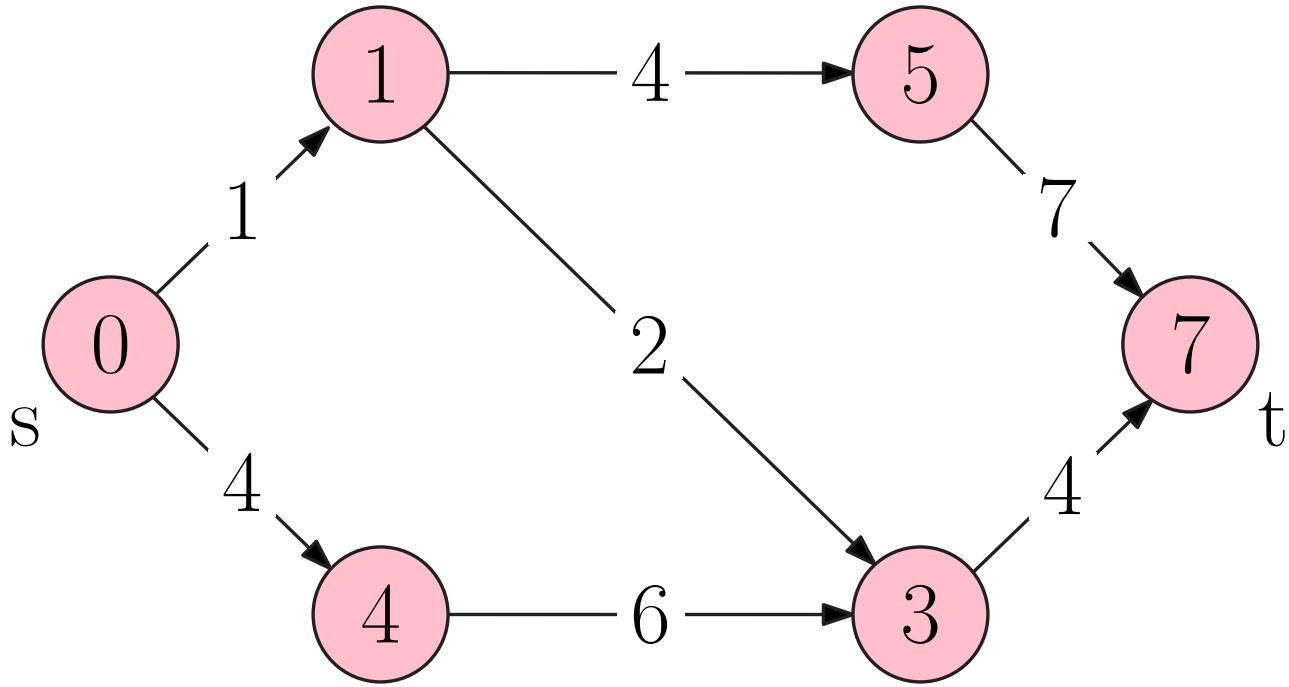
Suche in Graphen

Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



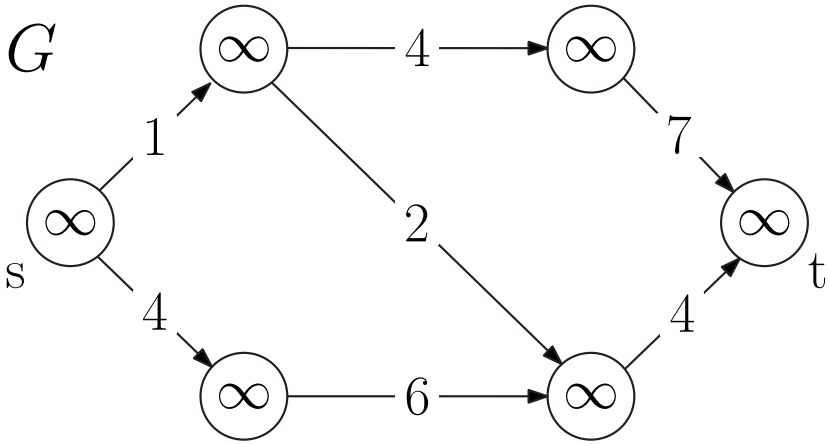
Suche in Graphen

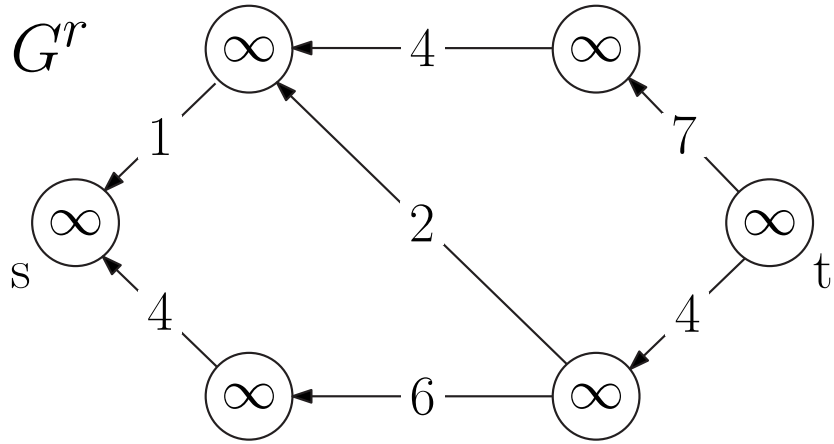
Bidirektionale Suche

Eigenschaften

- führt zweimal Dijkstras Algorithmus aus
  → Vorwärtssuche ($s \to t$) auf normalem Graph G,
  → Rückwärtssuche ($t \to s$) auf Rückwärtsgraph G^r

Beispiel





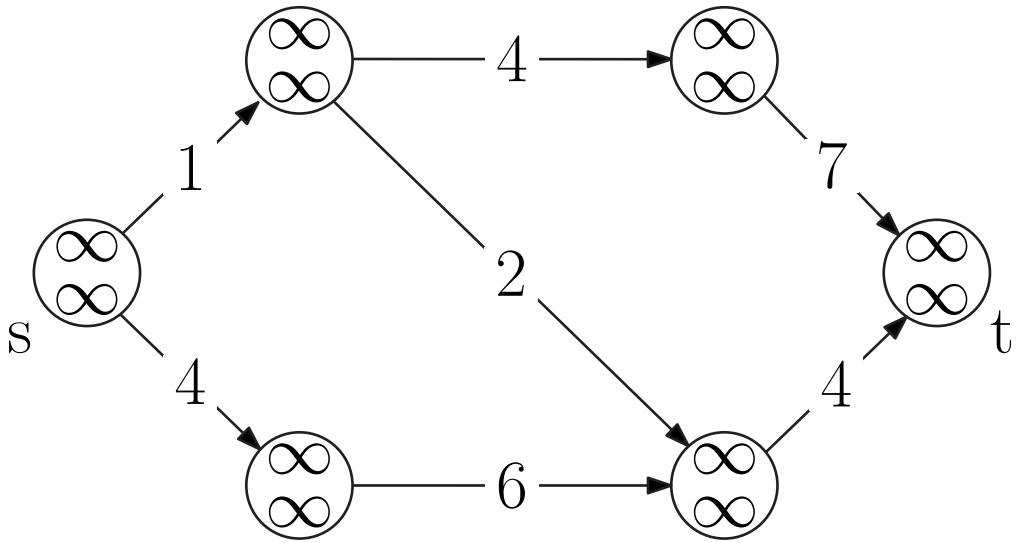
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



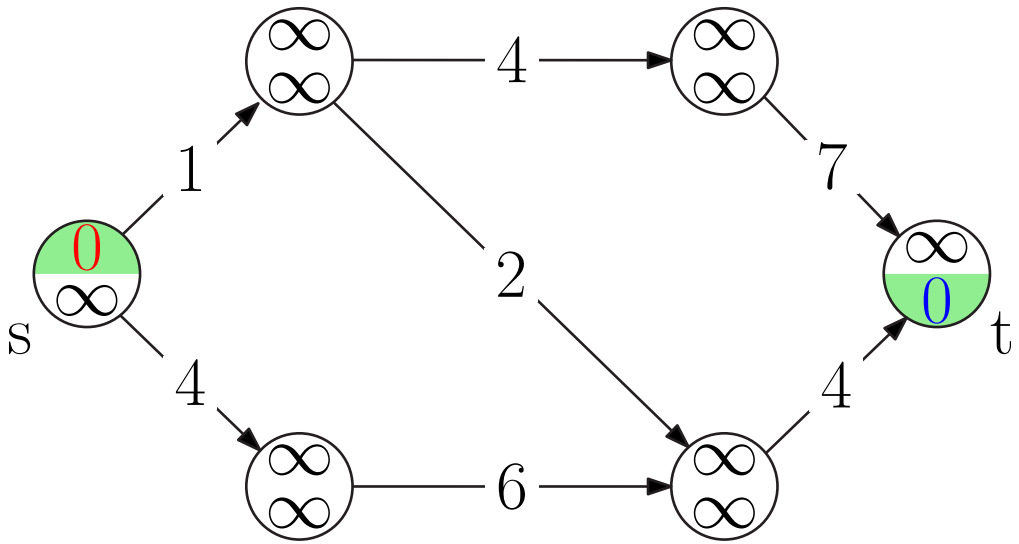
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



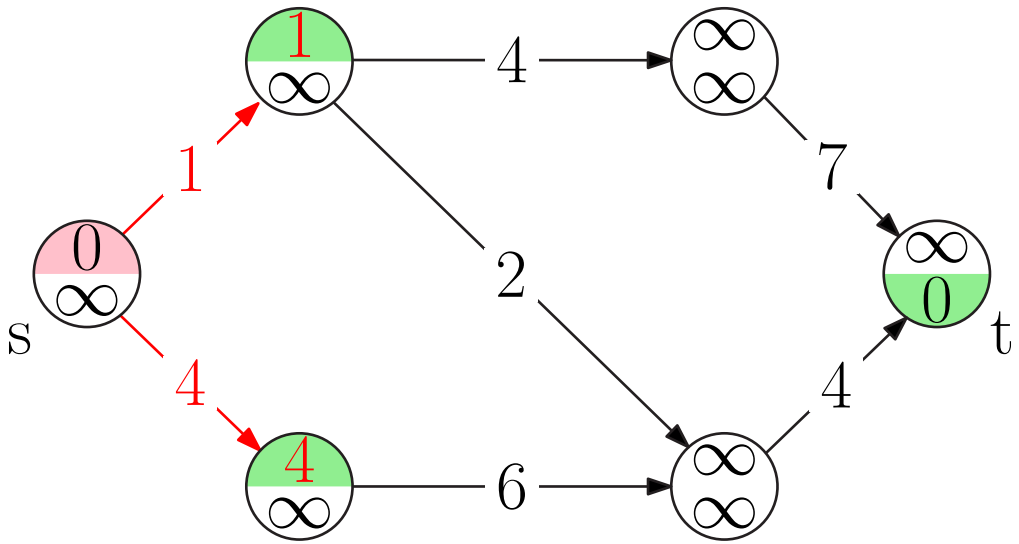
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



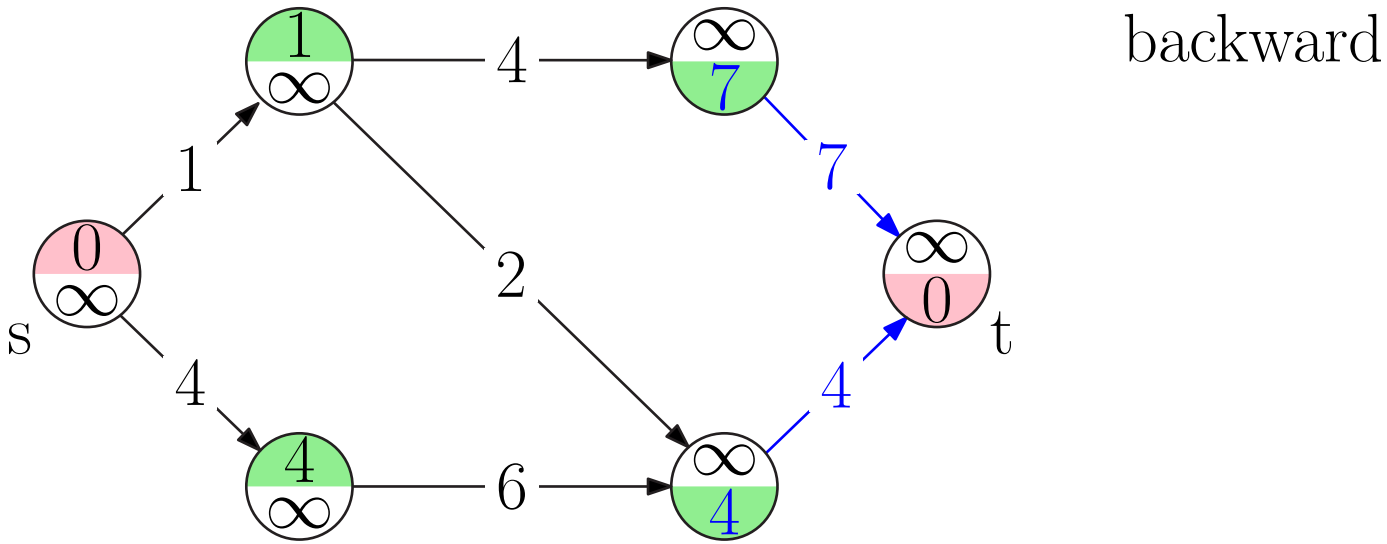
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



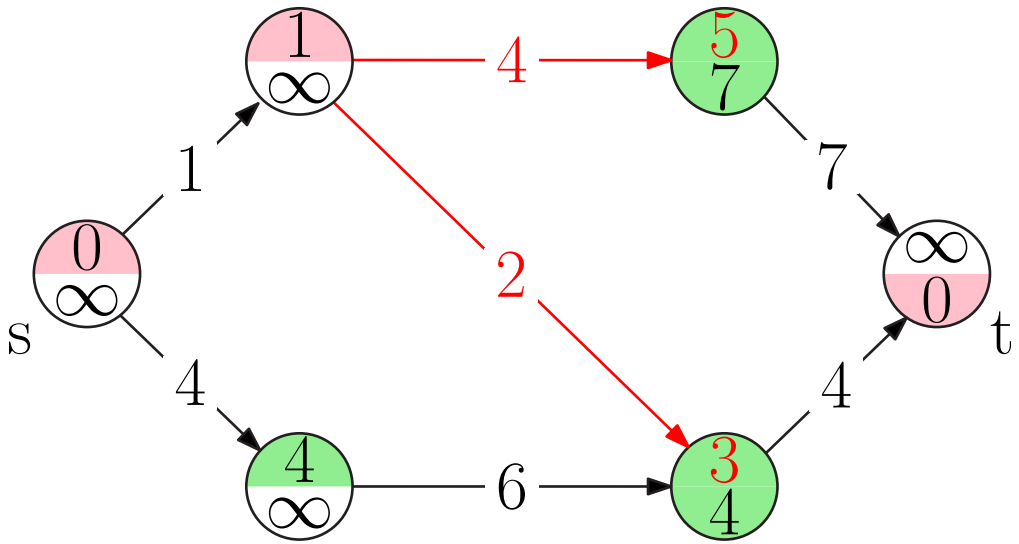
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



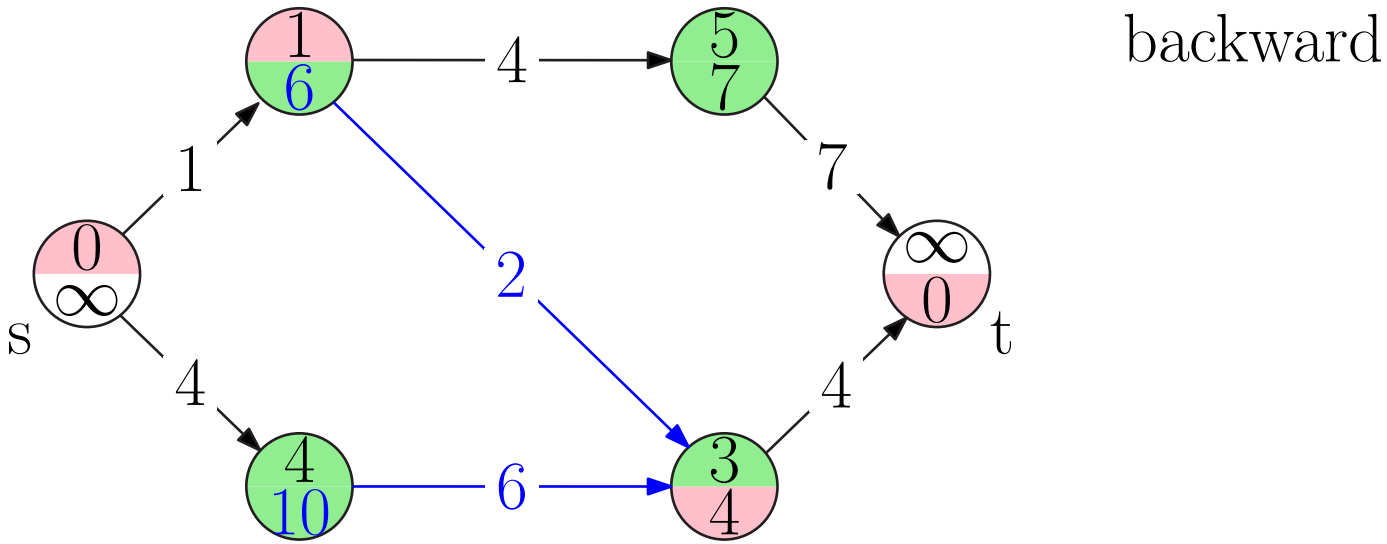
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



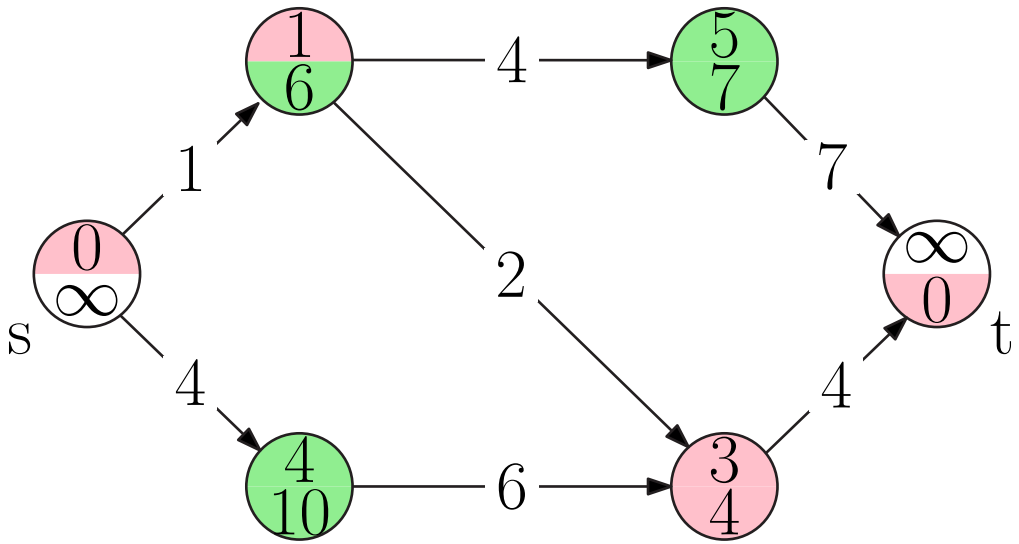
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



forward

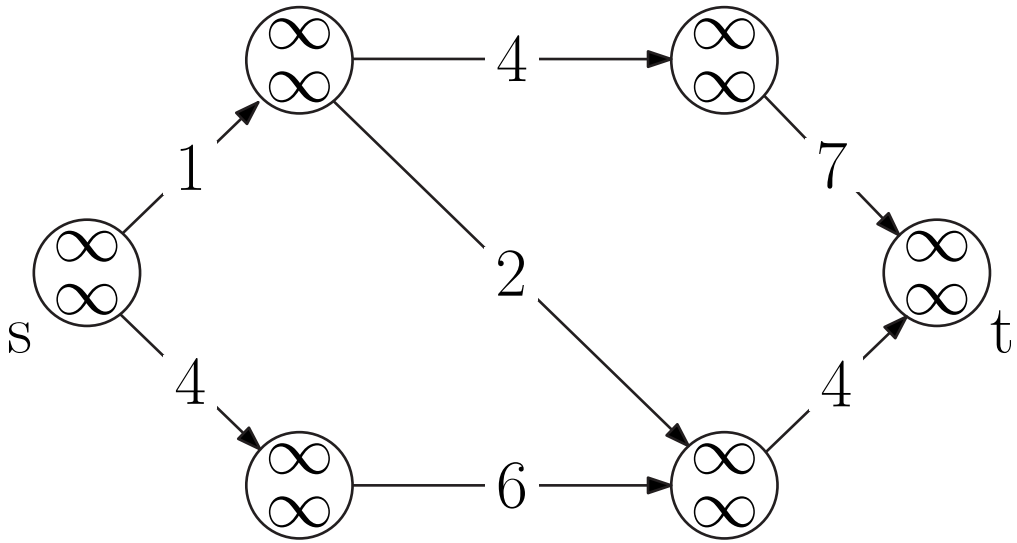
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



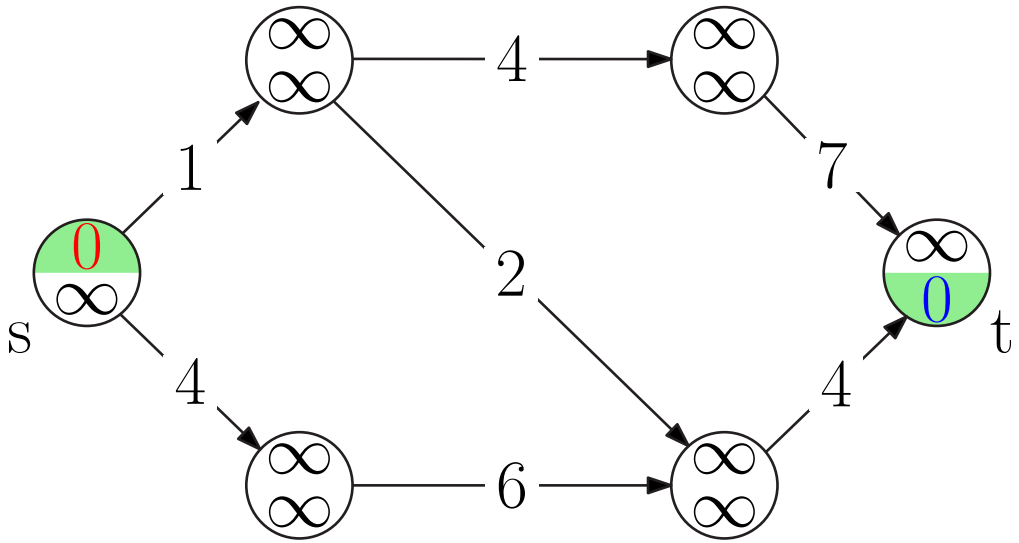
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



$d[s,t] = \infty$

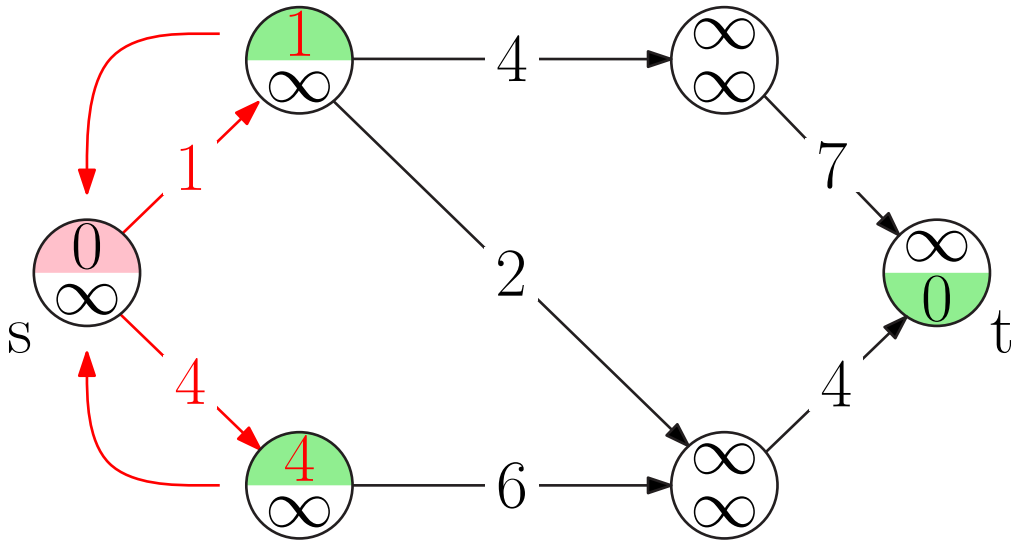
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



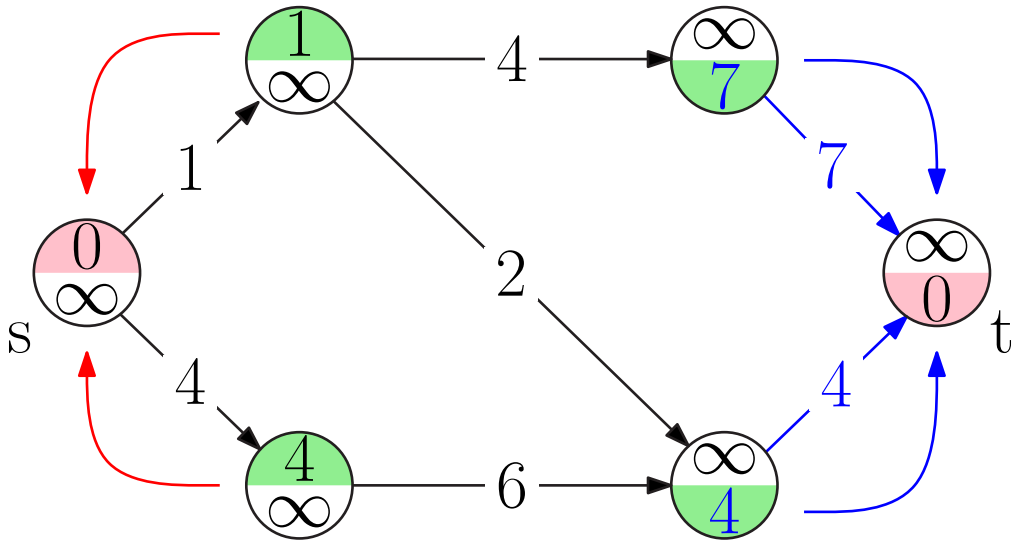
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



backward

$d[s,t] = \infty$

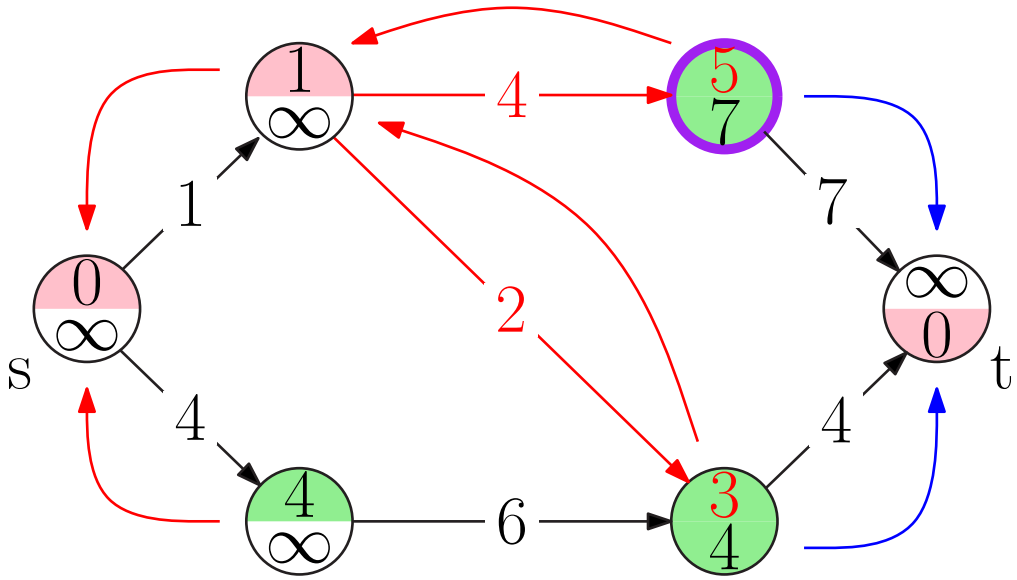
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 12$

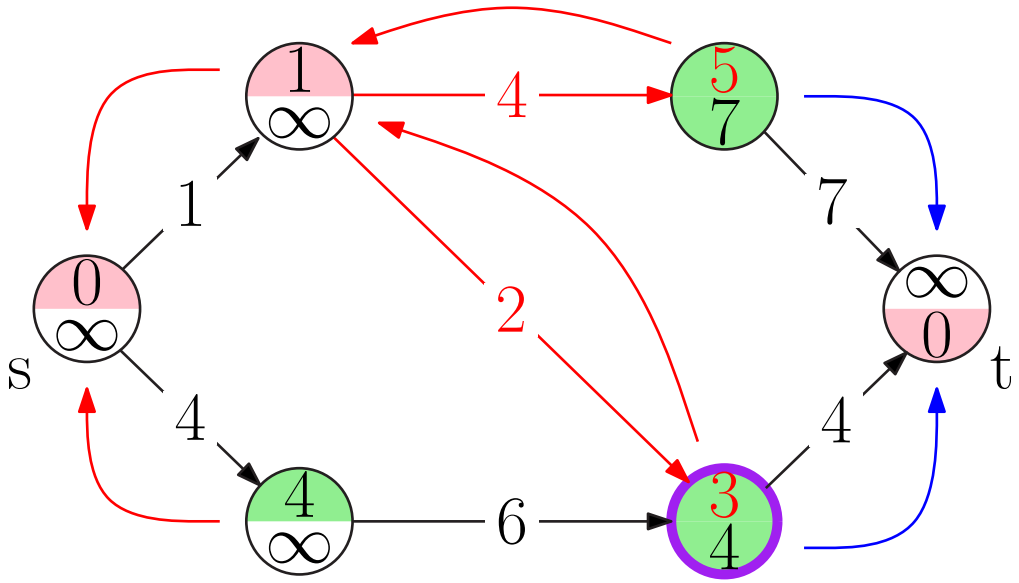
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

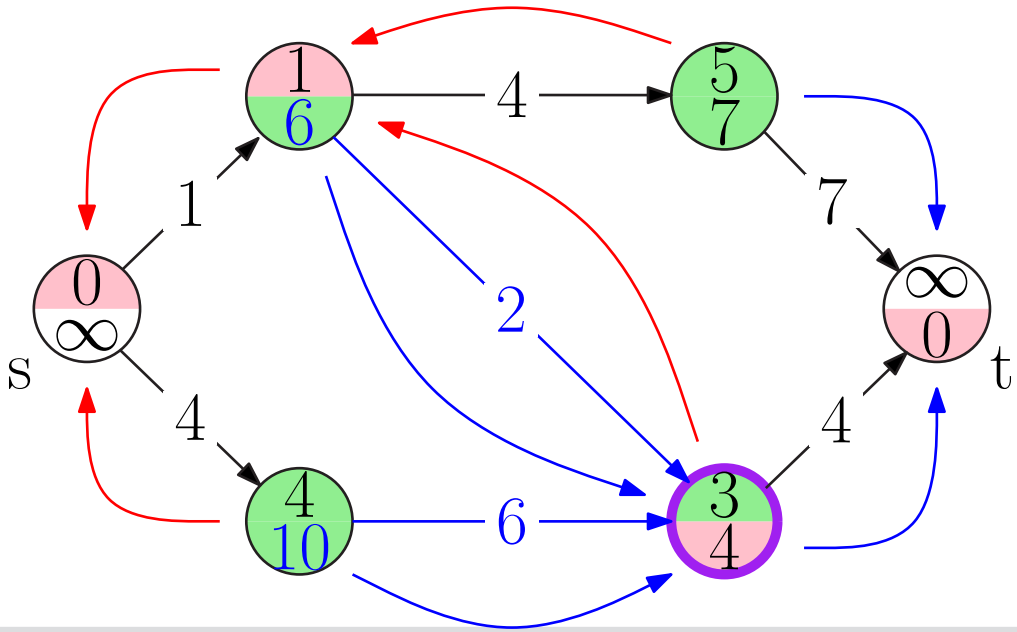
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



backward

$d[s,t] = 7$

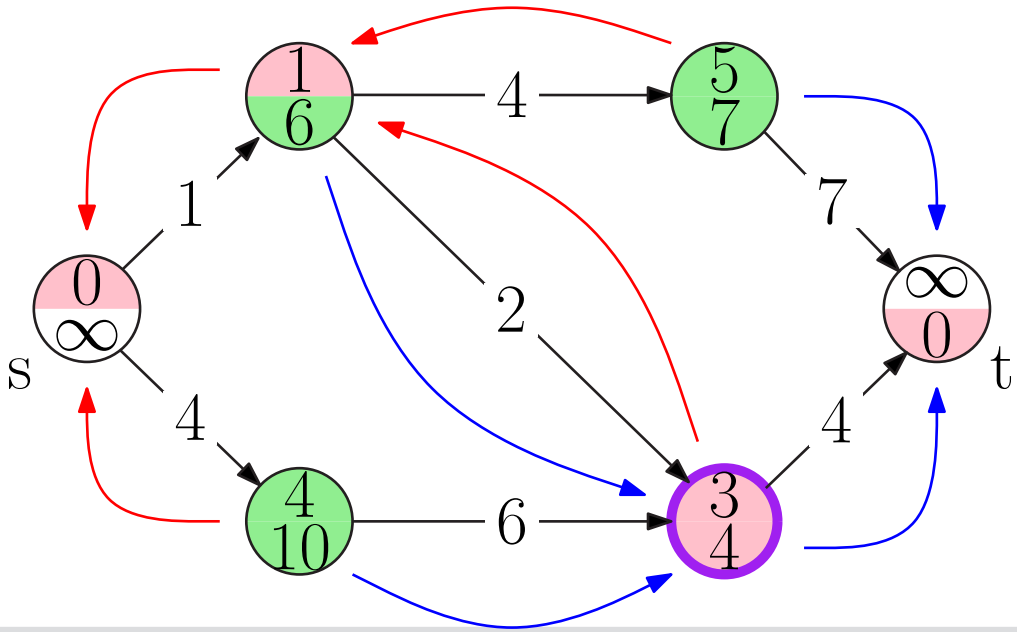
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

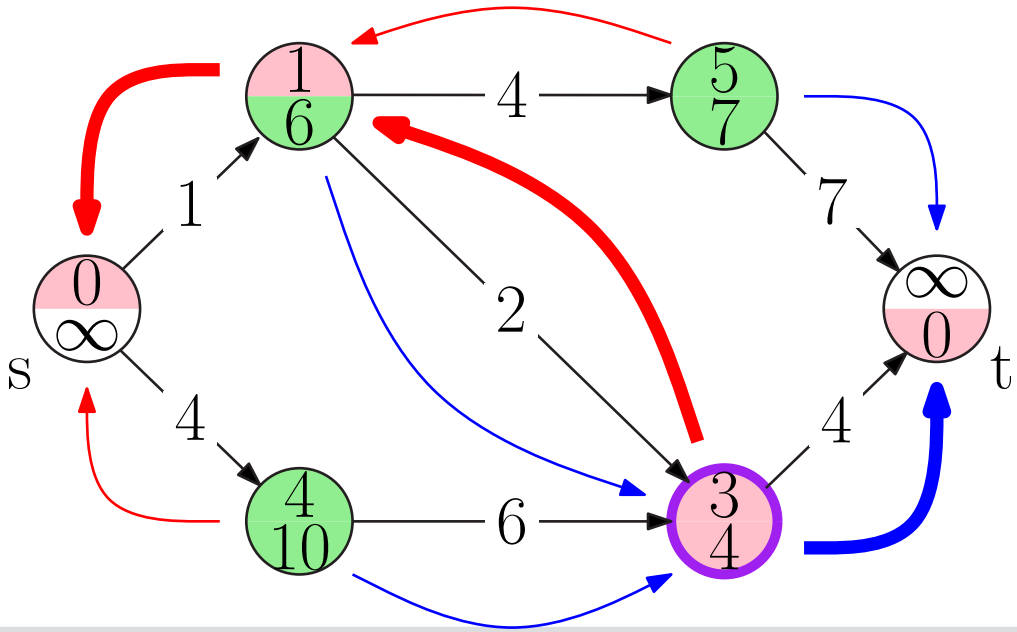
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

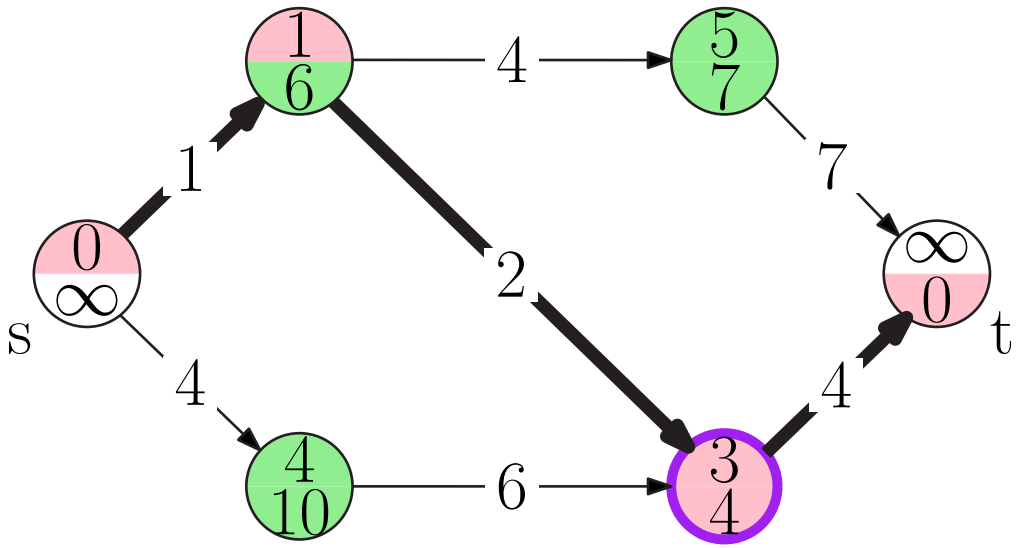
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

Suche in Graphen

A*-Suche

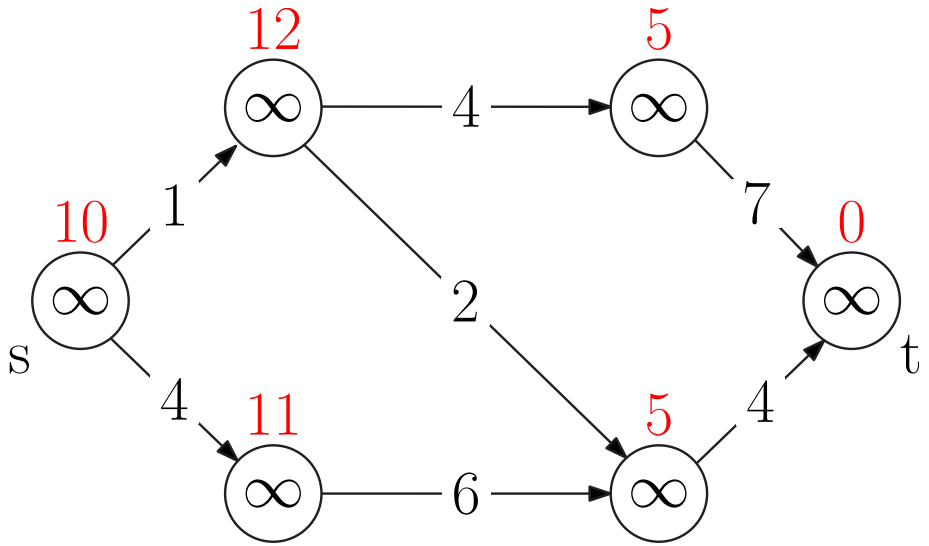
Eigenschaften

- zielgerichtete Suche
- benötigt Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
  - reduzierte Kantengewichte $\overline{c}(u, v) := c(u, v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u)$ bzw.
  - modifizierte Schlüssel $\overline{d}[v] := d[v] + \text{pot}(v)$

  $\rightarrow$ Abarbeitung der Knoten wird geändert (verbessert?)

  $\rightarrow$ kürzeste Pfade bleiben erhalten

Beispiel



Suche in Graphen

A*-Suche

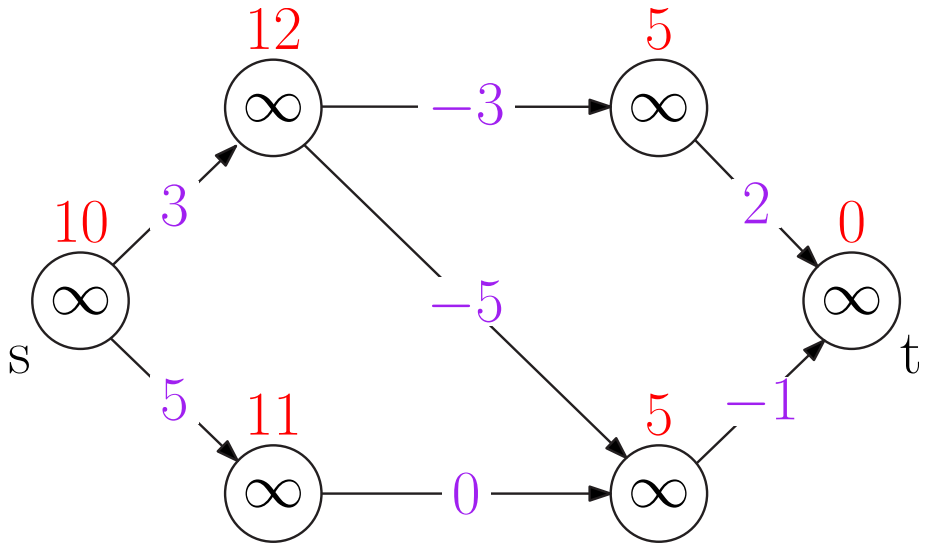
Eigenschaften

- zielgerichtete Suche
- benötigt Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
  - reduzierte Kantengewichte $\overline{c}(u, v) := c(u, v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u)$ bzw.
  - modifizierte Schlüssel $\overline{d}[v] := d[v] + \text{pot}(v)$

  $\rightarrow$ Abarbeitung der Knoten wird geändert (verbessert?)

  $\rightarrow$ kürzeste Pfade bleiben erhalten

Beispiel



Suche in Graphen

A*-Suche – Potentialfunktionen

Eigenschaften

- Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
- heuristische Funktion
  - modelliert vorhandenes Wissen über Graph
  - schätzt Distanz zum Ziel $\rightarrow \overline{d}[v]$ schätzt $\mu(s,t)$

gültige Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot)$

- untere Schranke für Distanz zum Ziel t
  $\rightarrow \text{pot}(u) \leq \mu(u,t) \quad \forall u \in V$
  (beendet Suche sobald t gescannt wurde)
- nicht-negative reduzierte Kantengewichte
  $\rightarrow \overline{c}(u,v) := c(u,v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u) \geq 0 \quad \forall (u,v) \in E$
  (für Dijkstras Algorithmus)

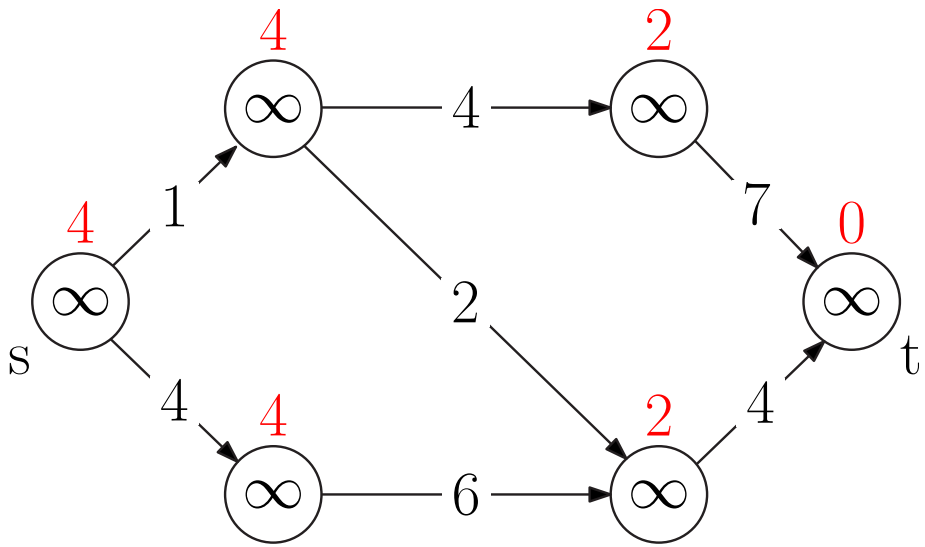
Suche in Graphen

A*-Suche – Potentialfunktionen

Woher nehmen?

- Manhattan-Distanz, euklidischer Abstand, . . .
  (benötigt geometrische Einbettung des Graphen)
- Distanzen zu Landmarken und Dreiecksungleichung
  (funktioniert ohne Einbettung)
- Erfahrungswerte
  (z.B. Bewertung von Spielsituationen)

Beispiel



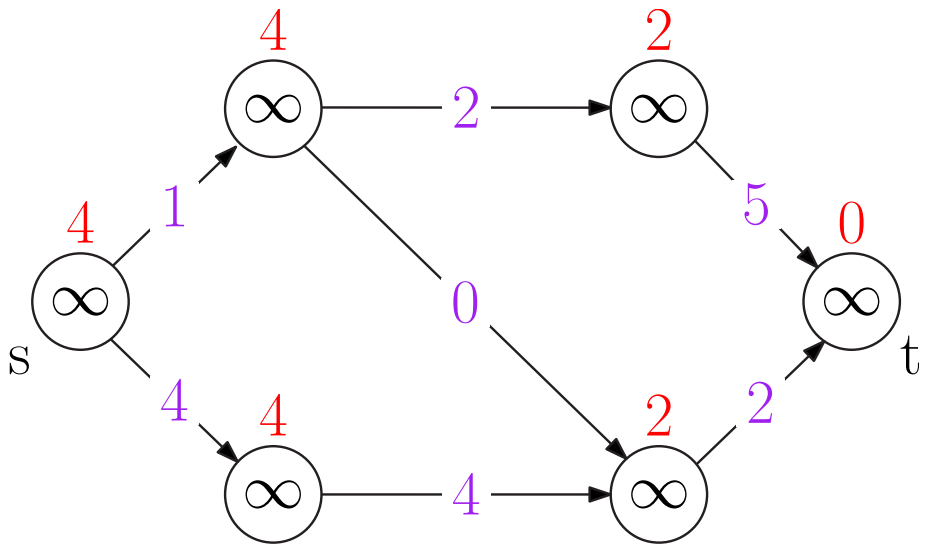
Suche in Graphen

A*-Suche – Potentialfunktionen

Woher nehmen?

- Manhattan-Distanz, euklidischer Abstand, . . .
  (benötigt geometrische Einbettung des Graphen)
- Distanzen zu Landmarken und Dreiecksungleichung
  (funktioniert ohne Einbettung)
- Erfahrungswerte
  (z.B. Bewertung von Spielsituationen)

Beispiel

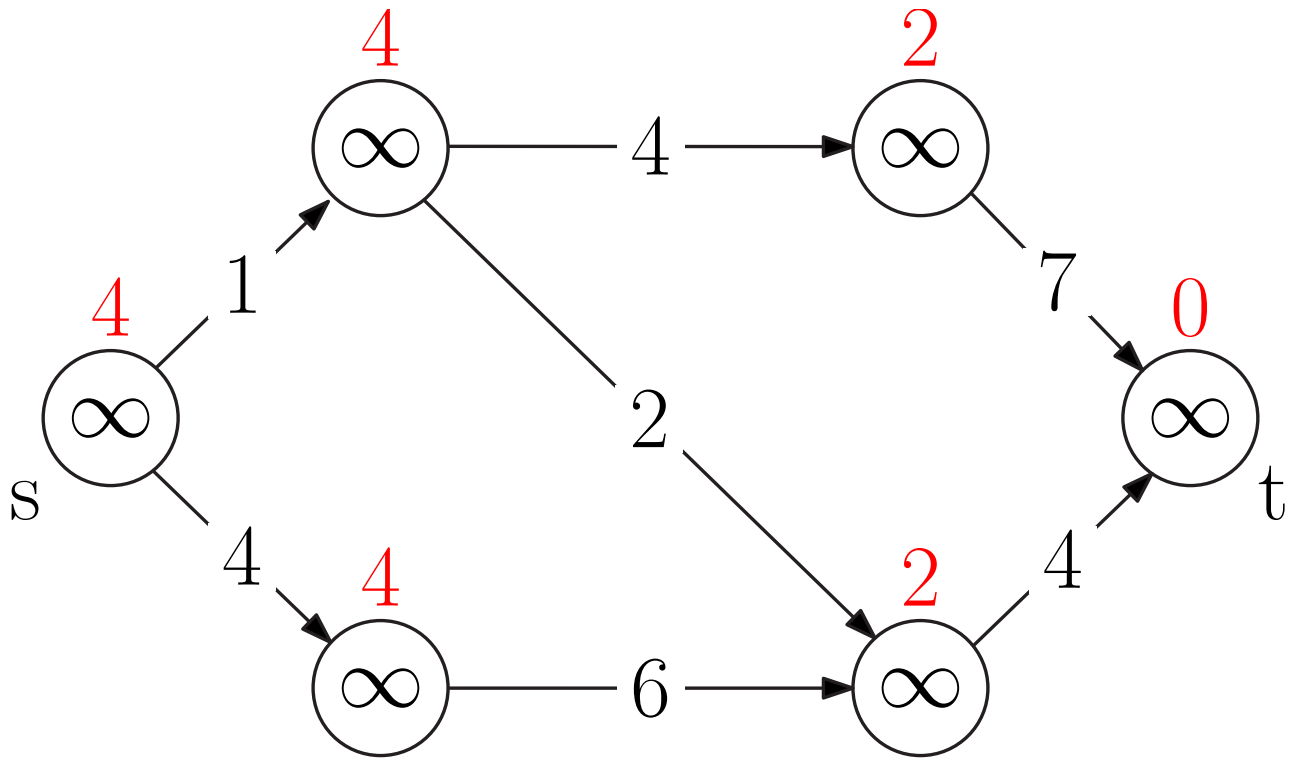


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

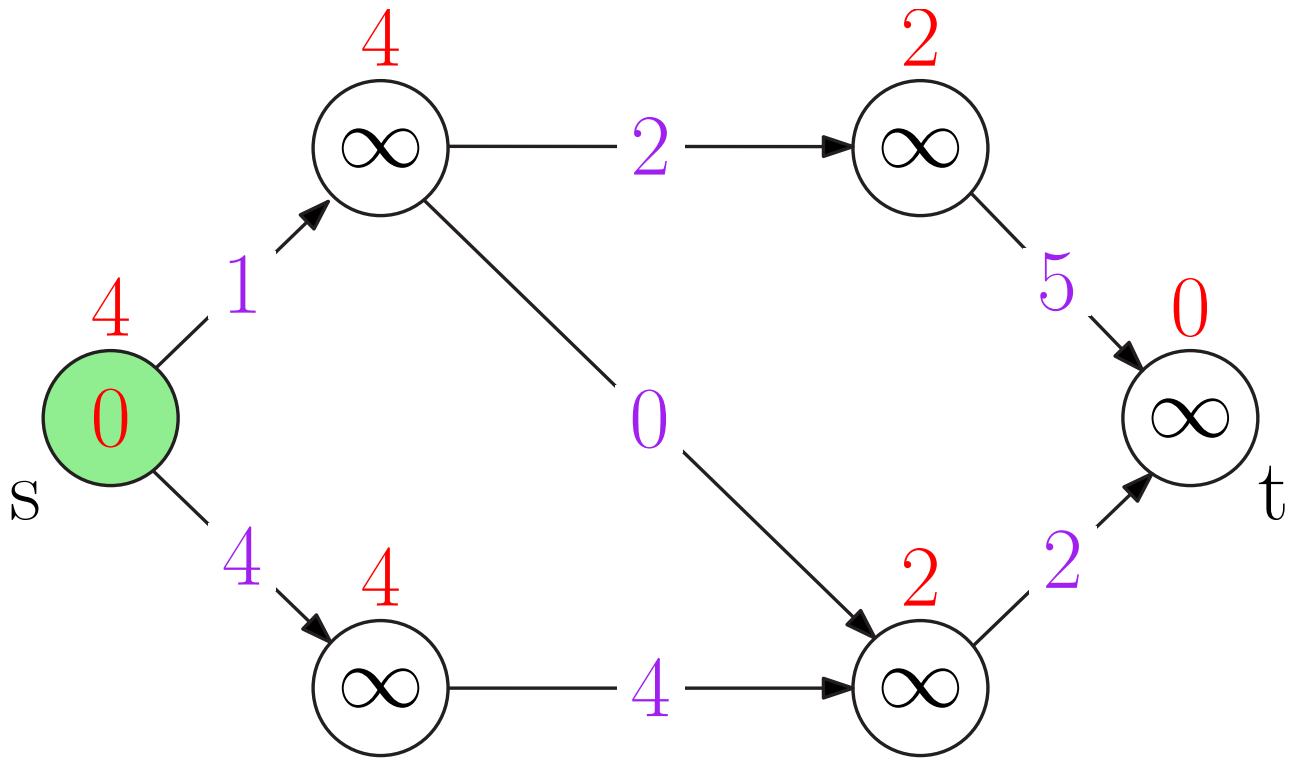


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

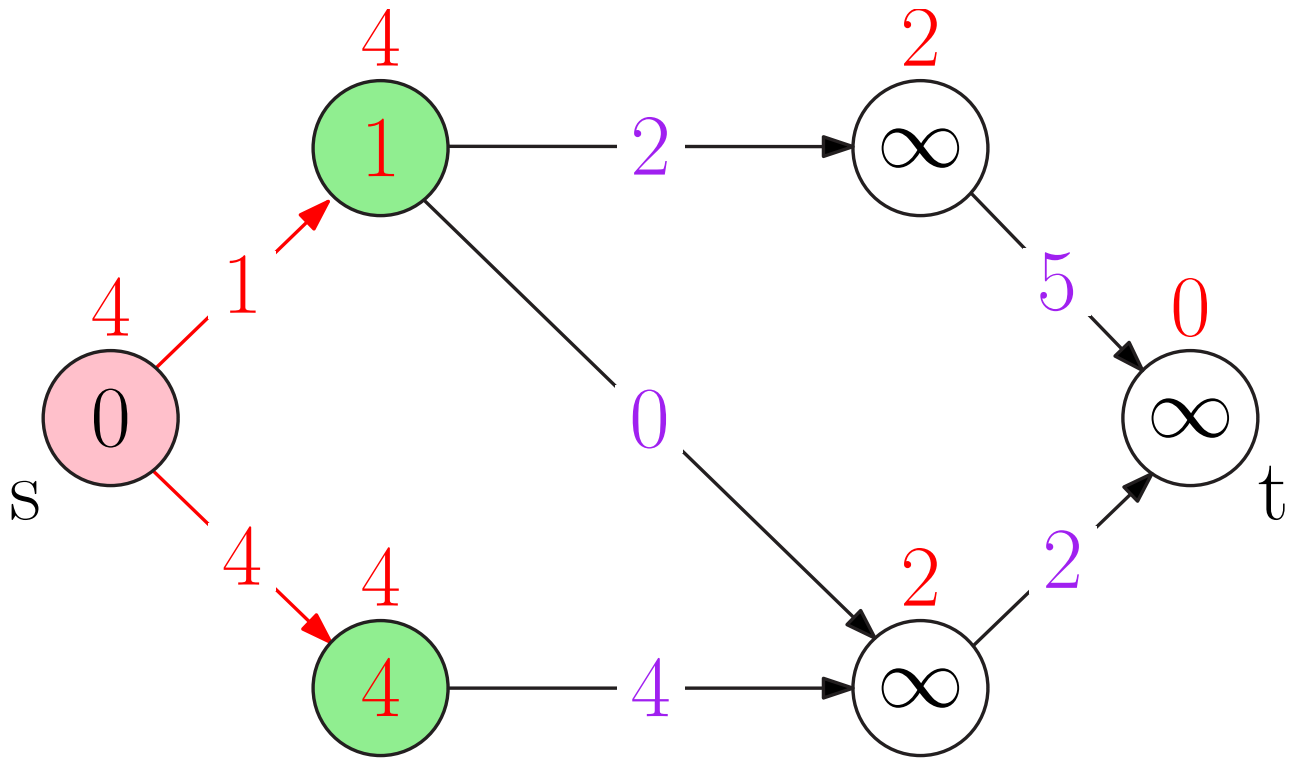


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

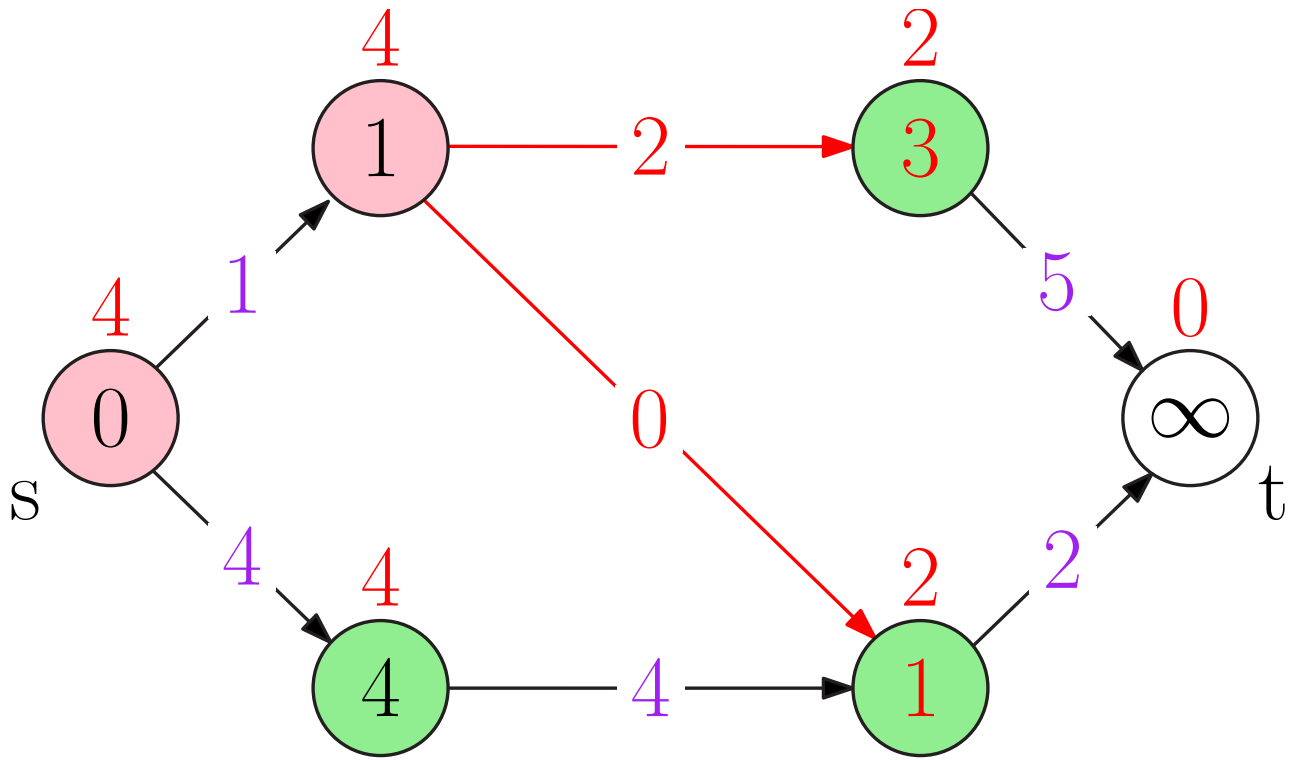


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

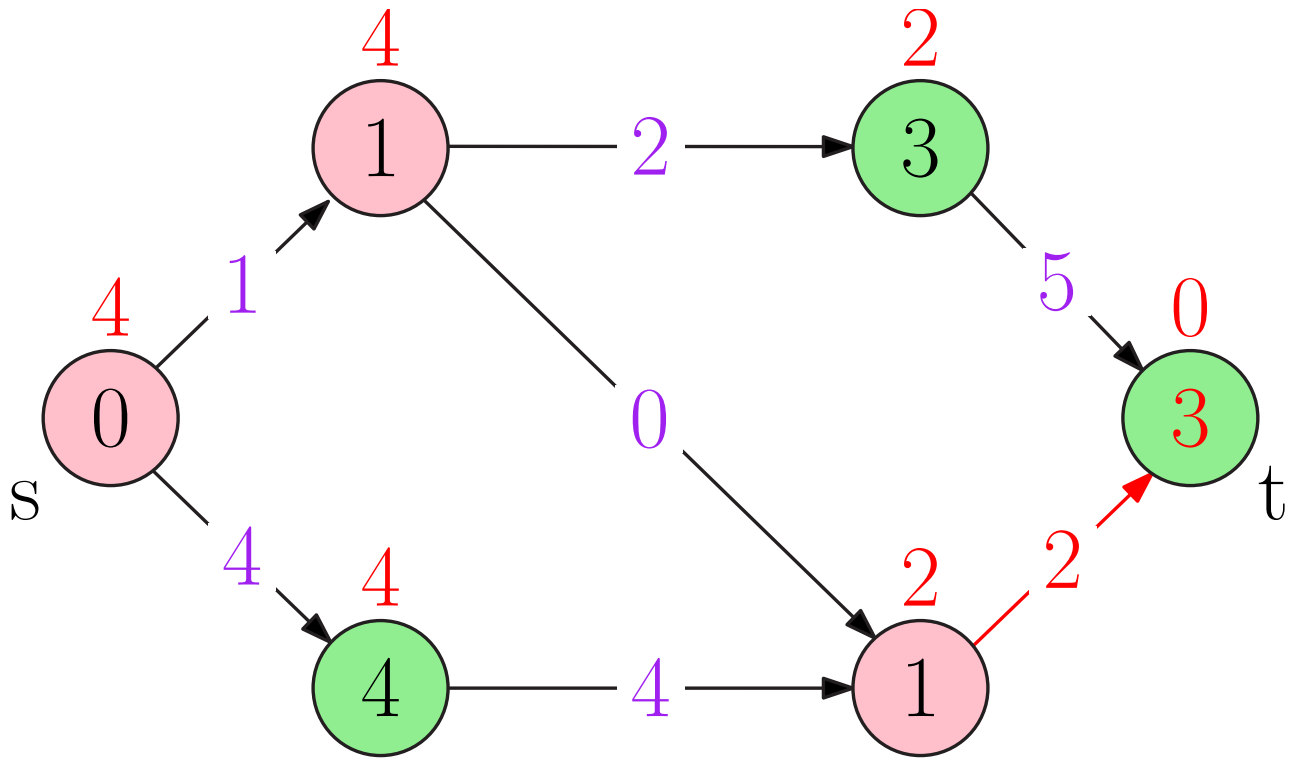


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

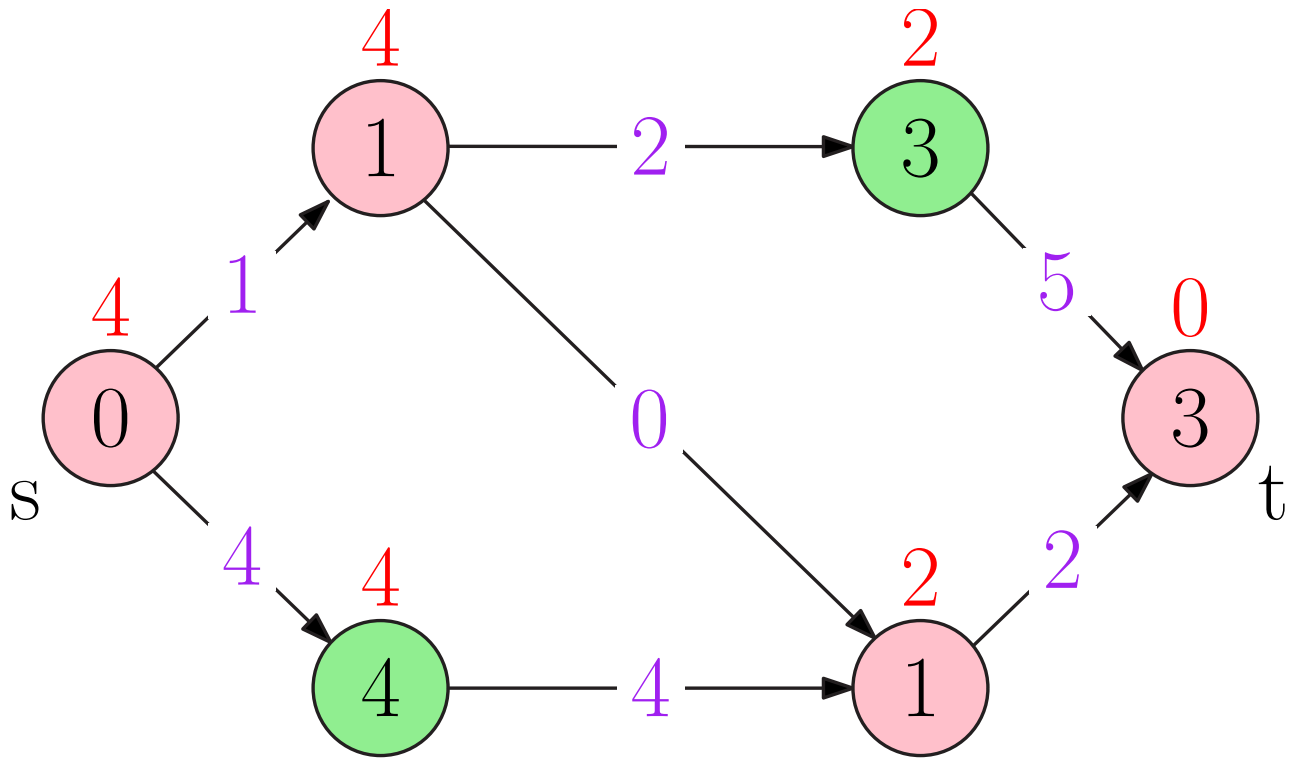


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

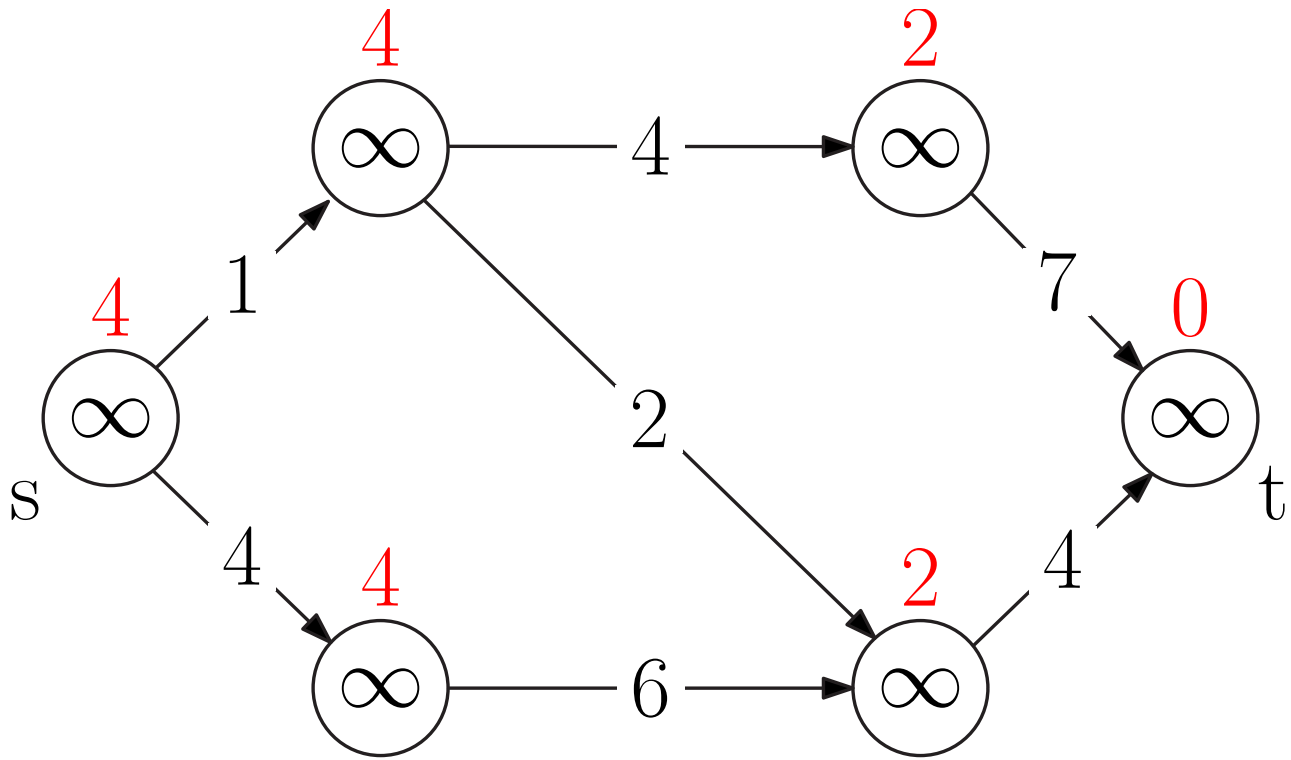


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

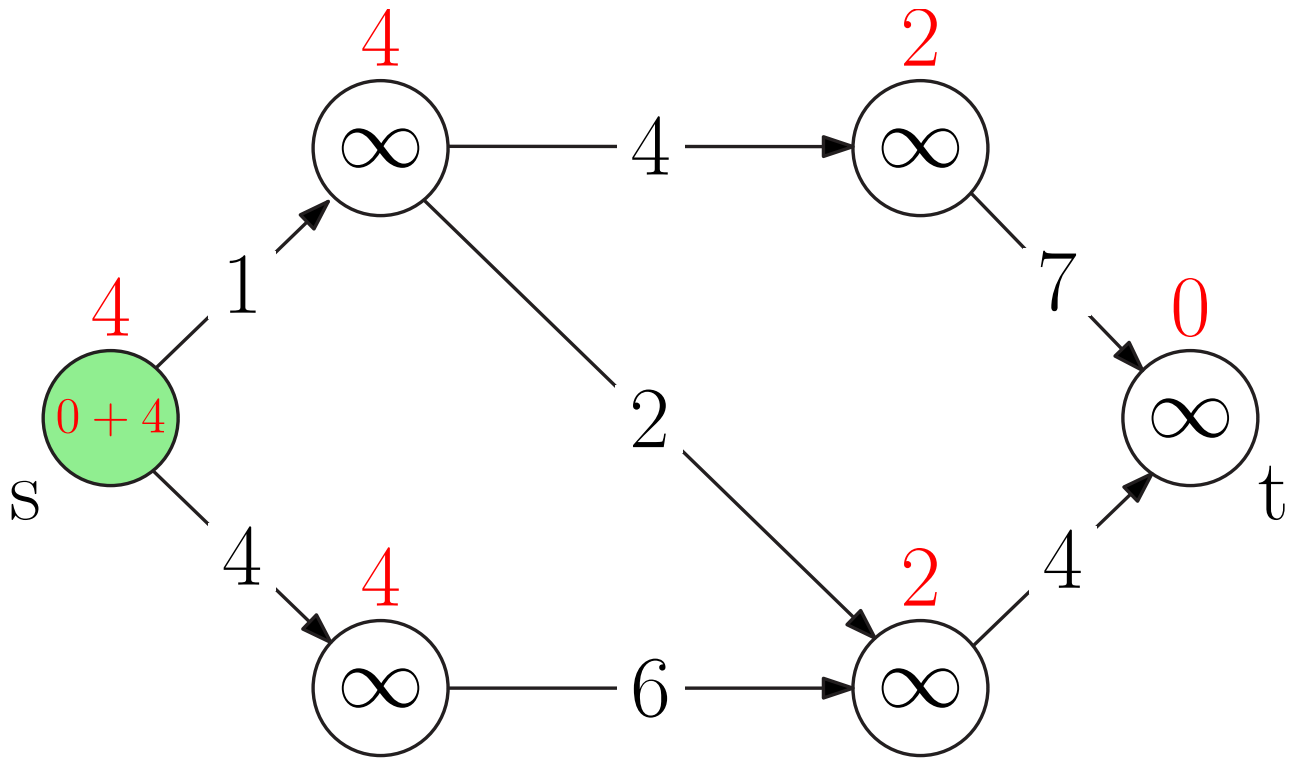


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

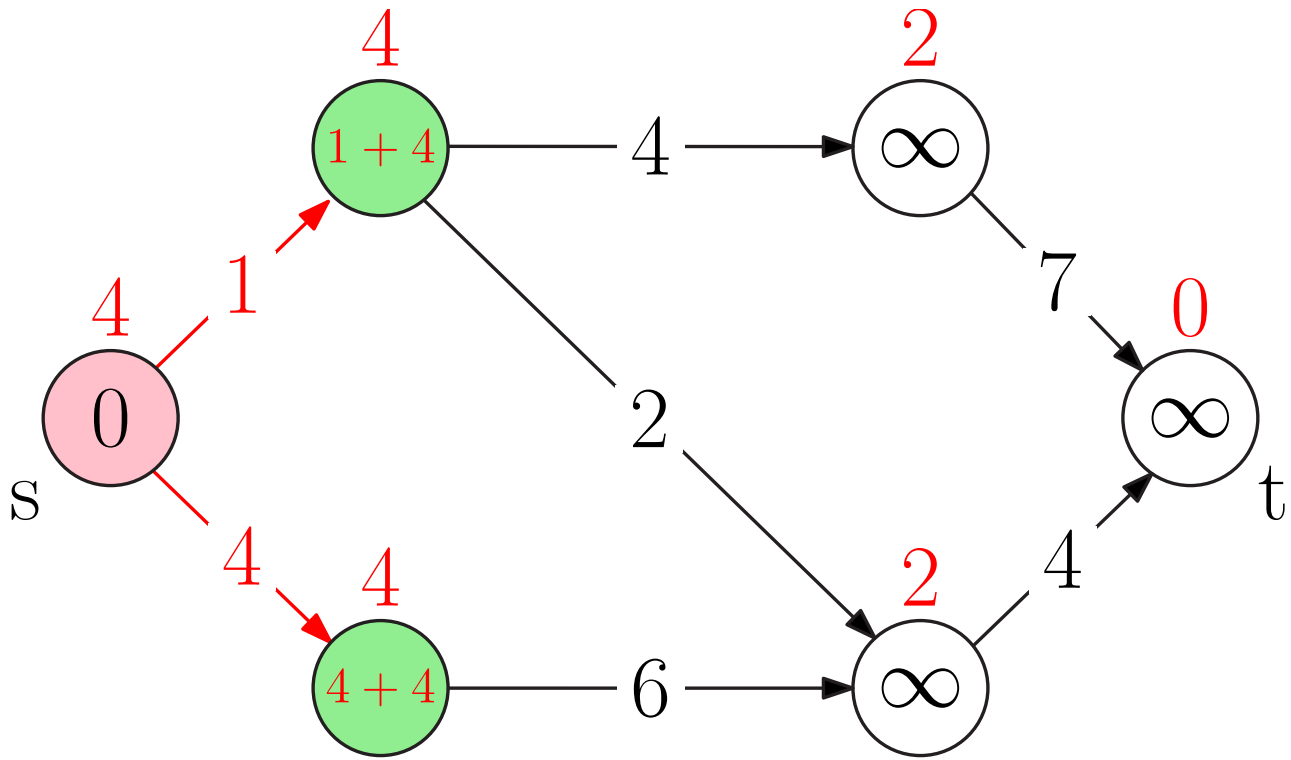


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

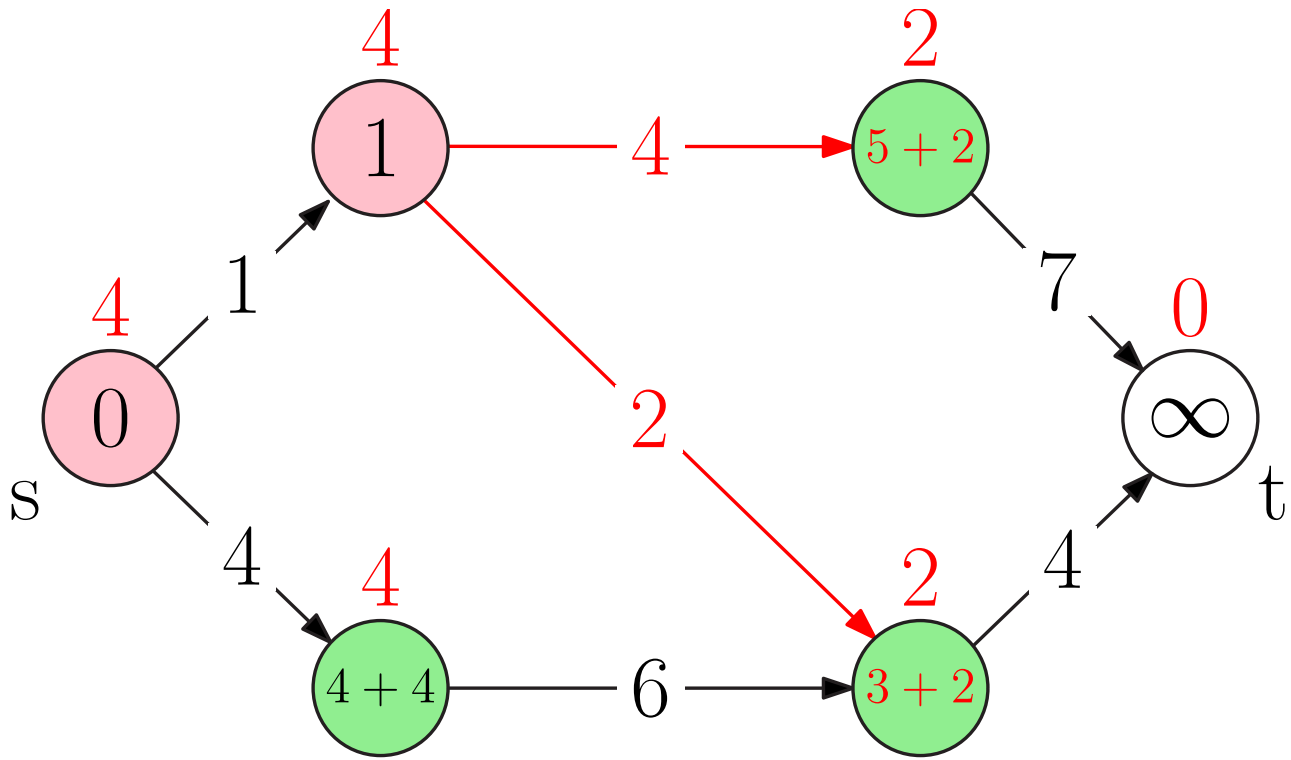


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

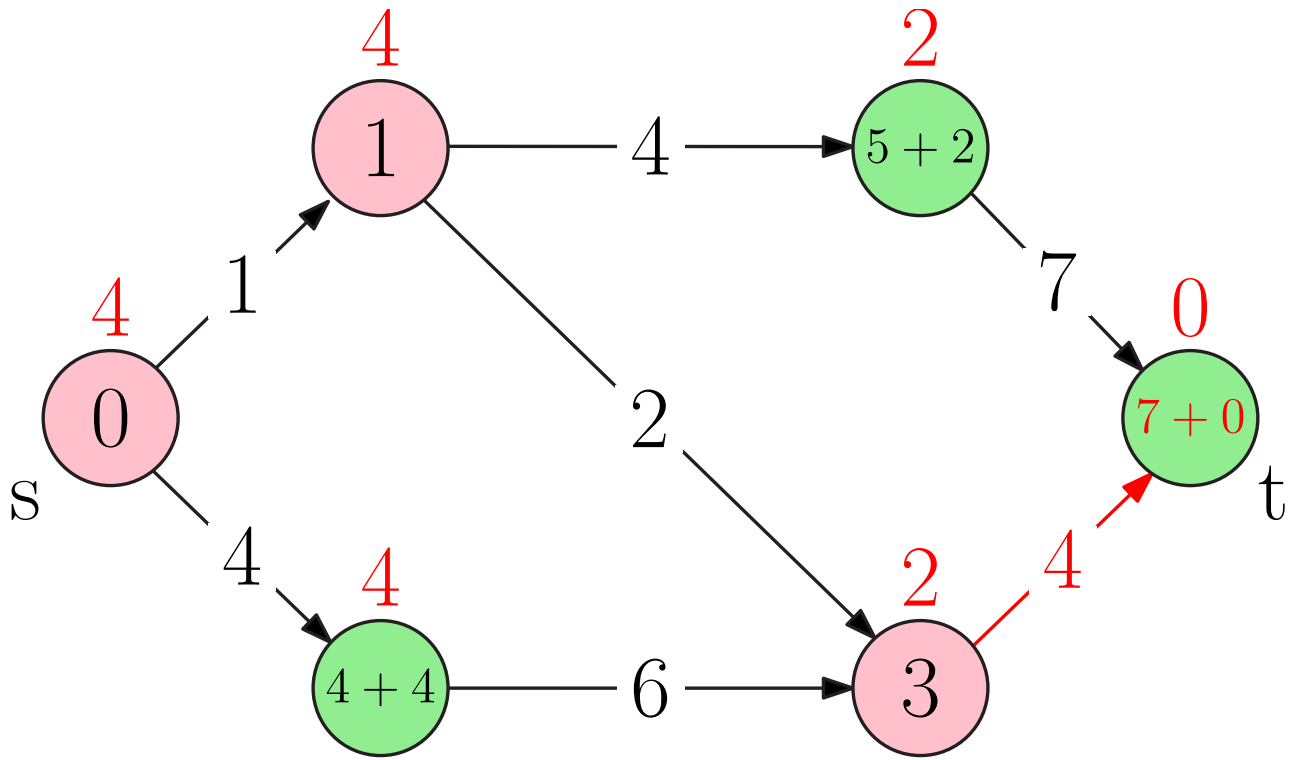


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*

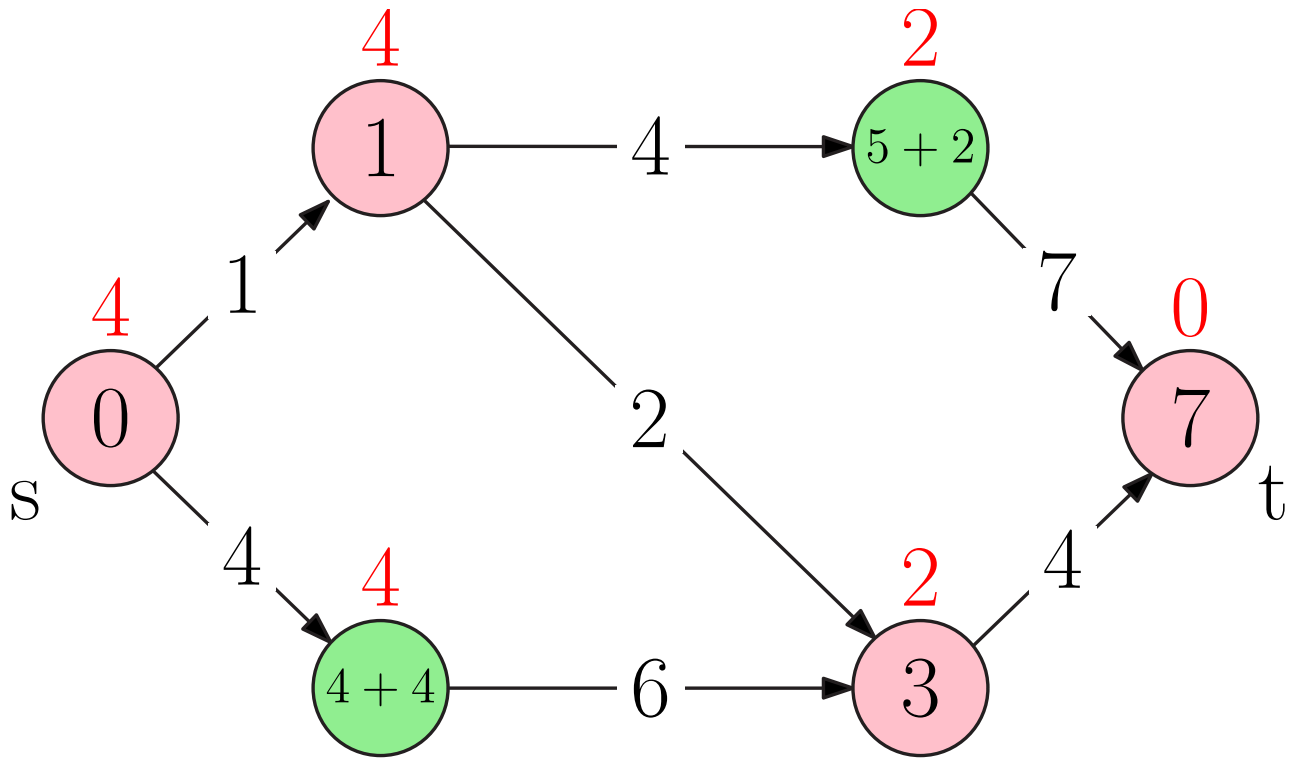


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*



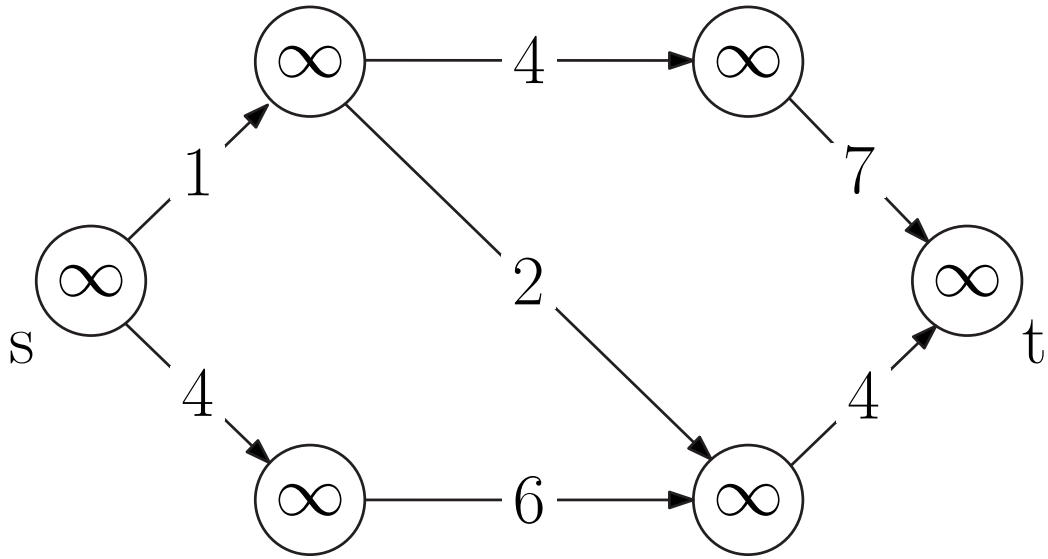
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Erster Ansatz

- $\text{pot}(v) := \mu(v, t)$ sei optimales Potential
  - Algorithmus besucht nur Knoten auf kürzesten Pfaden
  - zu hoher Speicherverbrauch $\rightarrow$ benötigt alle kürzesten Distanzen!

Beispiel



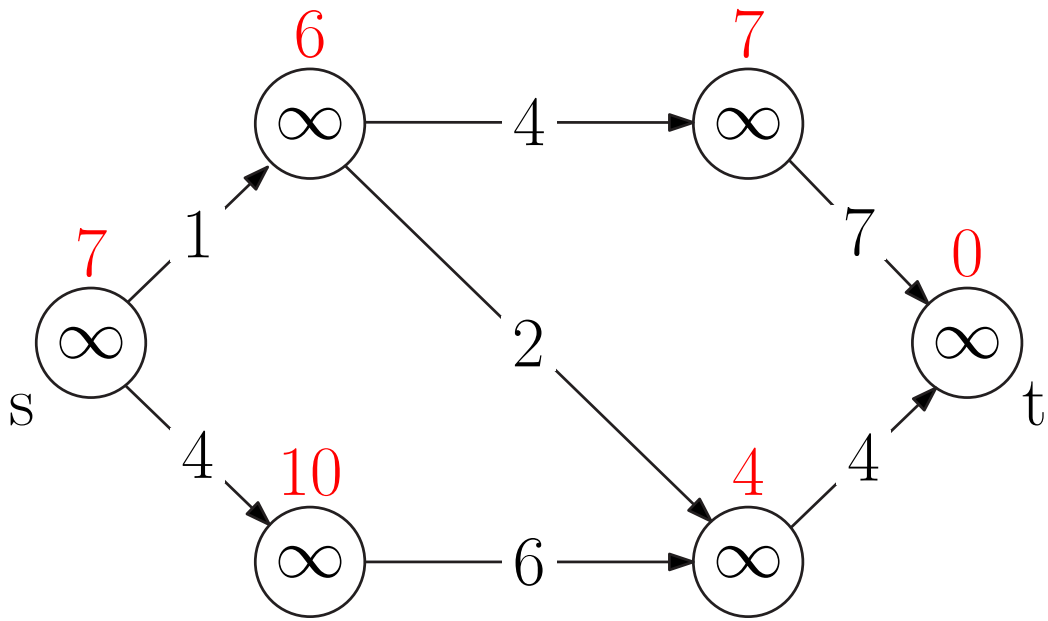
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Erster Ansatz

- $\text{pot}(v) := \mu(v, t)$ sei optimales Potential
  - Algorithmus besucht nur Knoten auf kürzesten Pfaden
  - zu hoher Speicherverbrauch $\rightarrow$ benötigt alle kürzesten Distanzen!

Beispiel



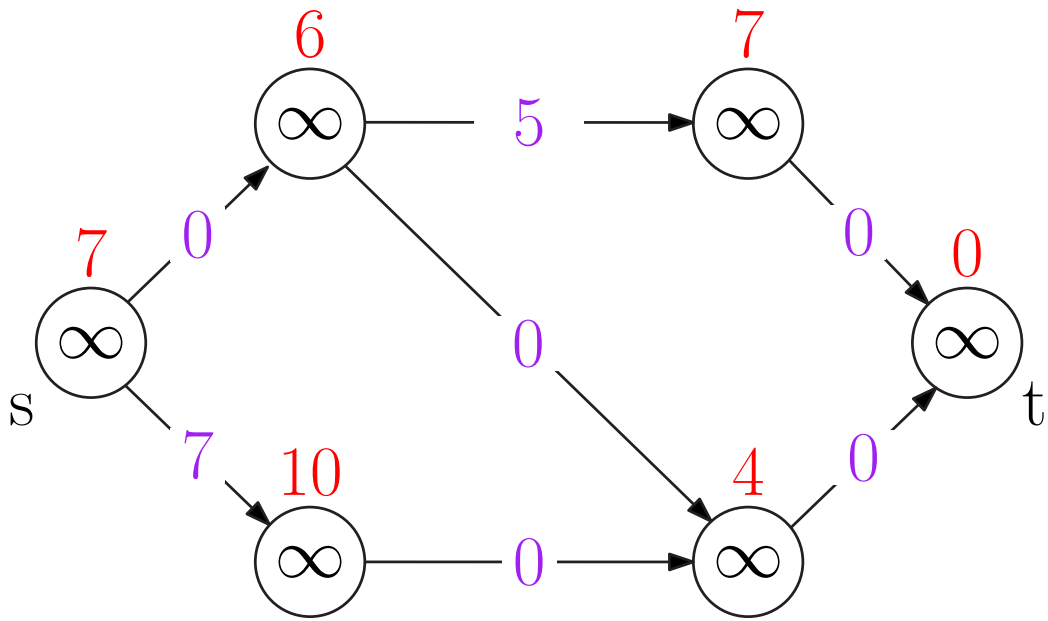
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Erster Ansatz

- $\text{pot}(v) := \mu(v, t)$ sei optimales Potential
  - Algorithmus besucht nur Knoten auf kürzesten Pfaden
  - zu hoher Speicherverbrauch $\rightarrow$ benötigt alle kürzesten Distanzen!

Beispiel



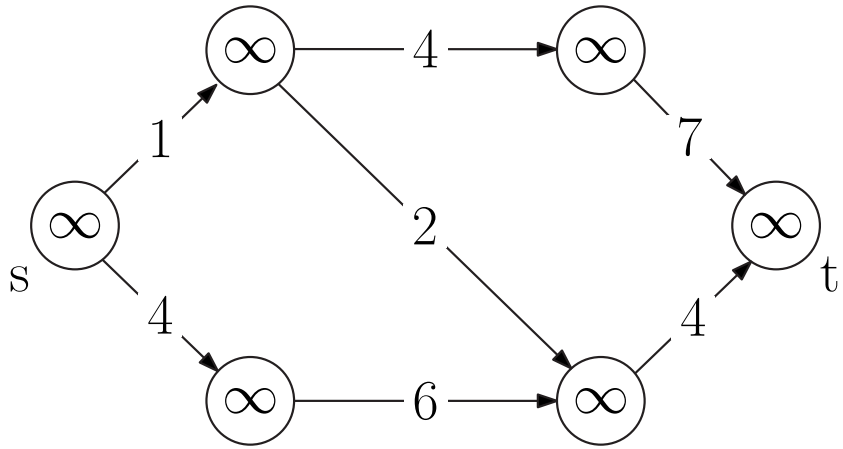
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Kompromiss

- berechne Potential für einige Knoten l (Landmarken)
- bei konkreter Anfrage:
  - wähle Landmarke l hinter dem Ziel t (heuristisch)
  - verwende Potential $\text{pot}(v) := \mu(v, l) - \mu(t, l)$

Beispiel



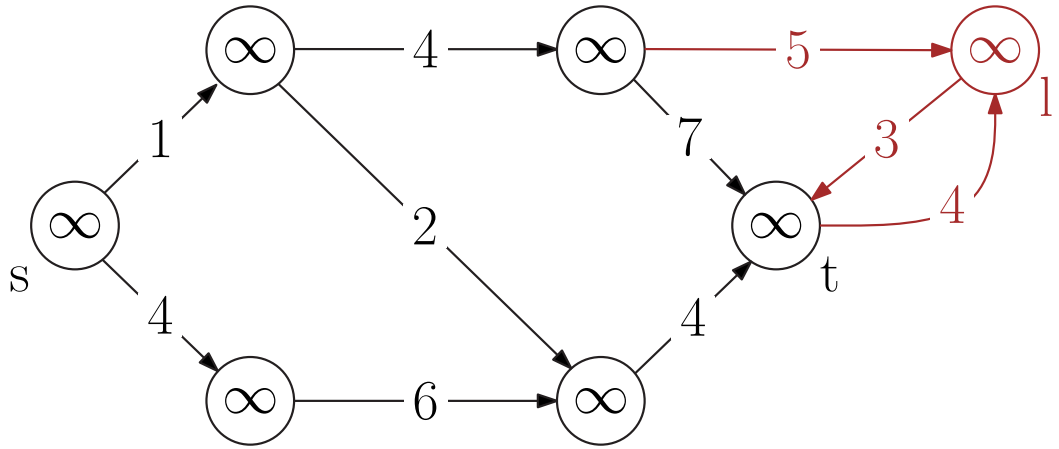
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Kompromiss

- berechne Potential für einige Knoten l (Landmarken)
- bei konkreter Anfrage:
  - wähle Landmarke l hinter dem Ziel t (heuristisch)
  - verwende Potential $\text{pot}(v) := \mu(v, l) - \mu(t, l)$

Beispiel



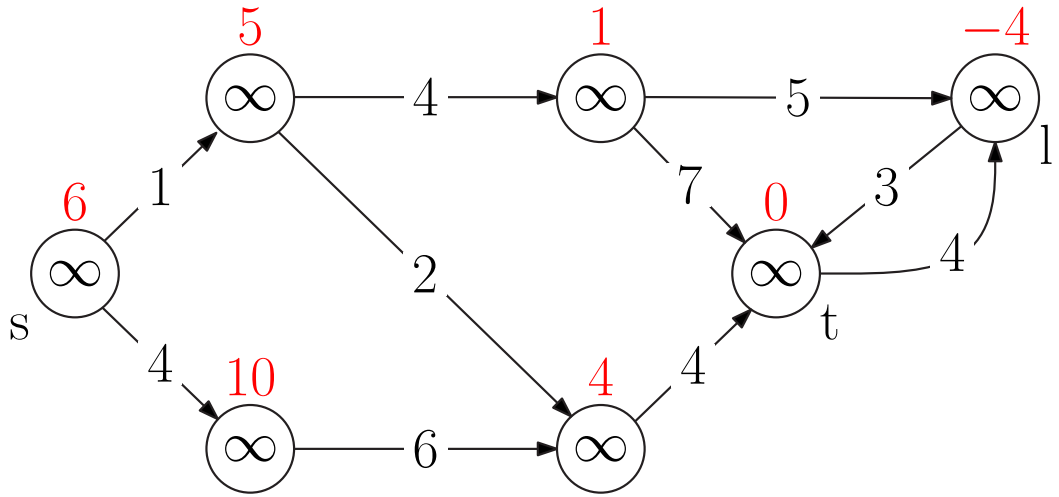
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Kompromiss

- berechne Potential für einige Knoten *l* (Landmarken)
- bei konkreter Anfrage:
  - wähle Landmarke *l* hinter dem Ziel *t* (heuristisch)
  - verwende Potential $\text{pot}(v) := \mu(v, l) - \mu(t, l)$

Beispiel



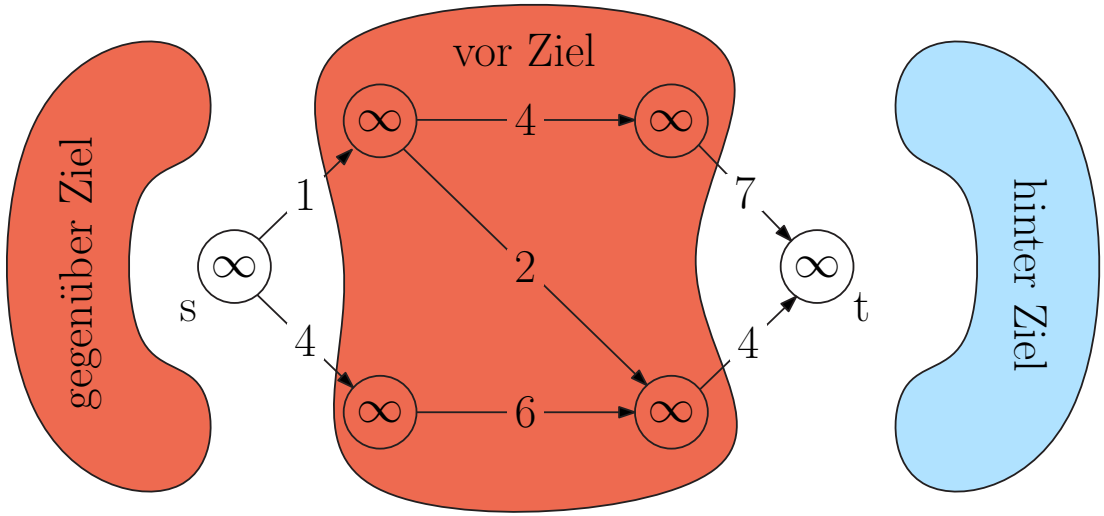
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Was passiert bei schlechter Landmarke (vor/gegenüber Ziel)?
  → Korrektheit?
  → Laufzeit?

Beispiel

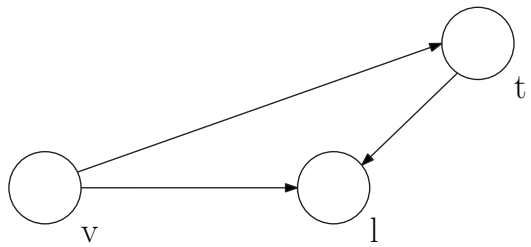


Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Korrektheit:
  immer korrekt dank Dreiecksungleichung
  - untere Schranke für Distanz zum Ziel t
    $\text{pot}(v) = \mu(v,l) - \mu(t,l) \leq \mu(v,t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(v,l) \leq \mu(v,t) + \mu(t,l)$
  - nicht-negative reduzierte Kantengewichte
    $$\begin{aligned}\overline{c}(u,v) &= c(u,v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u) \\ &= c(u,v) + \mu(v,l) - \mu(t,l) - \mu(u,l) + \mu(t,l) \\ &= c(u,v) + \mu(v,l) - \mu(u,l) \geq 0 \quad \forall (u,v) \in E\end{aligned}$$

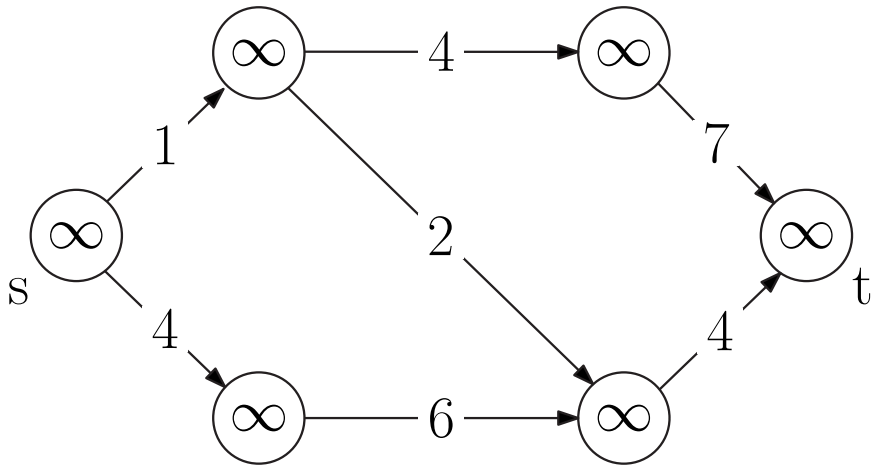


Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Laufzeit:
  Algorithmus sucht in falscher Richtung → langsam!
- Beispiel

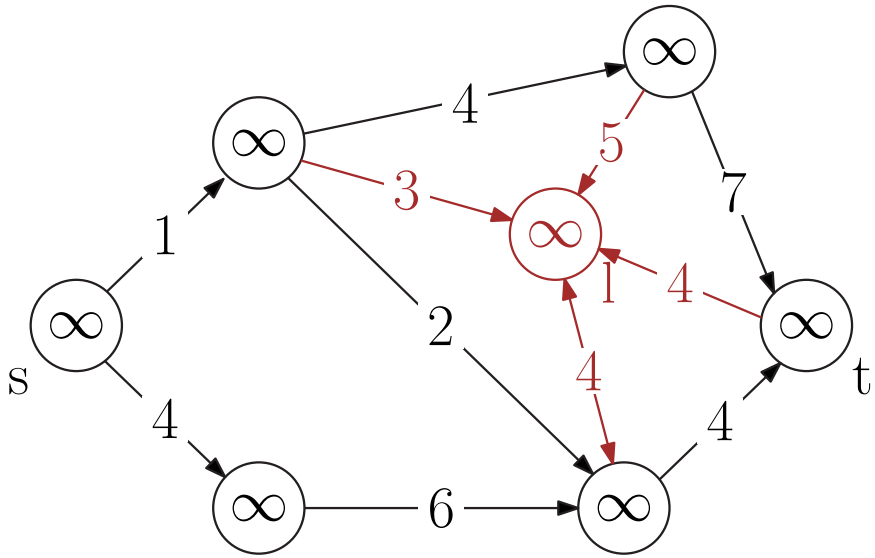


Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Laufzeit:
  Algorithmus sucht in falscher Richtung → langsam!
- Beispiel

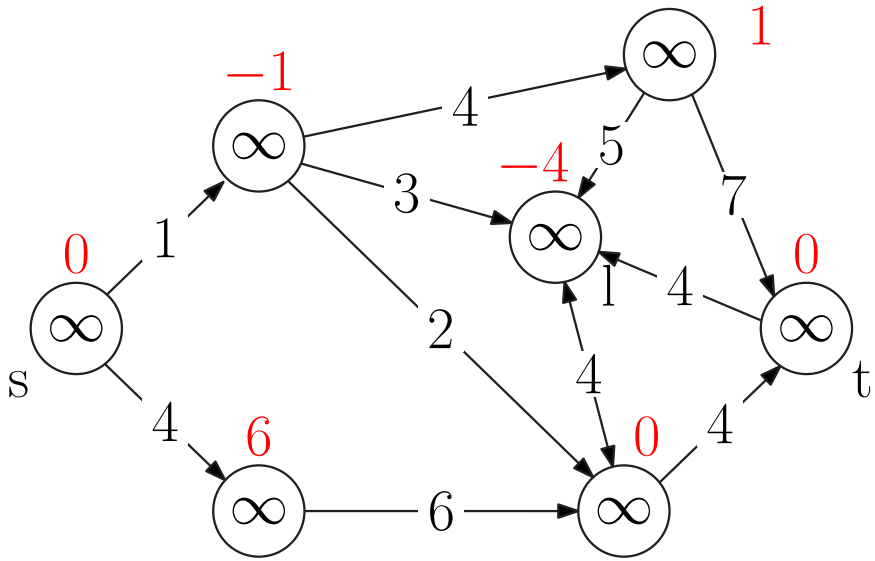


Suche in Graphen

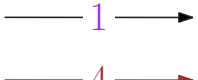
A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

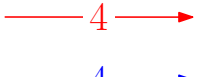
- Laufzeit:
  Algorithmus sucht in falscher Richtung → langsam!
- Beispiel



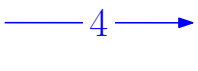
Legende



Kante mit Gewicht 4

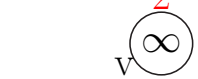


Kante mit Gewicht 4, wird gerade in Vorwärtsrichtung betrachtet



Kante mit Gewicht 4, wird gerade in Rückwärtsrichtung betrachtet

Kante mit reduziertem Gewicht 1



neu eingefügte Kante mit Gewicht 4

Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = \infty$ und Potential $pot[v] = 2$

erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 2$ (in *Priority Queue*)

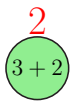
erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 1$ (in *Priority Queue*)
(obere Schranke gerade verkleinert)

gescannter Knoten v mit exakter Distanz vom Start $d[v] = 1$ (aus *Priority Queue* entfernt)

Knoten in Vorwärtsrichtung gescannt mit exakter Distanz vom Start $d_{fwd}[v] = 1$,
in Rückwärtsrichtung erreicht mit oberer Schranke für Distanz zum Ziel $d_{bwd}[v] = 3$

Knoten in Vorwärtsrichtung gescannt mit $d_{fwd}[v] = 1$, in Rückwärtsrichtung erreicht mit $d_{bwd}[v] = 2$
(obere Schranke in Rückwärtsrichtung gerade verkleinert)

aktueller Treffpunkt von Vorwärts- und Rückwärtssuche mit minimalem $d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v] = 3$



erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 2$ (in *Priority Queue*)
(Schlüssel in *Priority Queue* ist $d[v] + \text{pot[v]} = 3 + 2$)

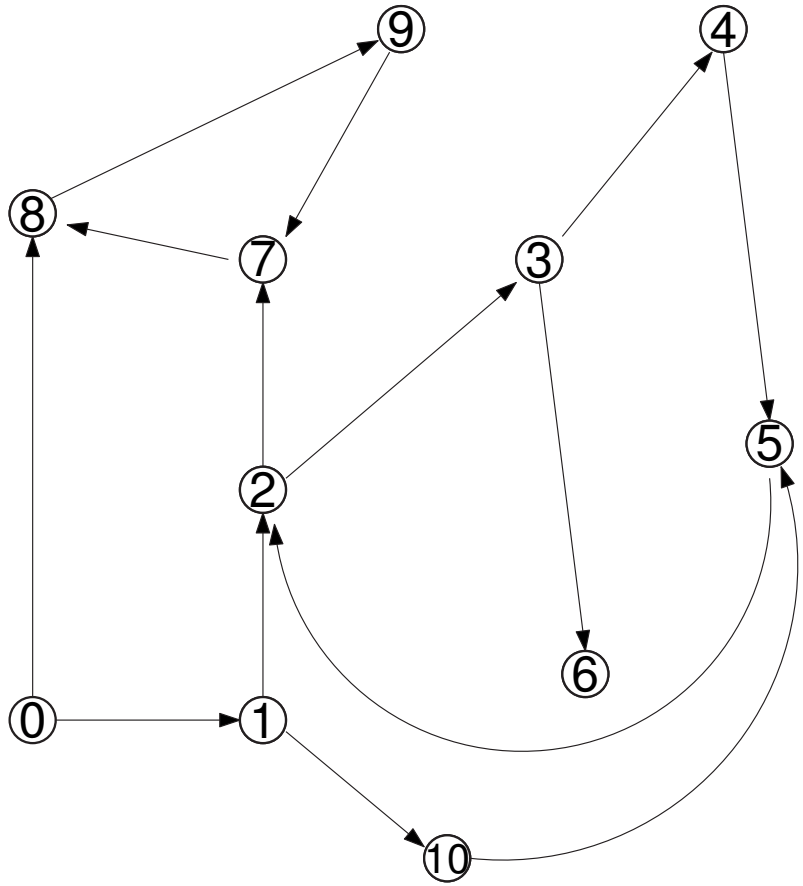
Zeiger auf Vorgänger
(in Vorwärtsrichtung)

Zeiger auf Vorgänger
(in Rückwärtsrichtung)

neu eingefügter Knoten

Starke Zusammenhangskomponenten

SCC (Wiederholung)



oNodes	oReps

SCC (Wiederholung)

Invariante 1

Kein Kanten von geschlossenen in offene Komponenten.

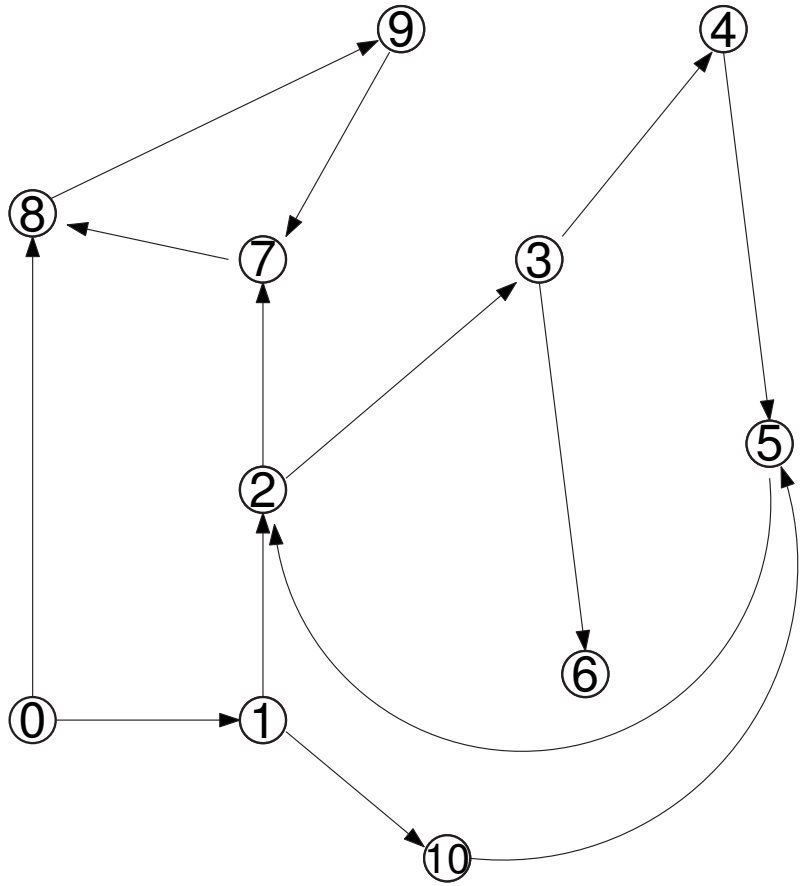
Invariante 2

Offene Komponenten liegen auf Pfad.

Invariante 3

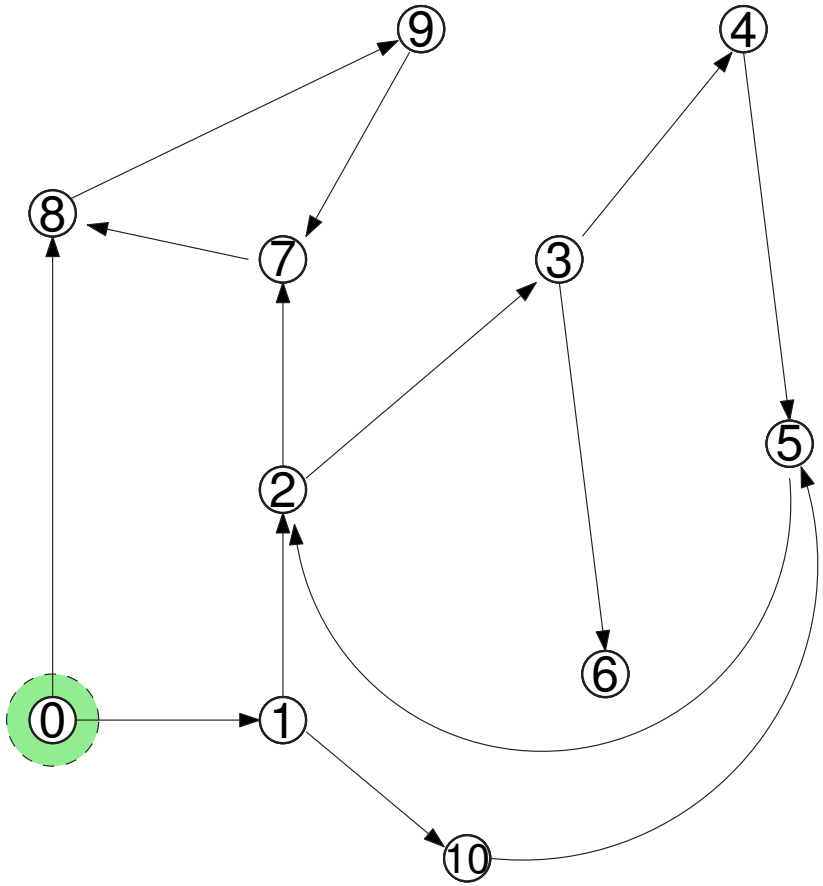
Repräsentanten partitionieren offene Komponenten bzgl. dfsNum.

SCC (Wiederholung)



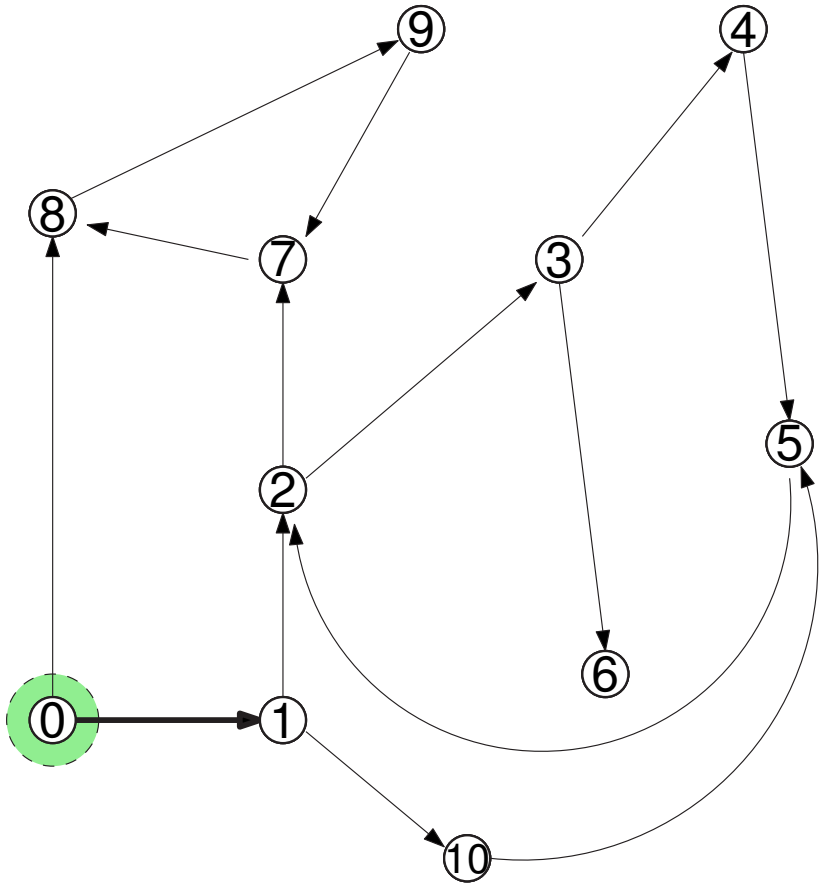
oNodes	oReps

SCC (Wiederholung)



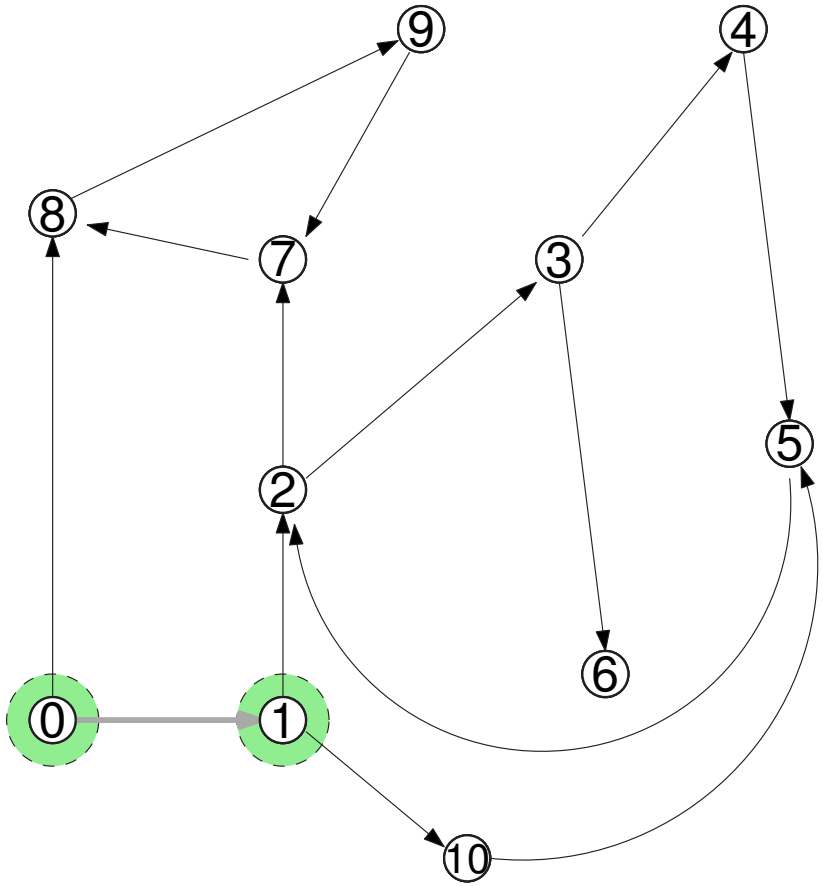
oNodes	oReps
0	0

SCC (Wiederholung)



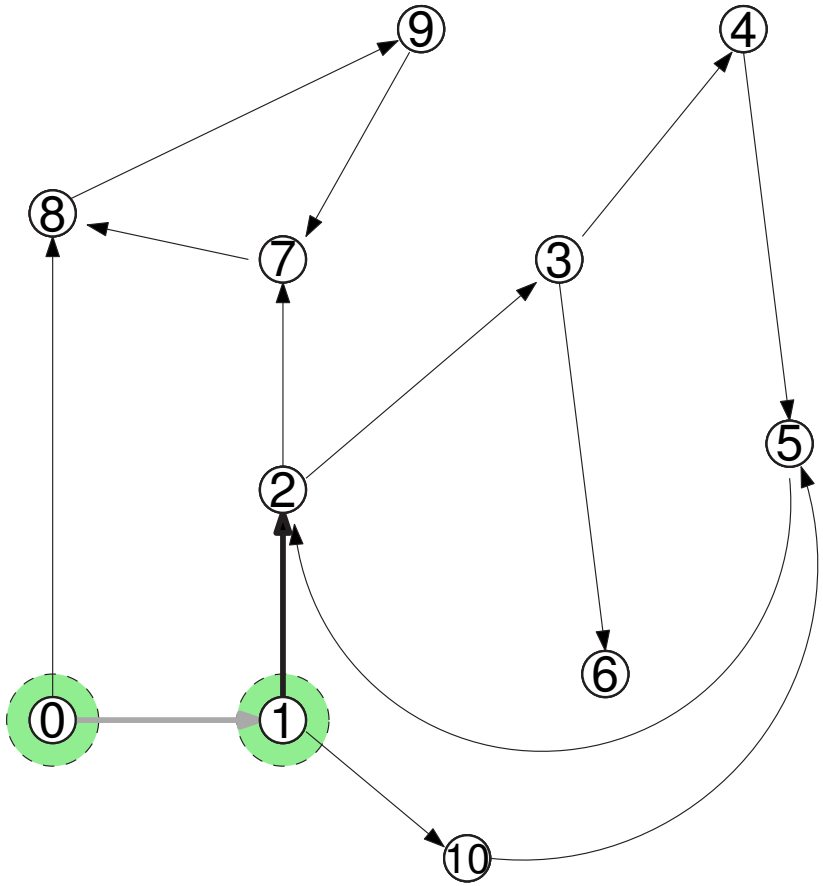
oNodes	oReps
0	0

SCC (Wiederholung)



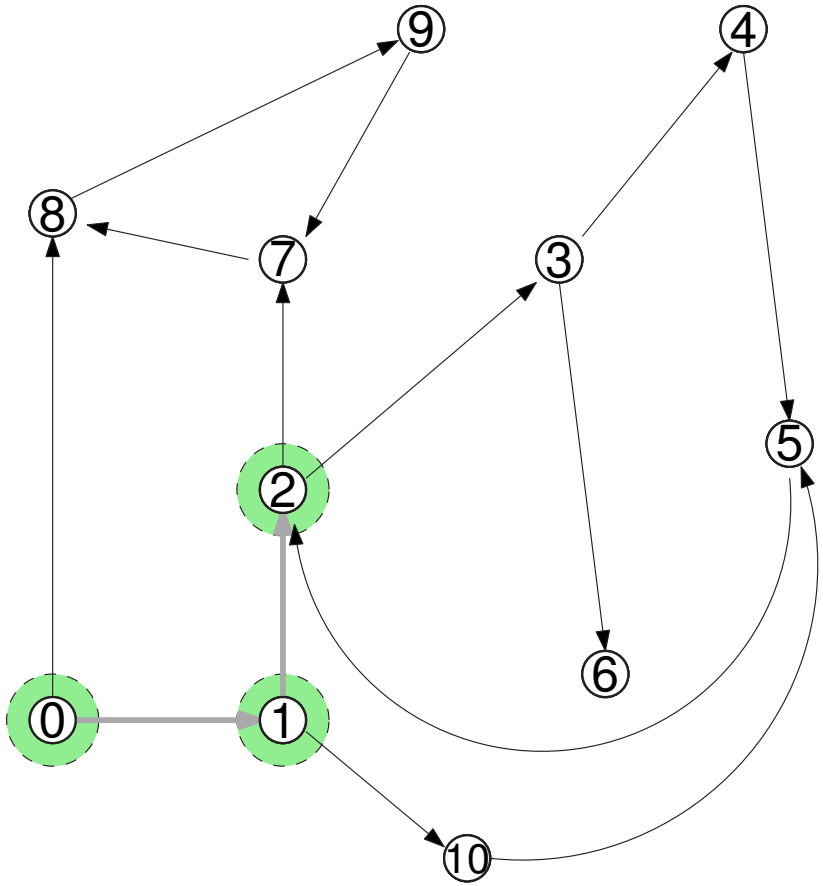
oNodes	oReps
0	0
1	1

SCC (Wiederholung)



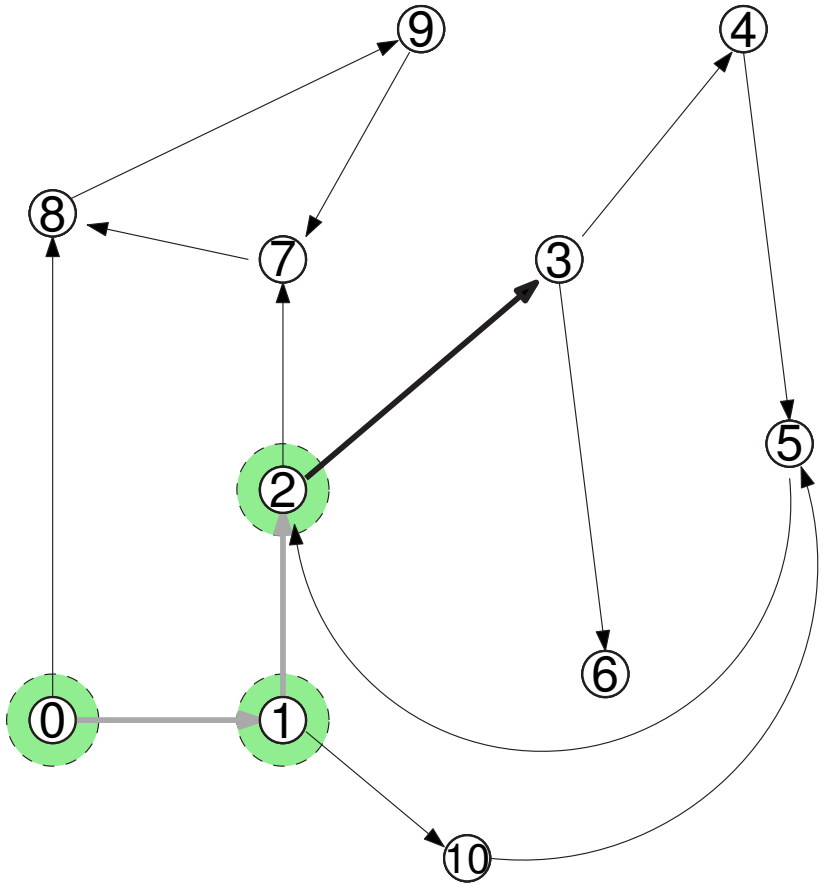
oNodes	oReps
0	0
1	1

SCC (Wiederholung)



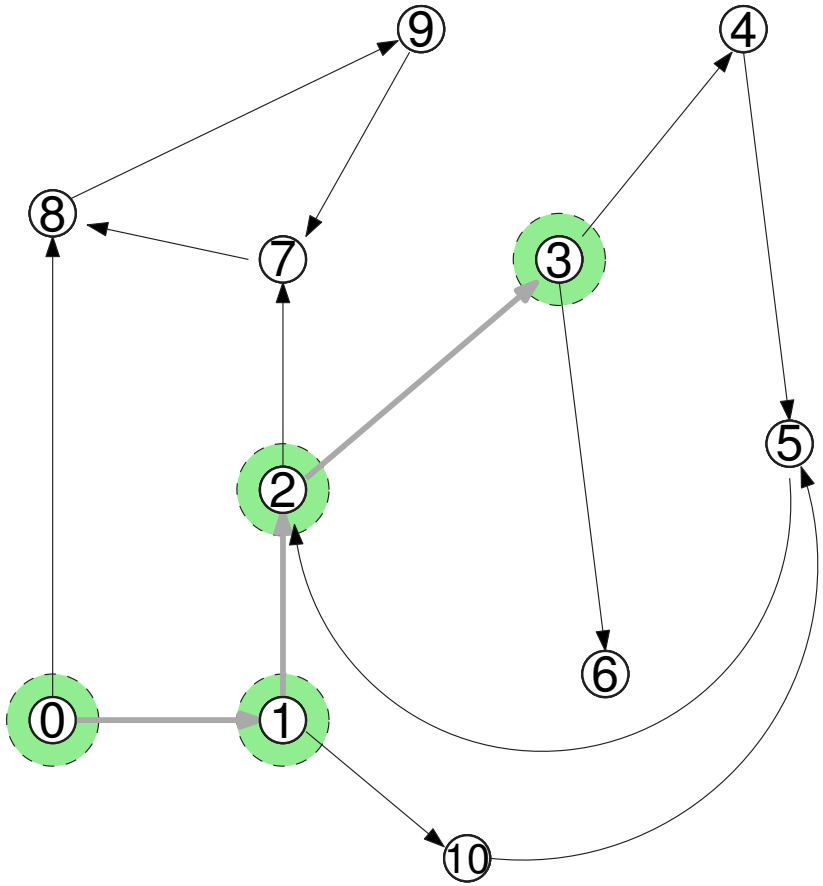
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2

SCC (Wiederholung)



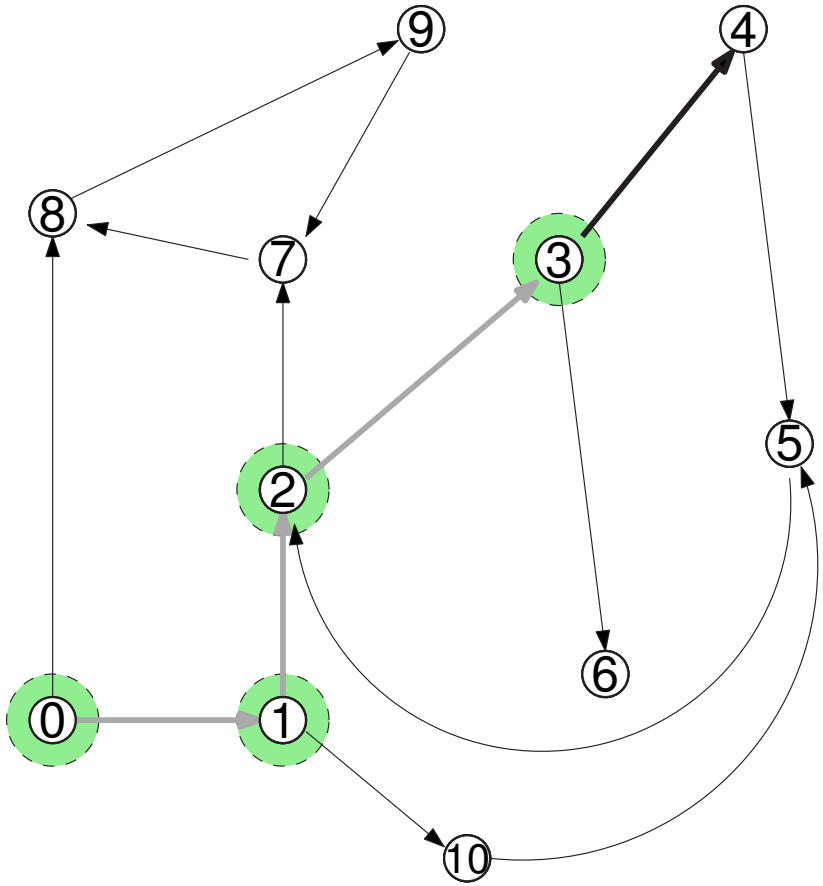
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2

SCC (Wiederholung)



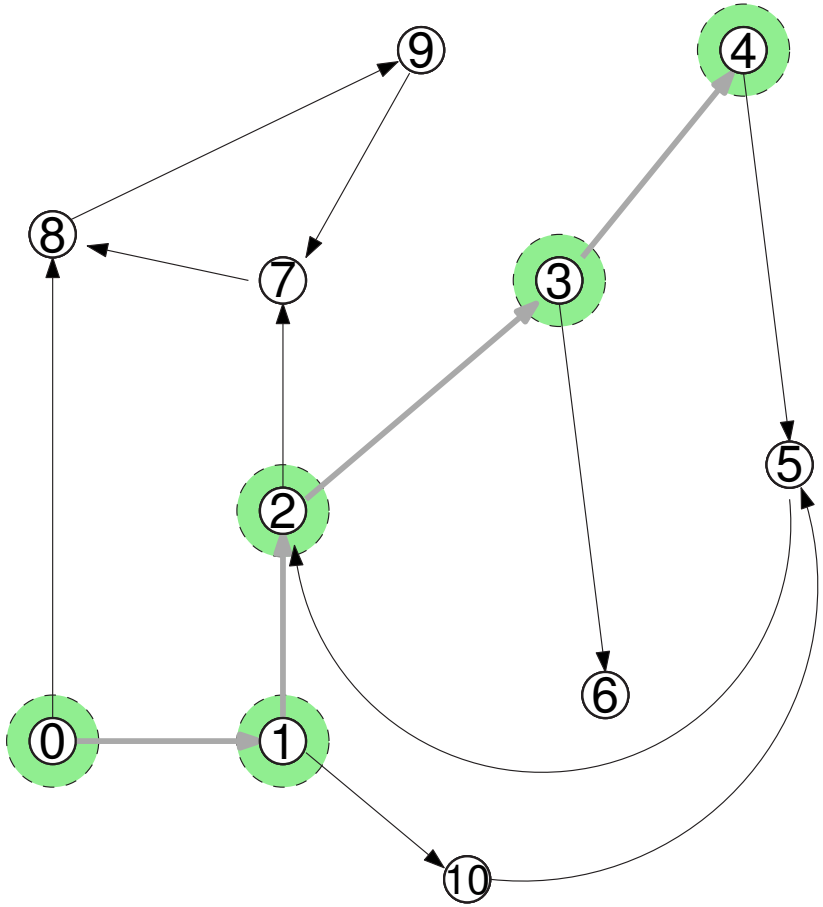
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	3

SCC (Wiederholung)



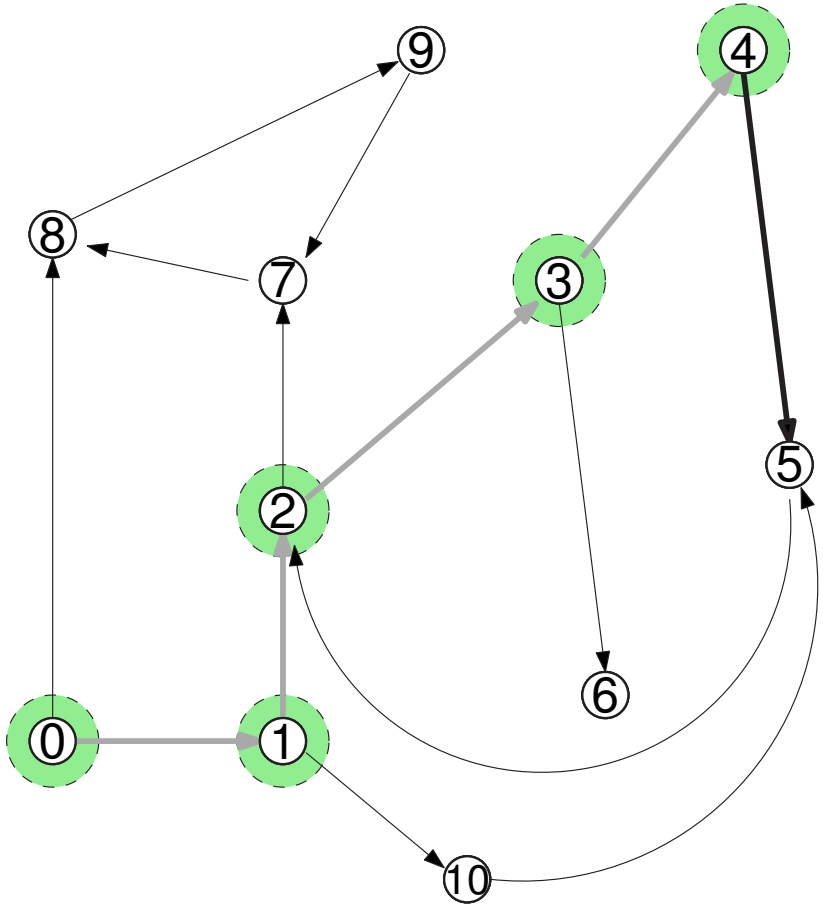
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	3

SCC (Wiederholung)



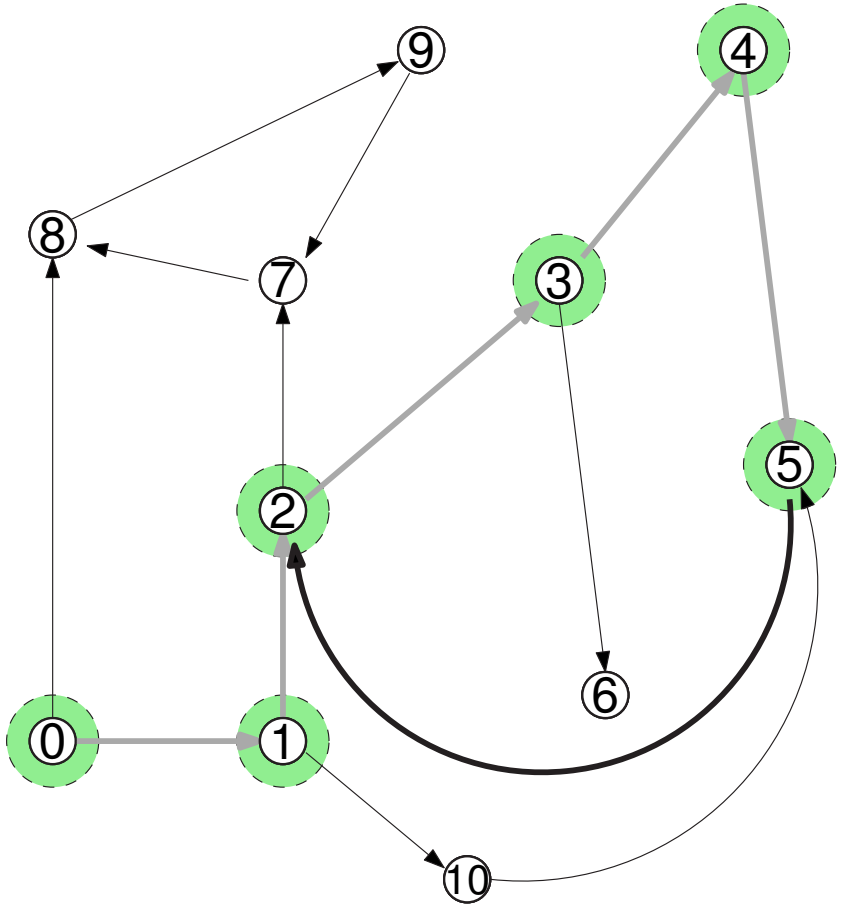
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

SCC (Wiederholung)



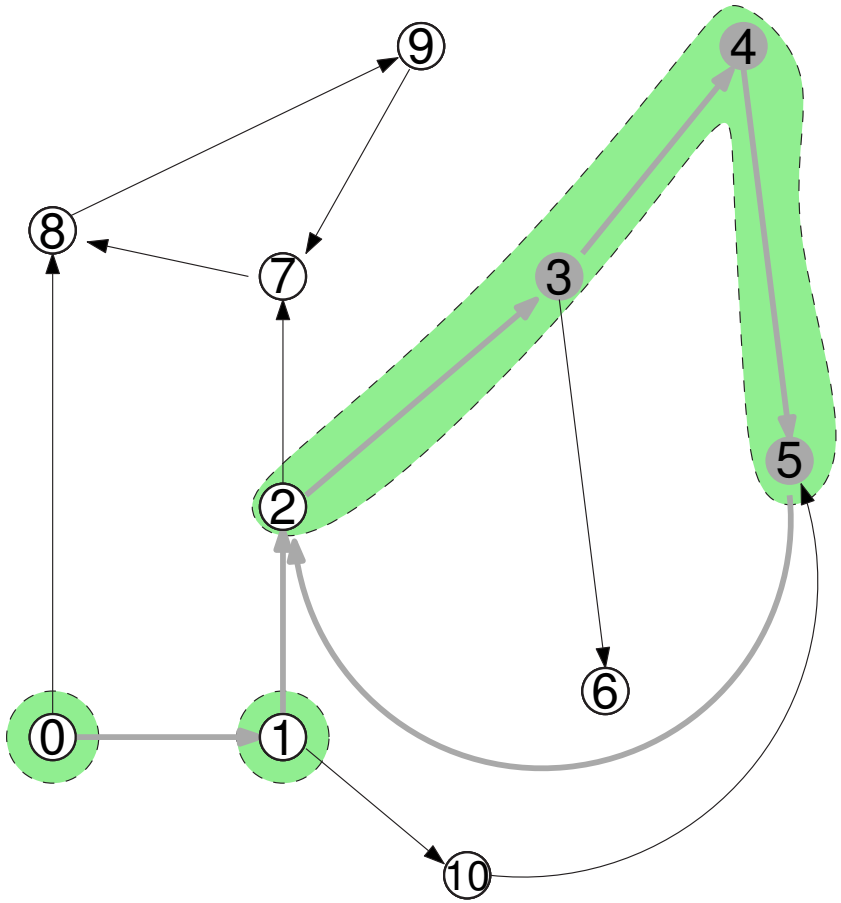
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4

SCC (Wiederholung)



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

SCC (Wiederholung)



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)

Invariante 1

Kein Kanten von geschlossenen in offene Komponenten.

- Tiefensuche sucht Pfad durch Graphen
- Nur Rückwärtskanten ergeben Kreise
- Kreise vereinigen alle auf dem Kreis liegenden offenen Komponenten

Invariante 2

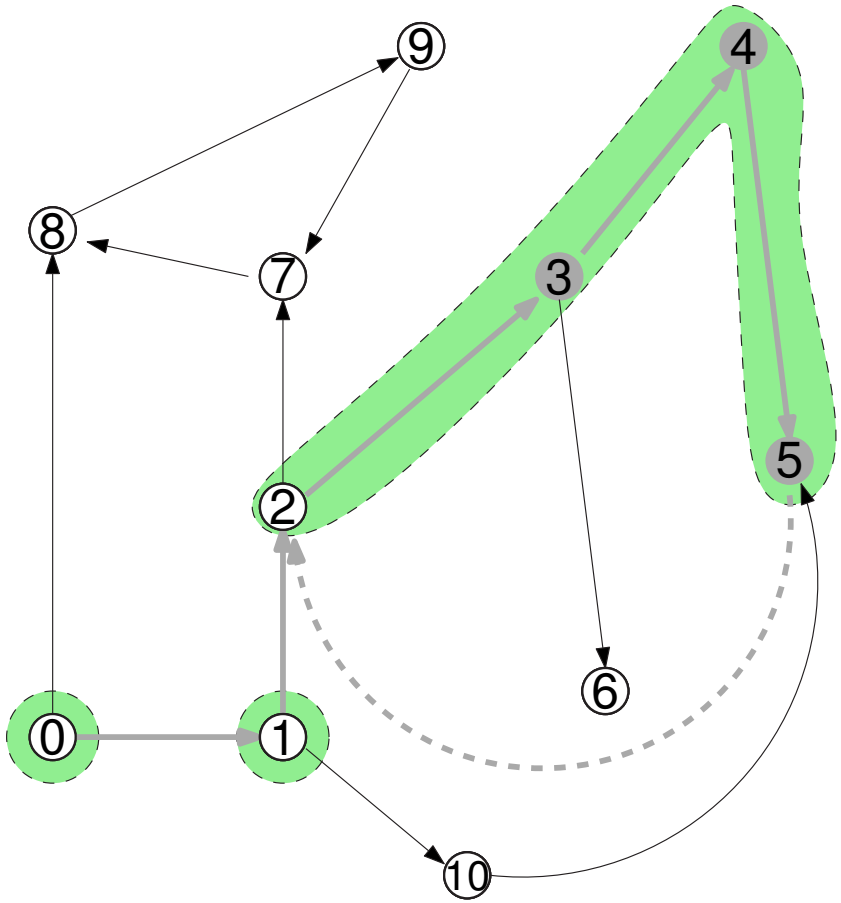
Offene Komponenten liegen auf Pfad.

- Repräsentant ist minimal auf Kreis

Invariante 3

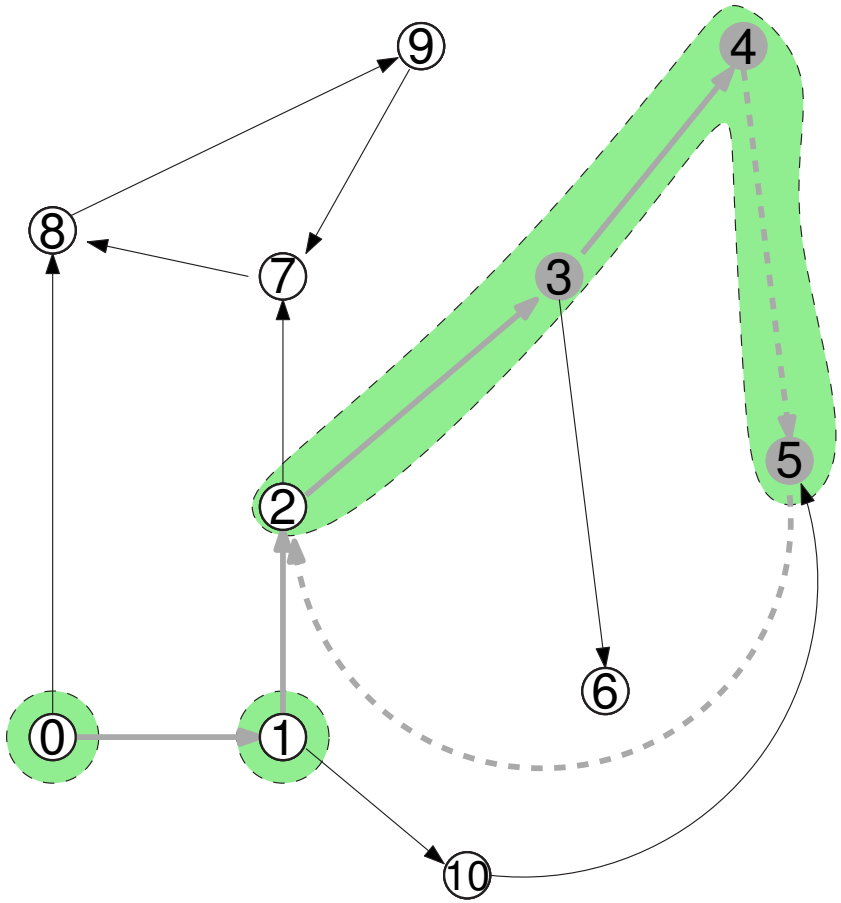
Repräsentanten partitionieren offene Komponenten bzgl. dfsNum.

SCC (Wiederholung)



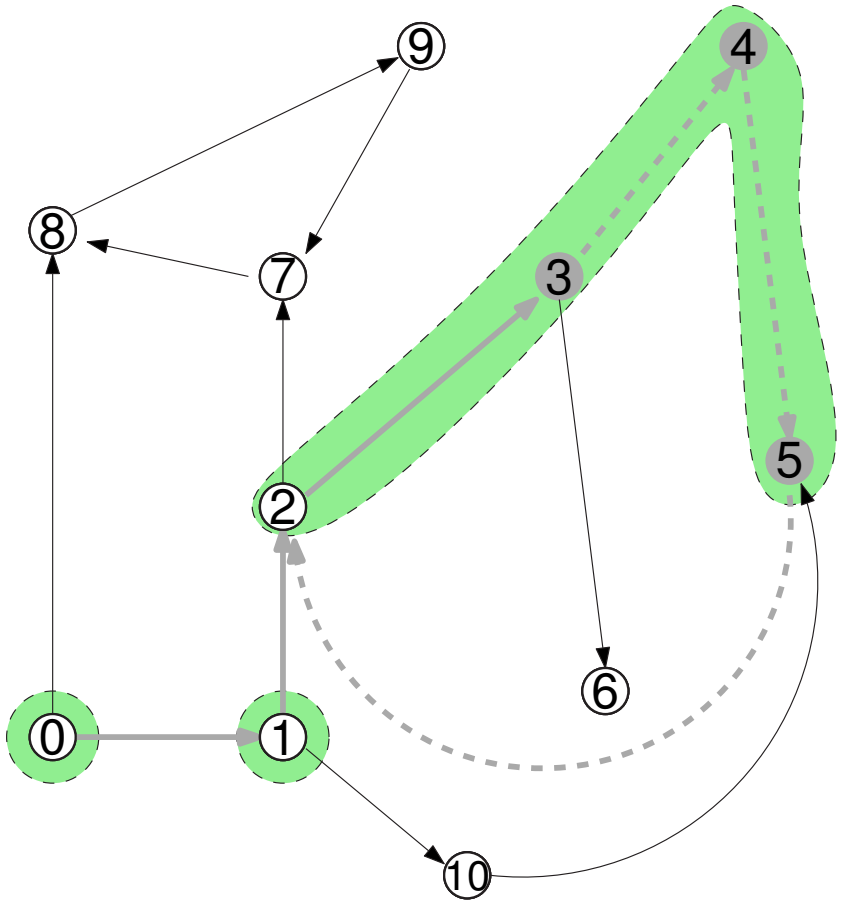
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)



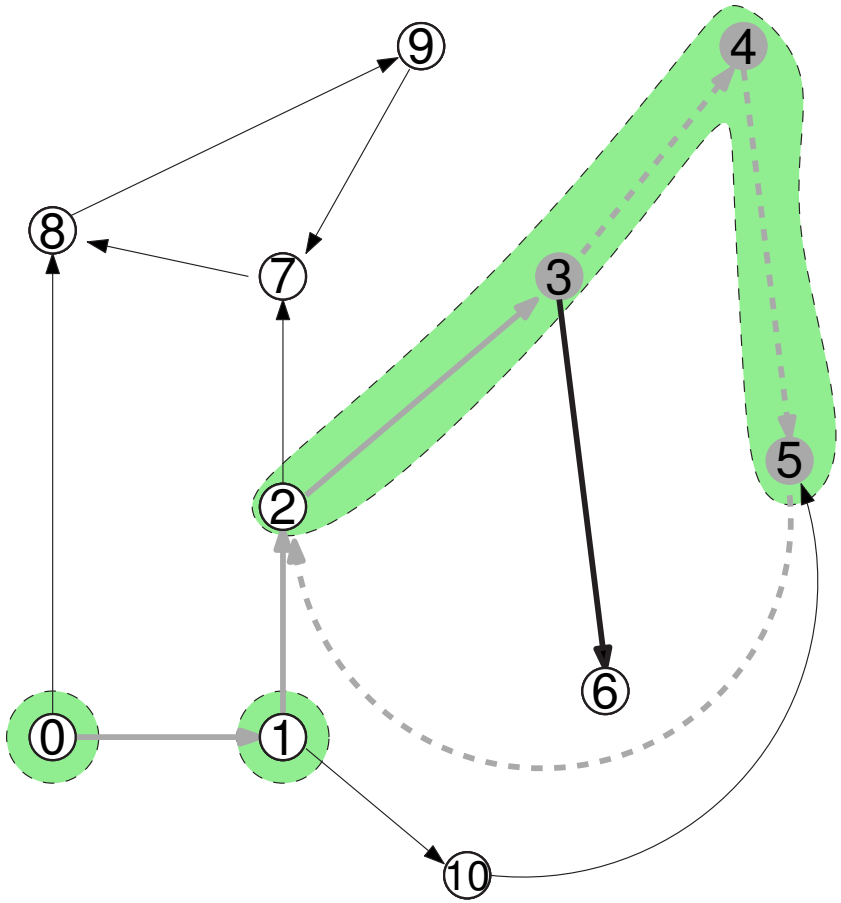
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)



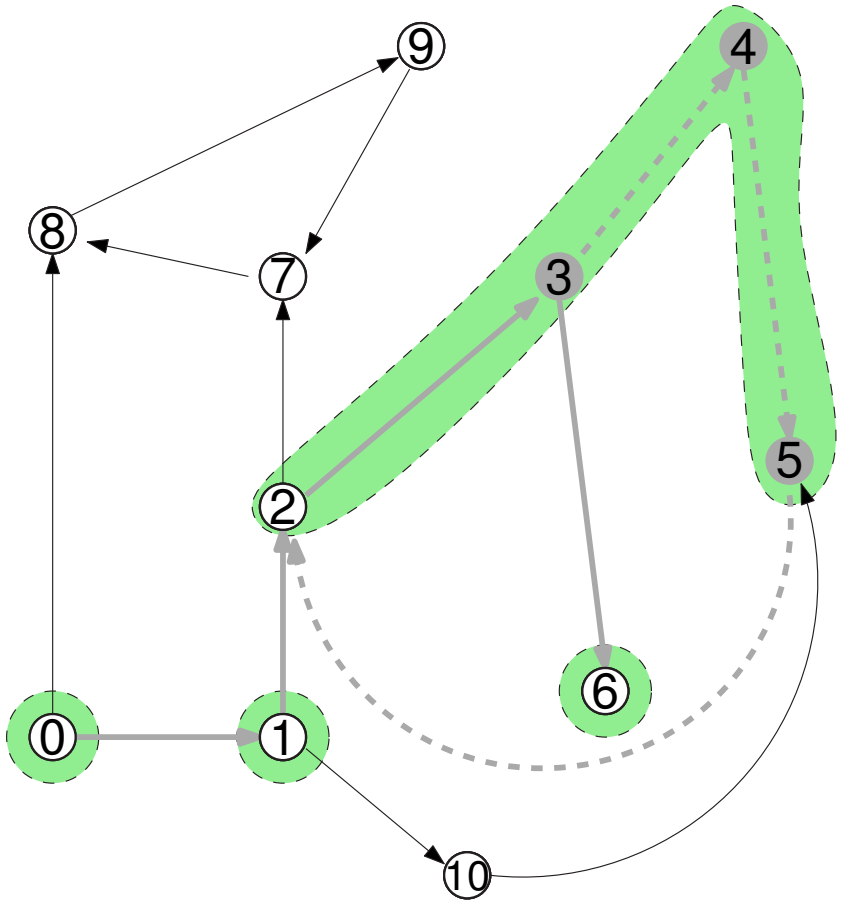
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)



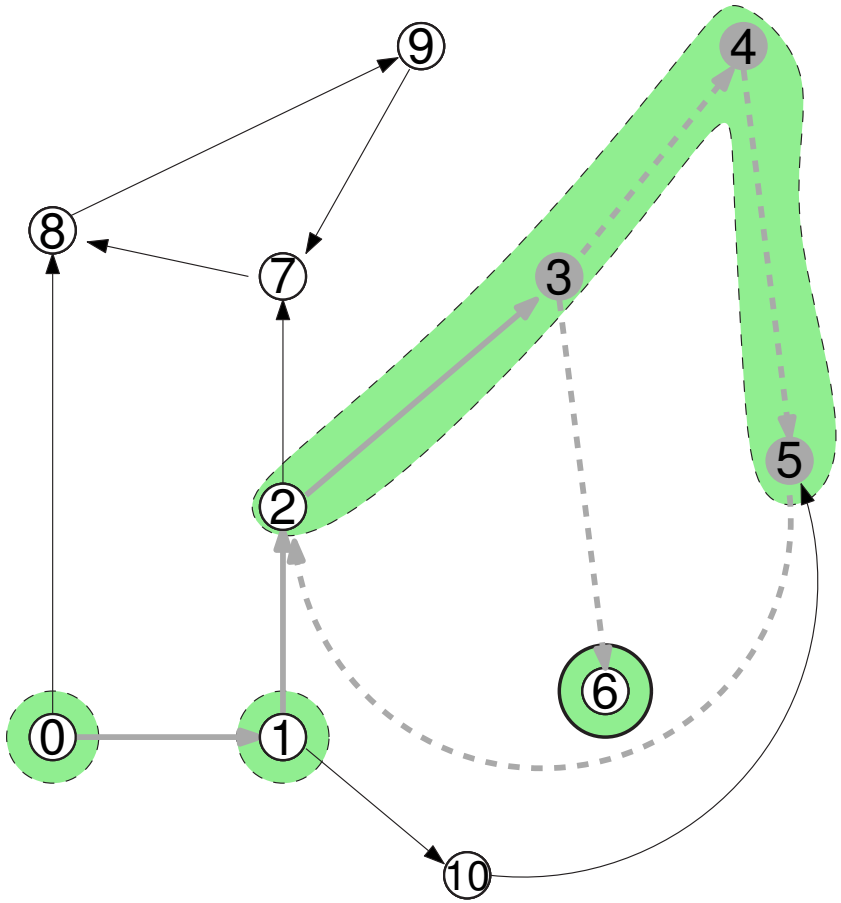
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
6	6

SCC (Wiederholung)



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
6	6

SCC (Wiederholung)

- Komponenten werden nach Bearbeitung aller ausgehenden Kanten geschlossen
- Alle offenen Komponenten liegen auf Stack
- Kante von geschlossener in offene Komponenten hätte bei Bearbeitung Kreis induziert

Invariante 1

Kein Kanten von geschlossenen in offene Komponenten.

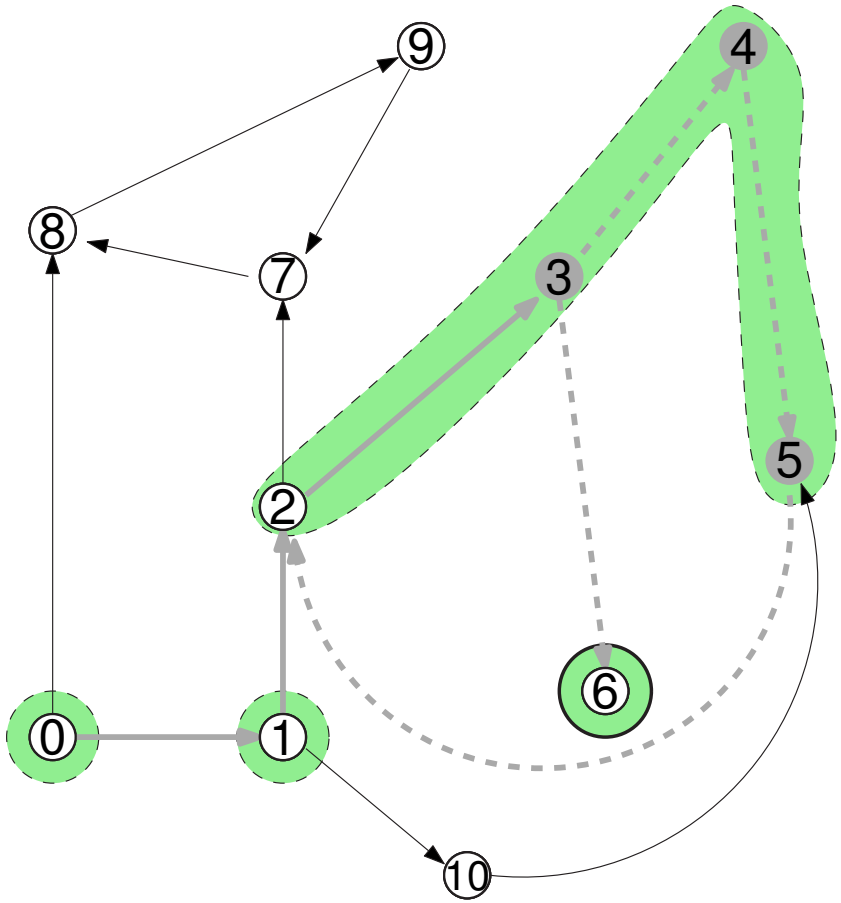
Invariante 2

Offene Komponenten liegen auf Pfad.

Invariante 3

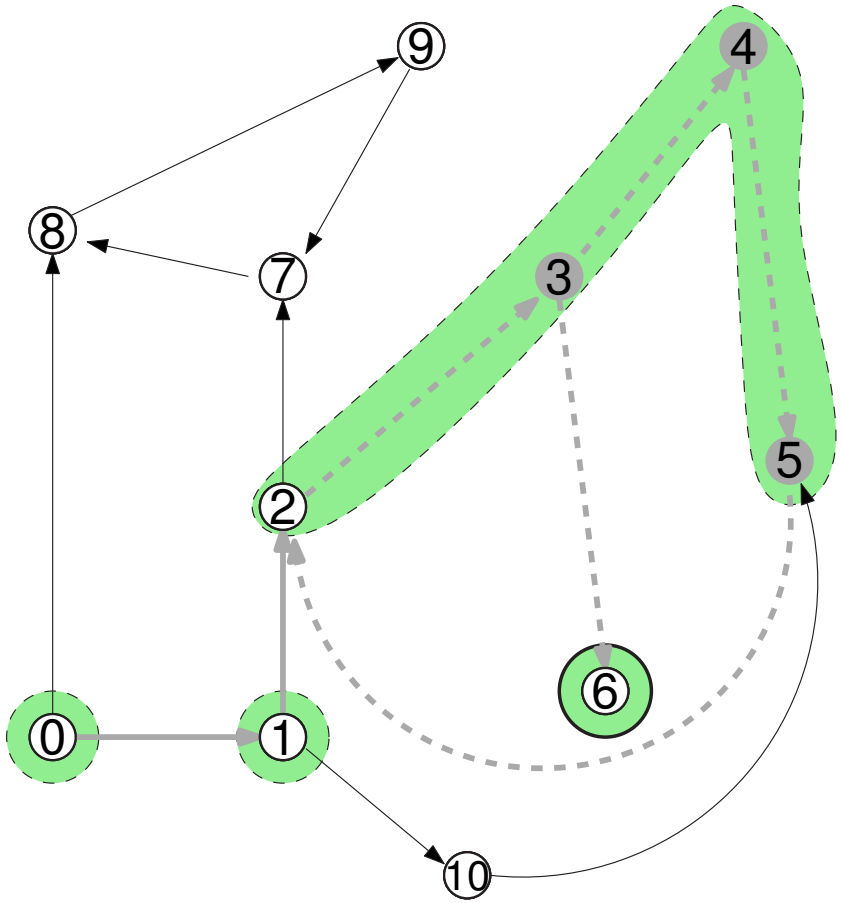
Repräsentanten partitionieren offene Komponenten bzgl. dfsNum.

SCC (Wiederholung)



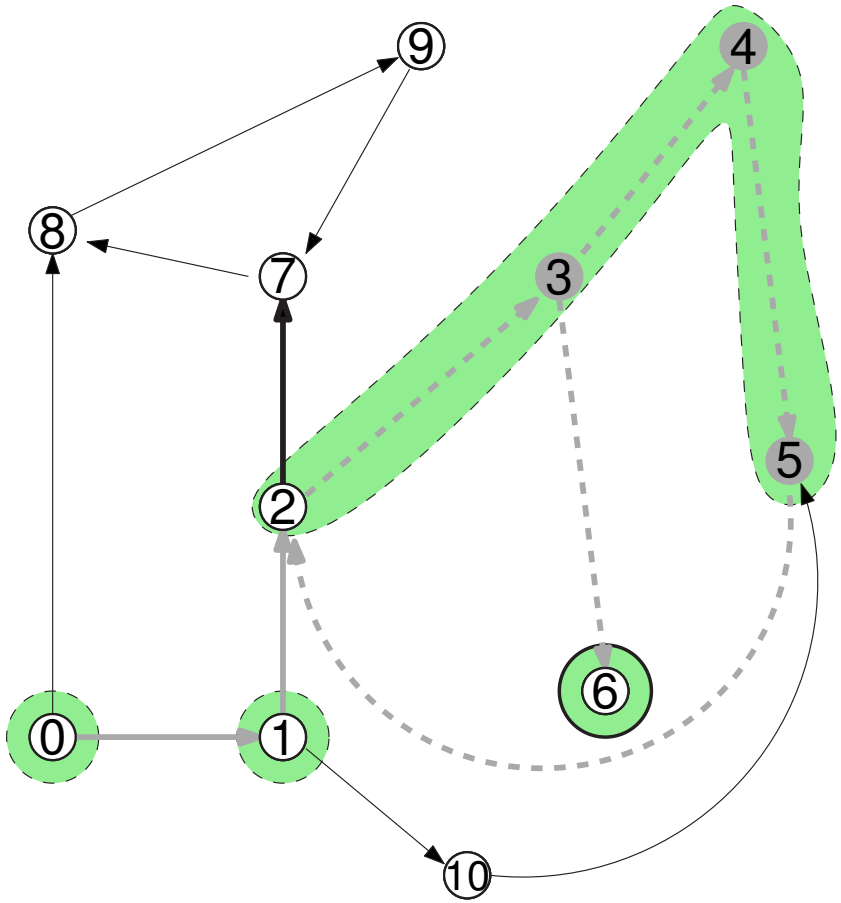
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)



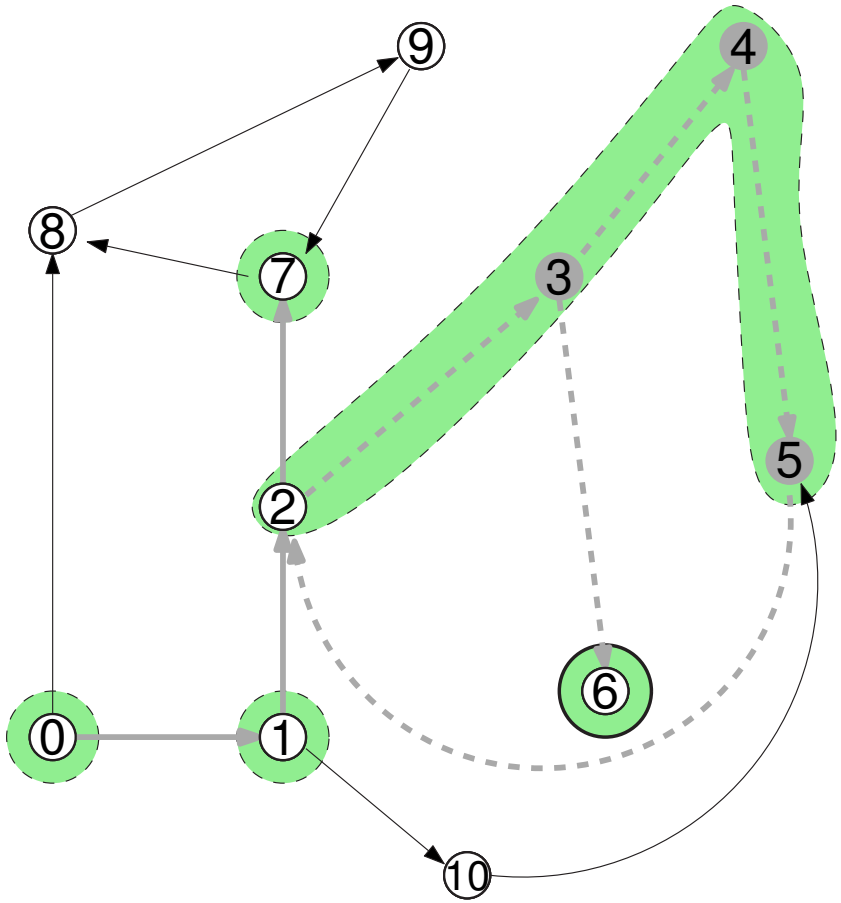
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)



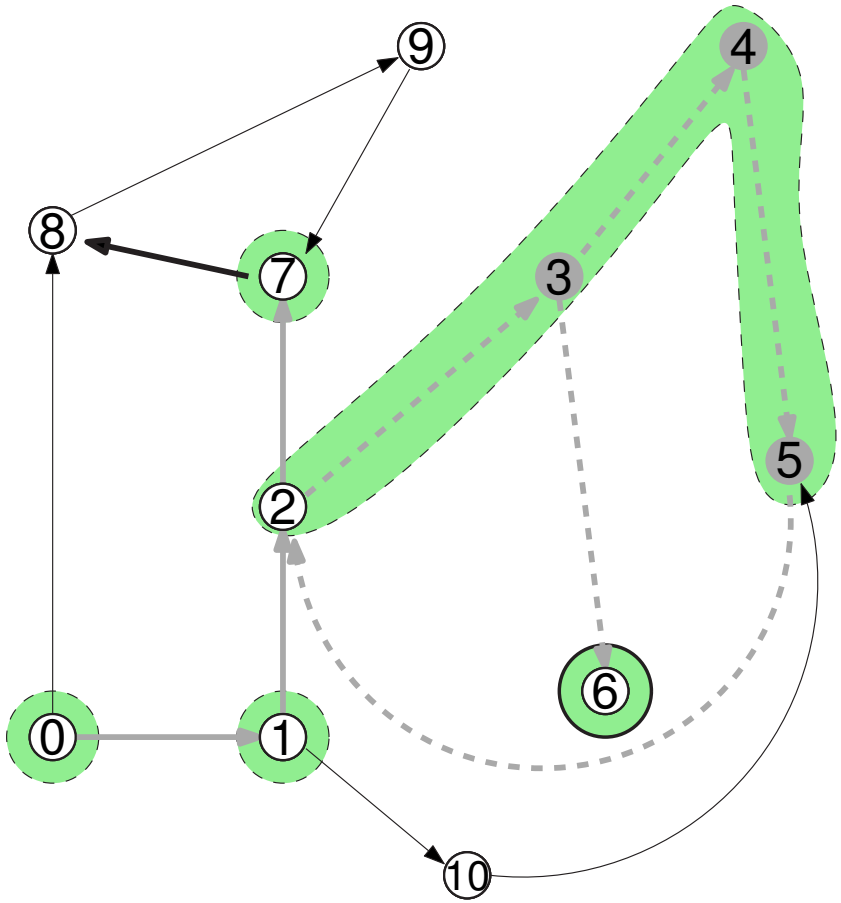
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC (Wiederholung)



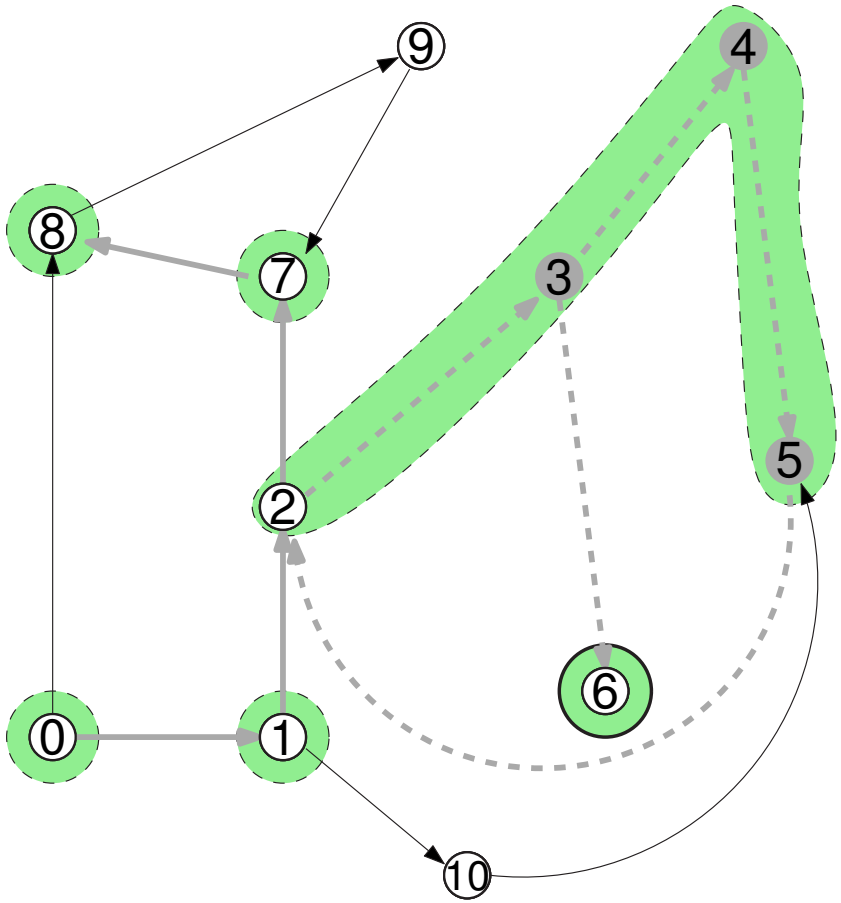
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7

SCC (Wiederholung)



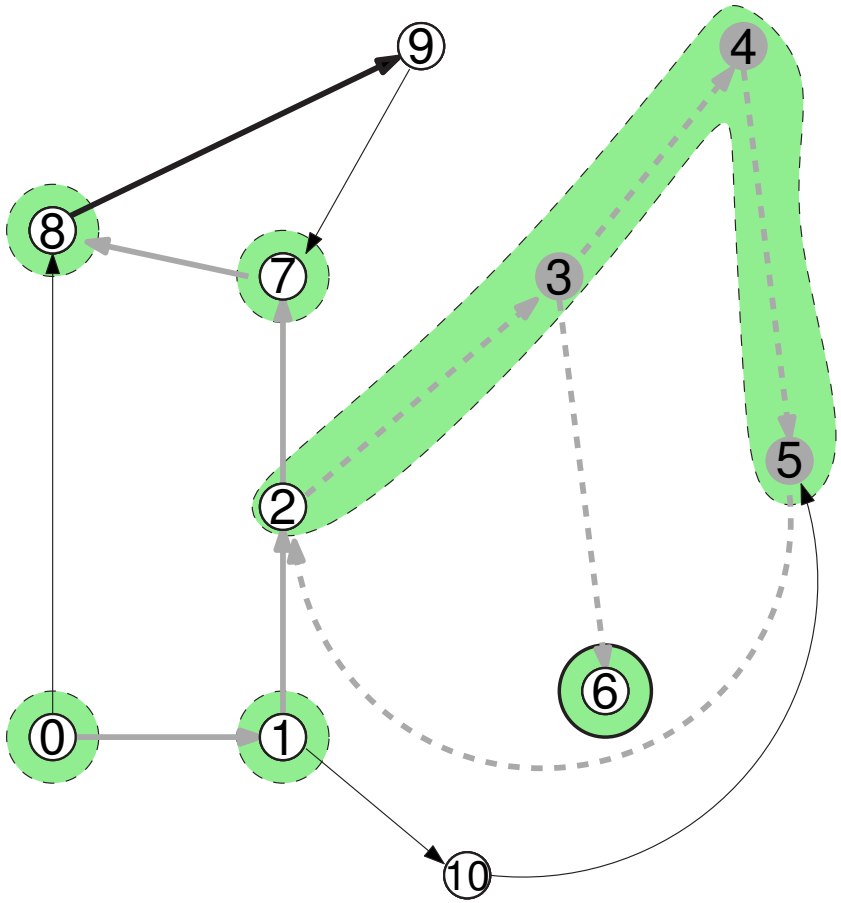
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7

SCC (Wiederholung)



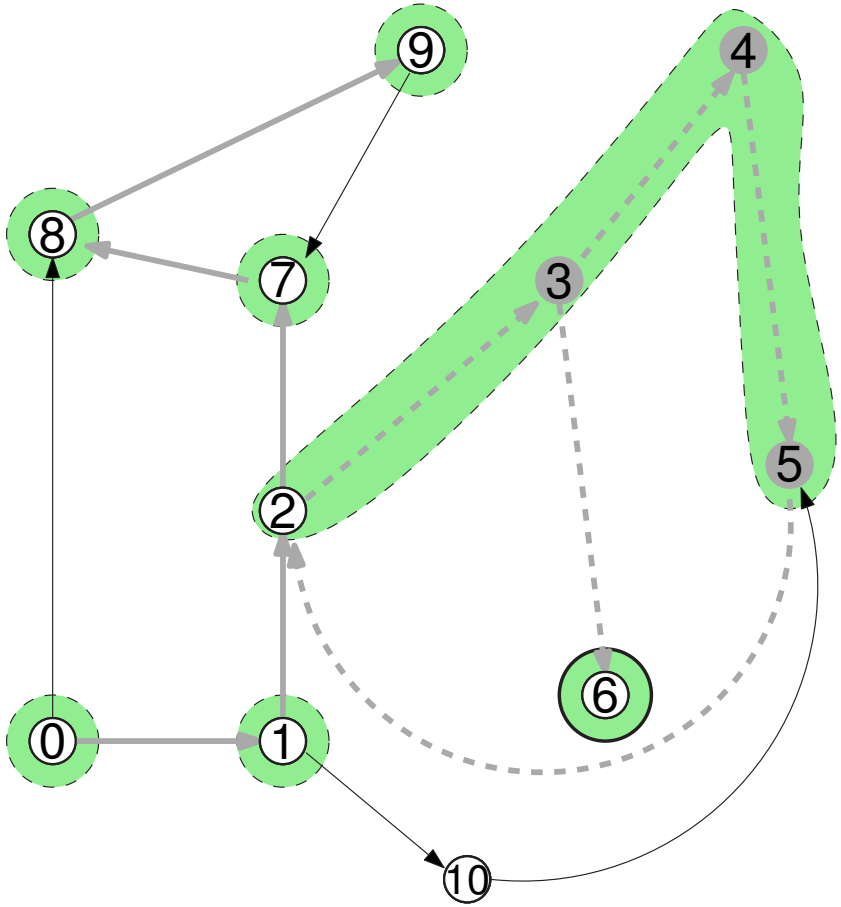
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	8

SCC (Wiederholung)



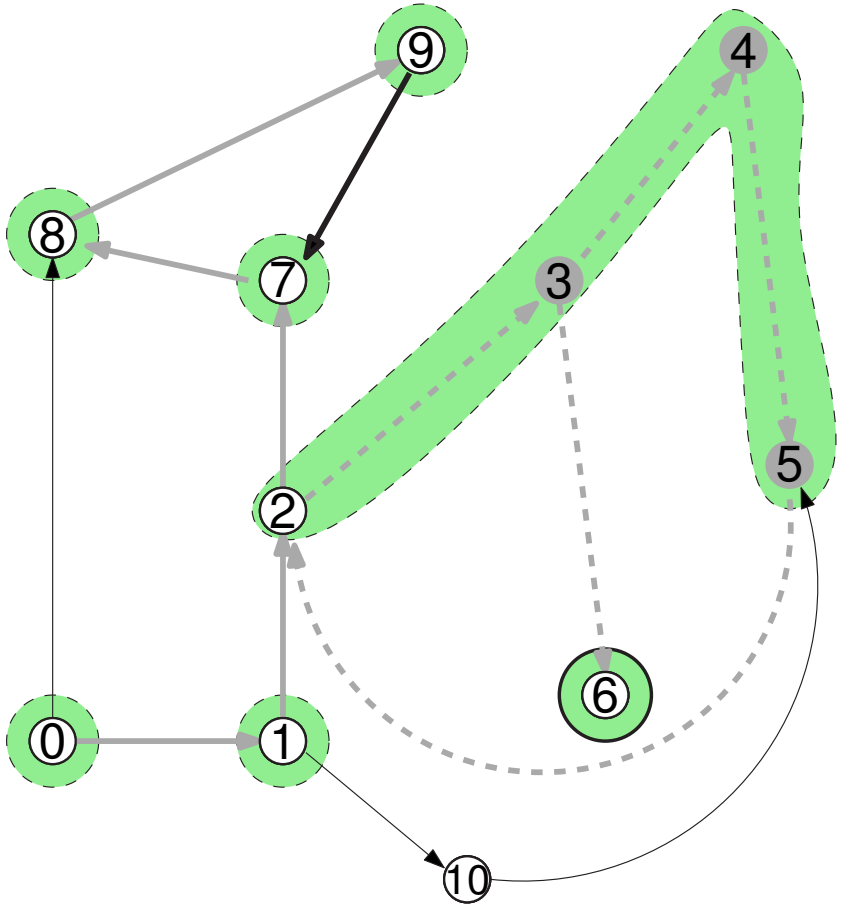
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	8

SCC (Wiederholung)



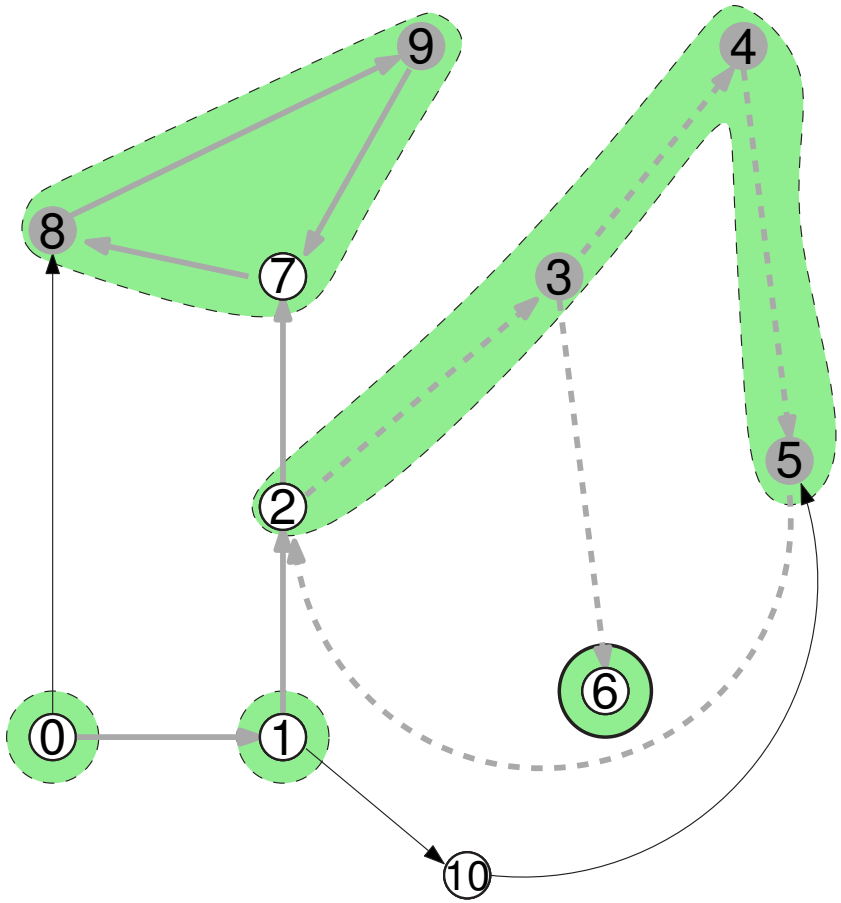
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	8
9	9

SCC (Wiederholung)



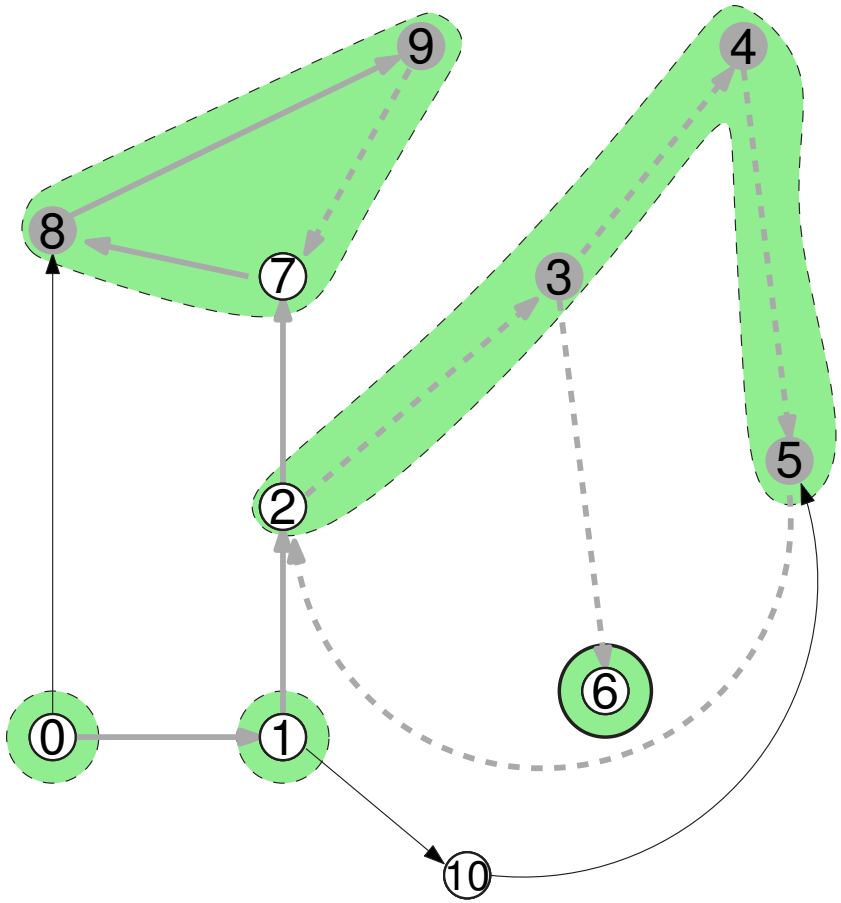
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	8
9	9

SCC (Wiederholung)



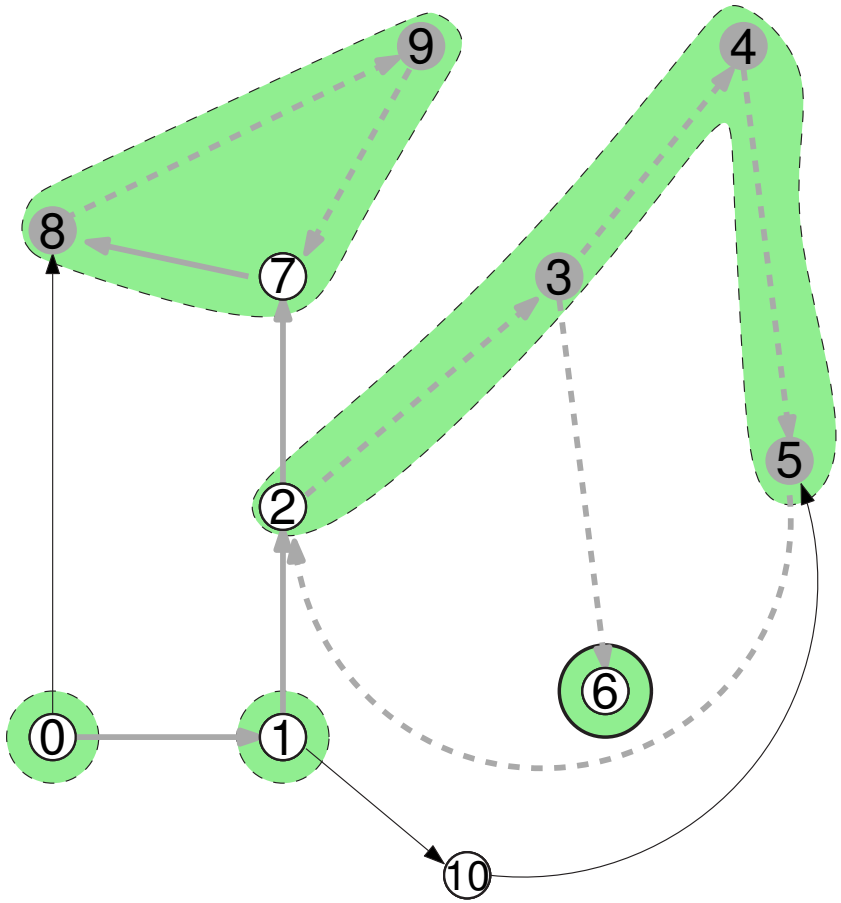
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	
9	

SCC (Wiederholung)



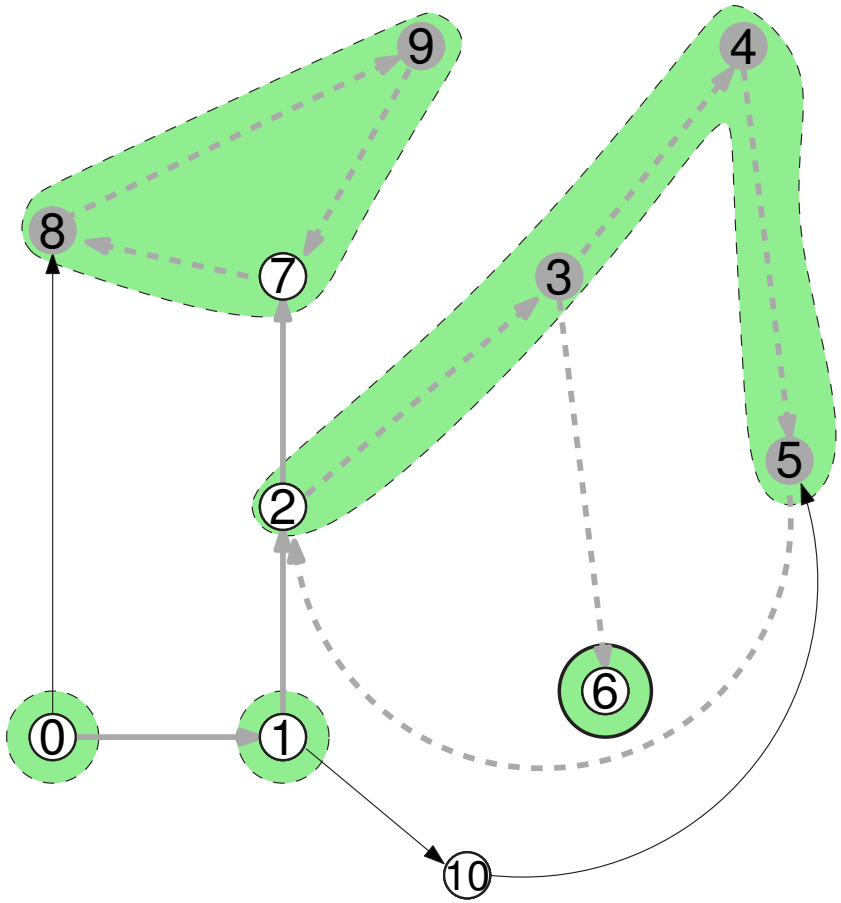
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	
9	

SCC (Wiederholung)



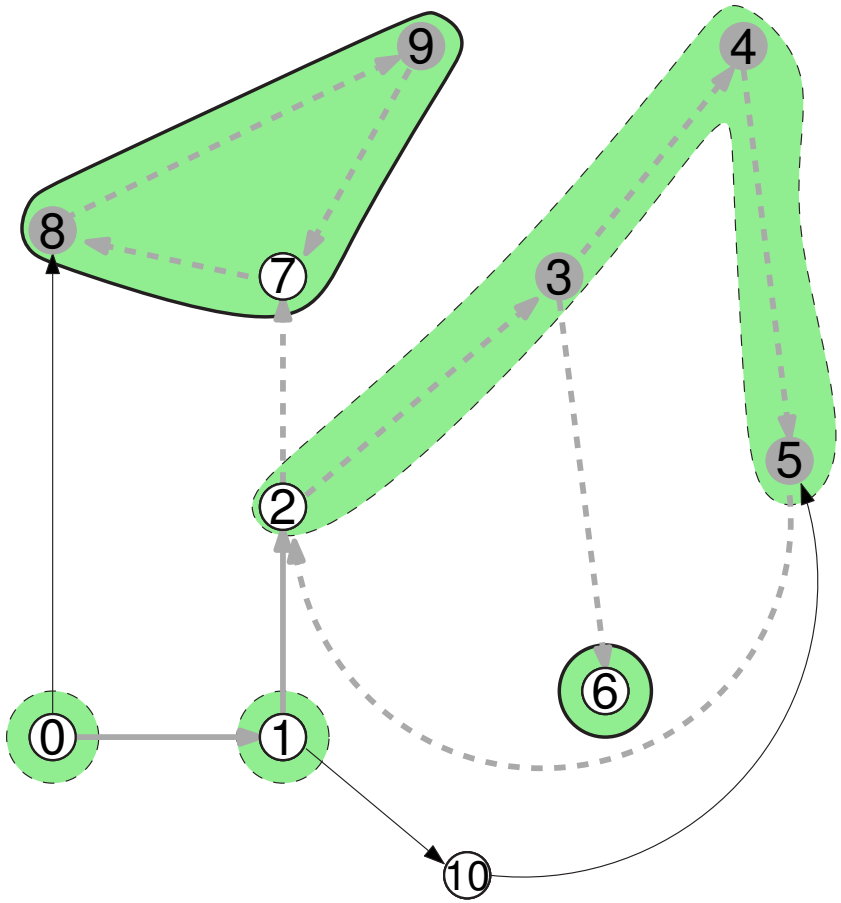
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	
9	

SCC (Wiederholung)



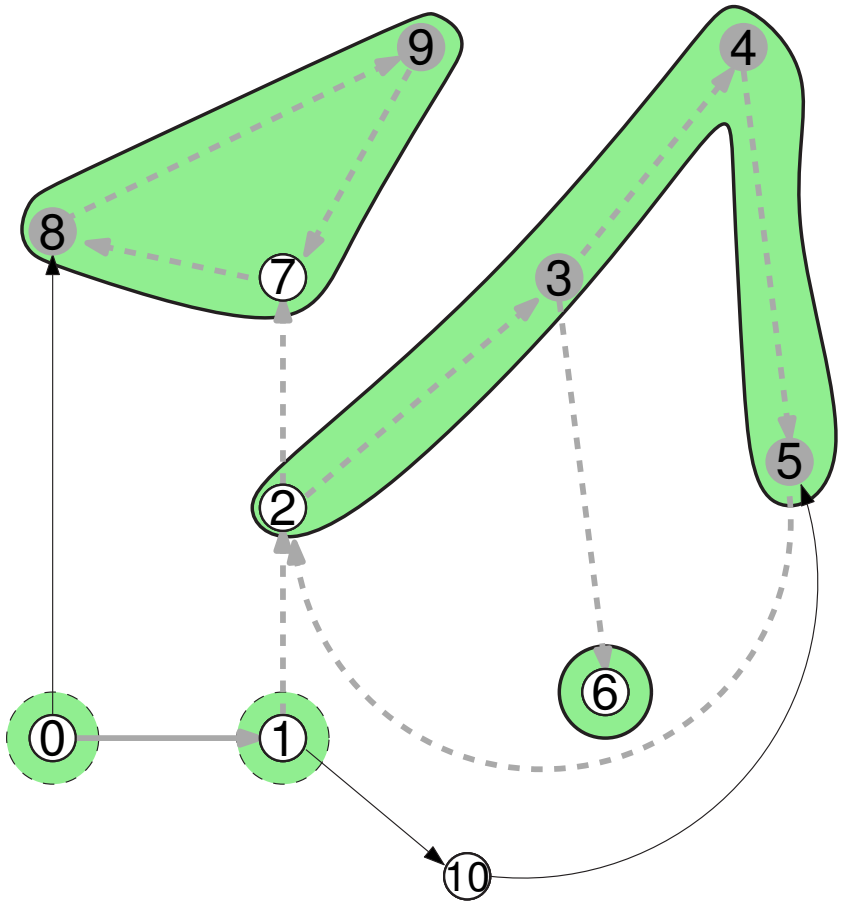
oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	
9	

SCC (Wiederholung)



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
7	7
8	
9	

SCC (Wiederholung)



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

Floyd Warshall: SCC als Speedup Technik

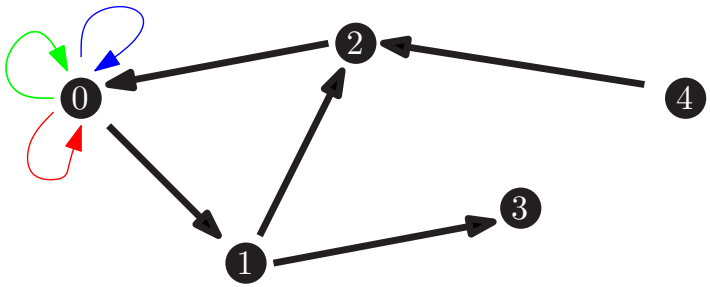
Floyd Warshall

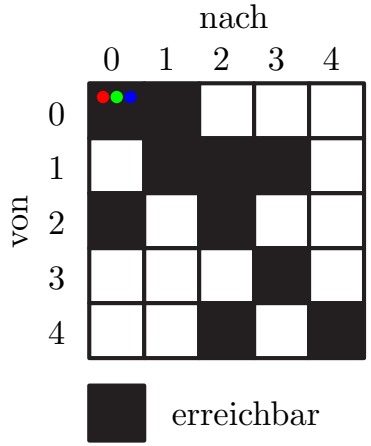
- kubischer Algorithmus
- berechnet transitive Hülle

  auch anwendbar für *all-to-all* kürzeste Wege

```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

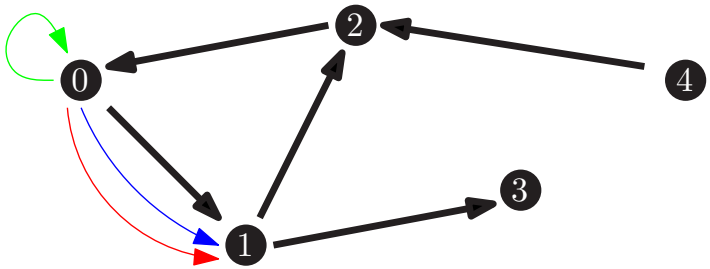
Floyd Warshall

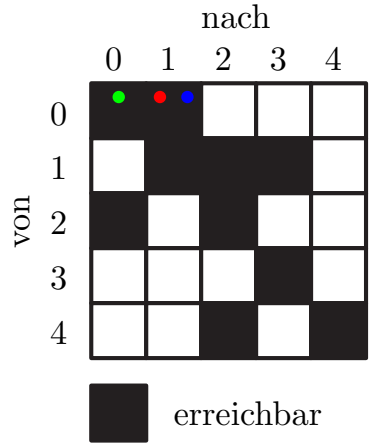





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

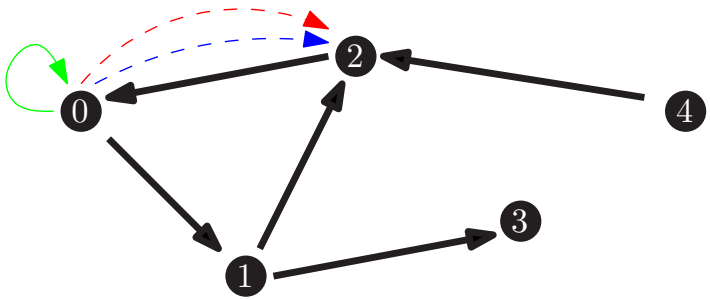
Floyd Warshall

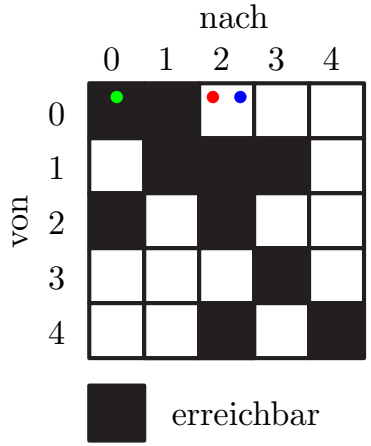





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

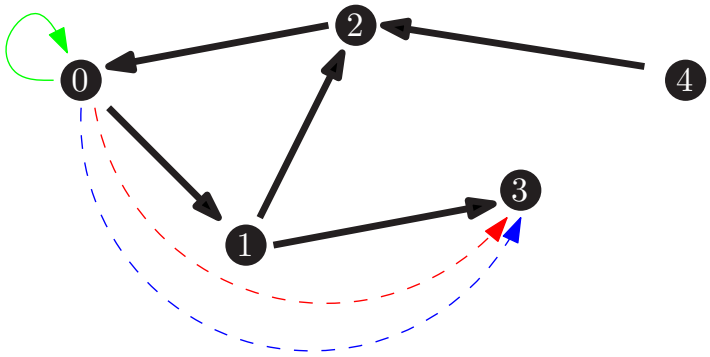
Floyd Warshall

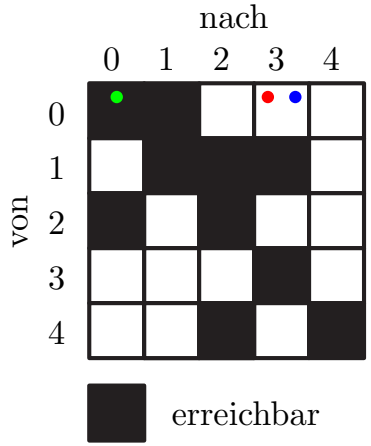





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

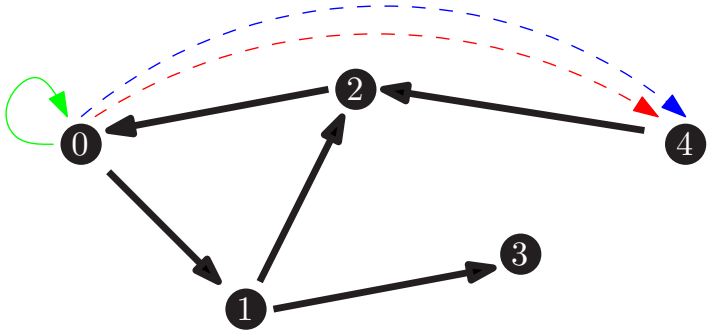
Floyd Warshall

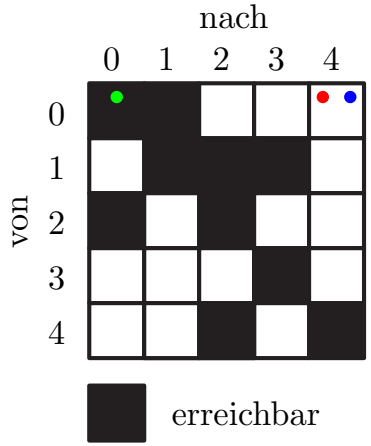





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

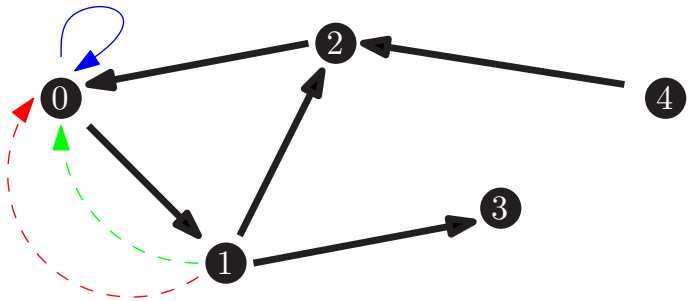
Floyd Warshall

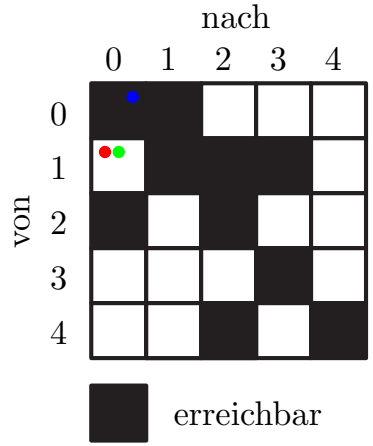





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

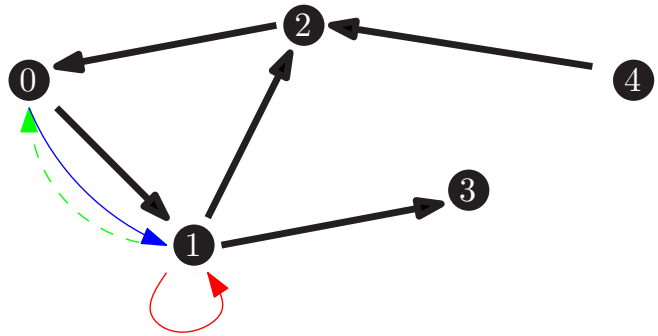
Floyd Warshall

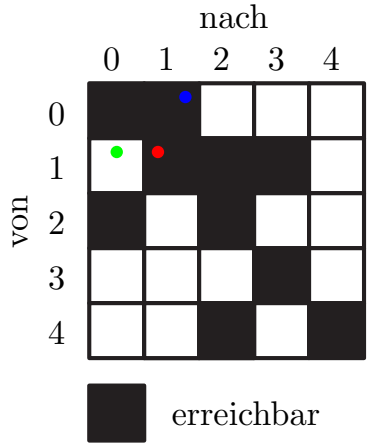





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

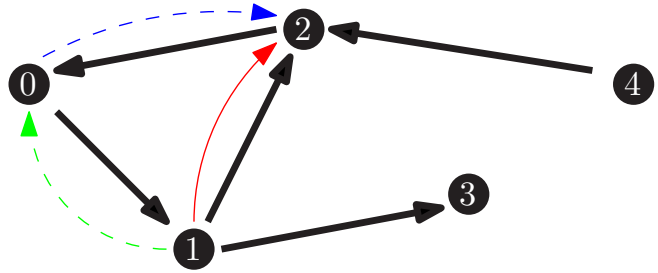
Floyd Warshall

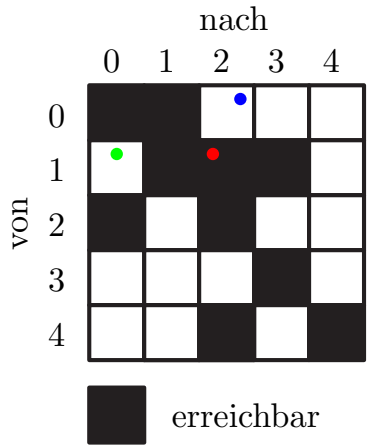





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

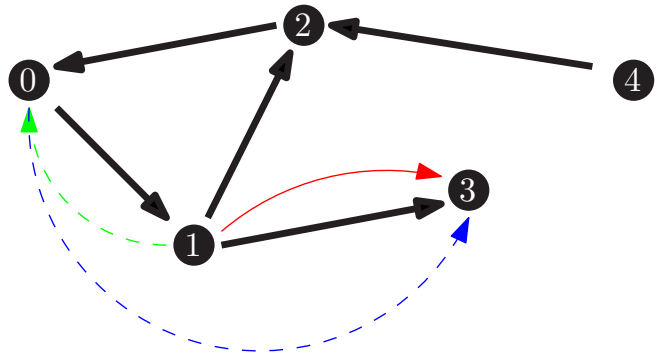
Floyd Warshall

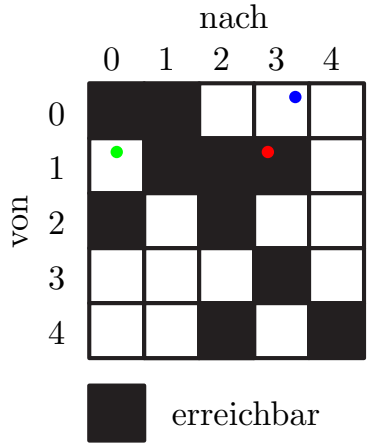





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

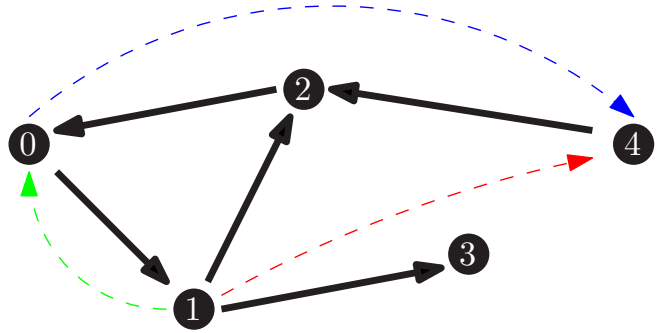
Floyd Warshall

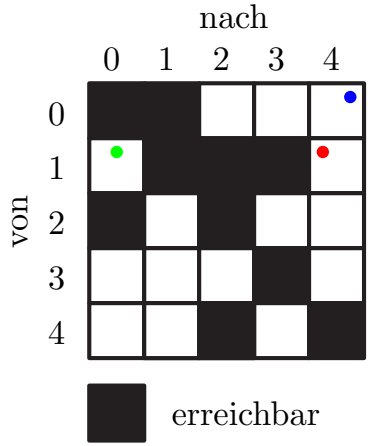





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

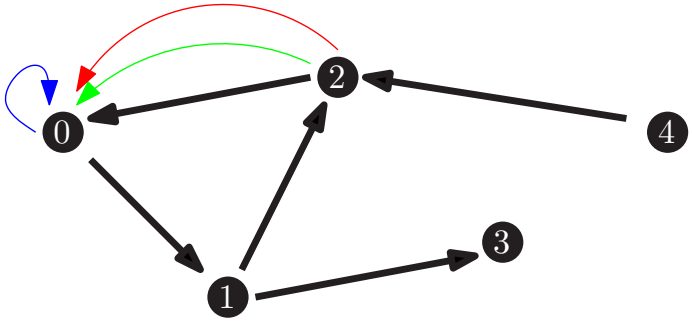
Floyd Warshall

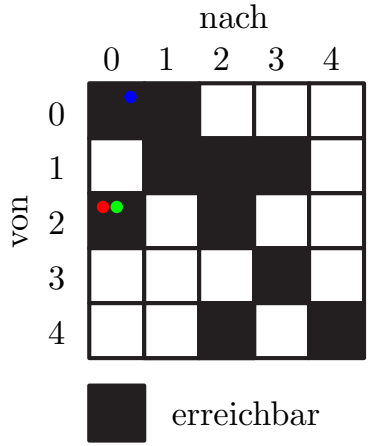





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

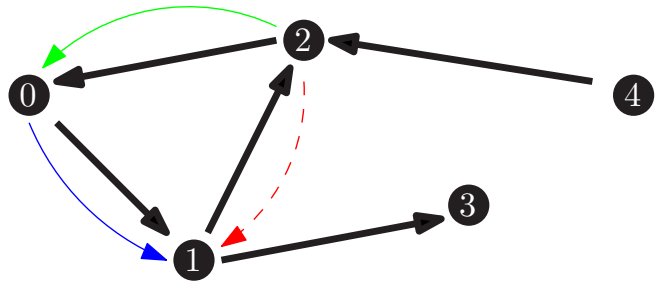
Floyd Warshall

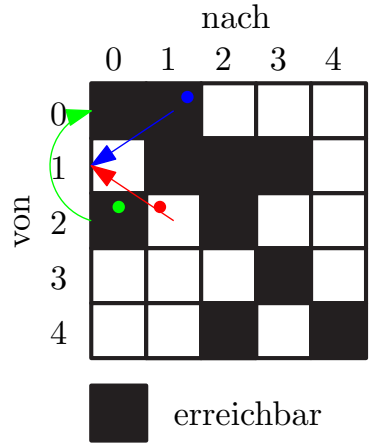





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

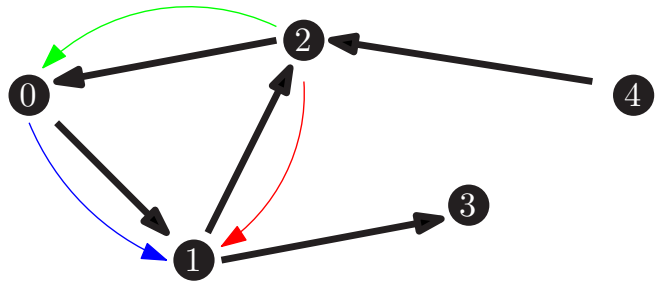
Floyd Warshall

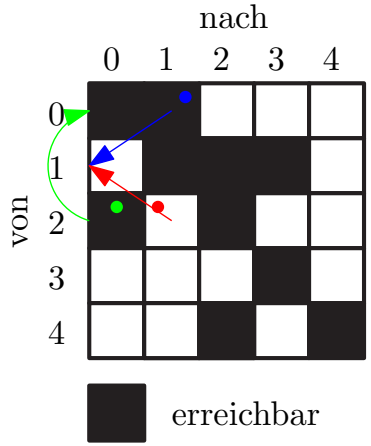





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

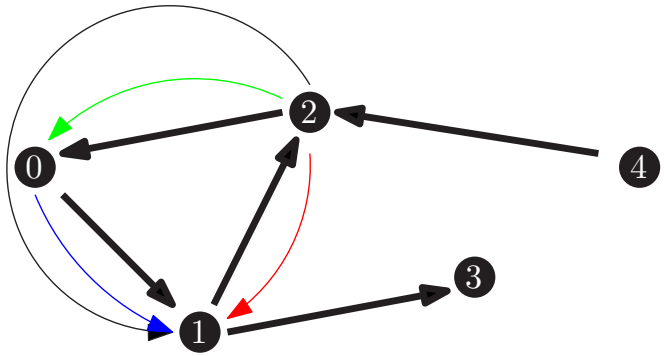
Floyd Warshall

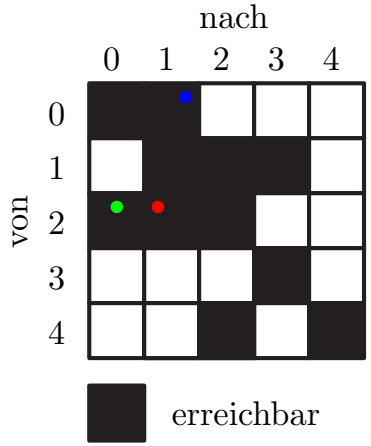





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

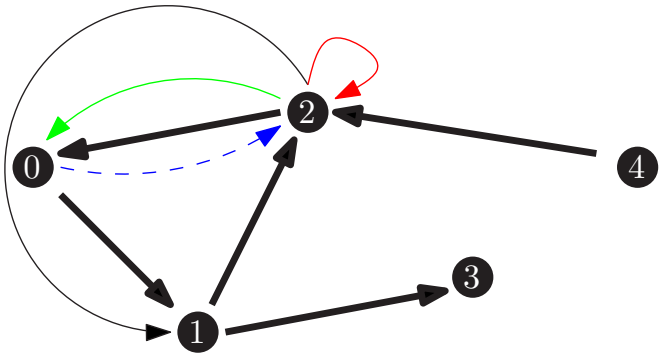
Floyd Warshall

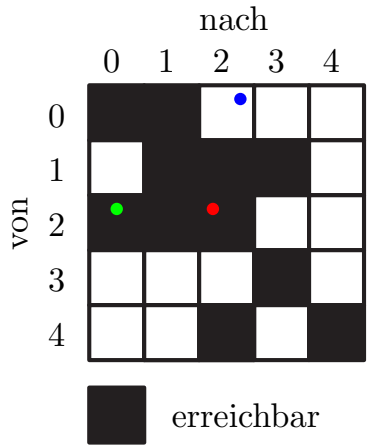





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

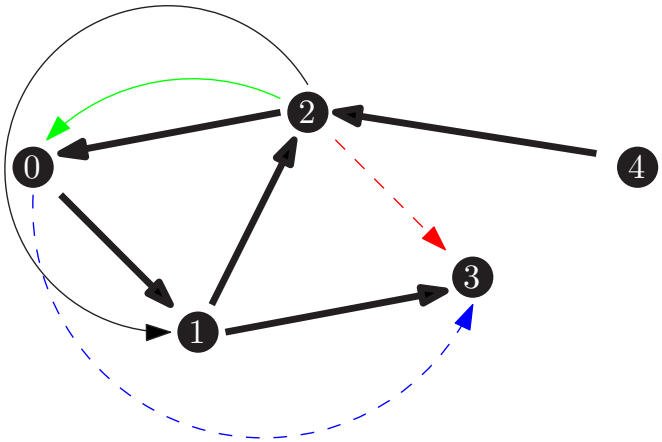
Floyd Warshall

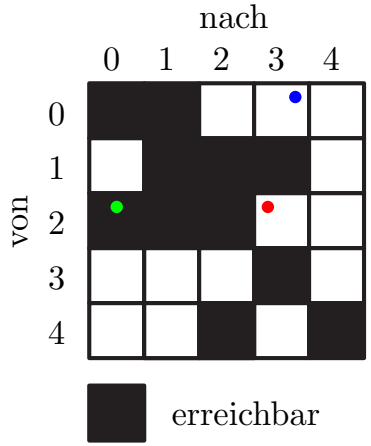





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

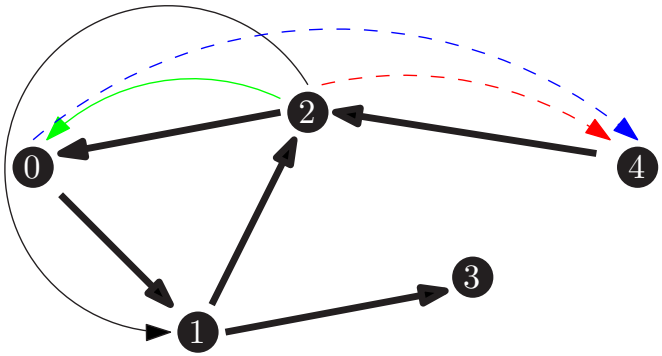
Floyd Warshall

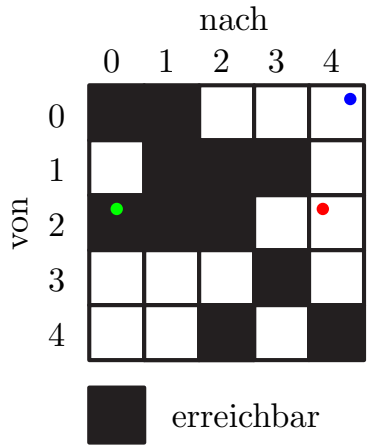





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

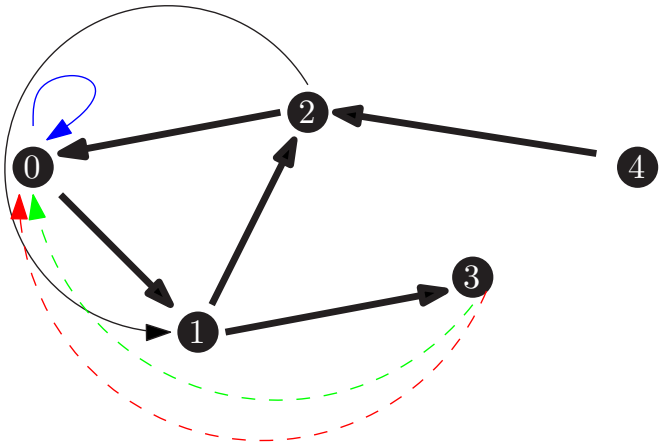
Floyd Warshall

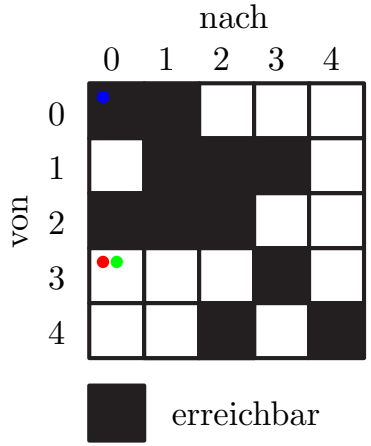





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

Floyd Warshall



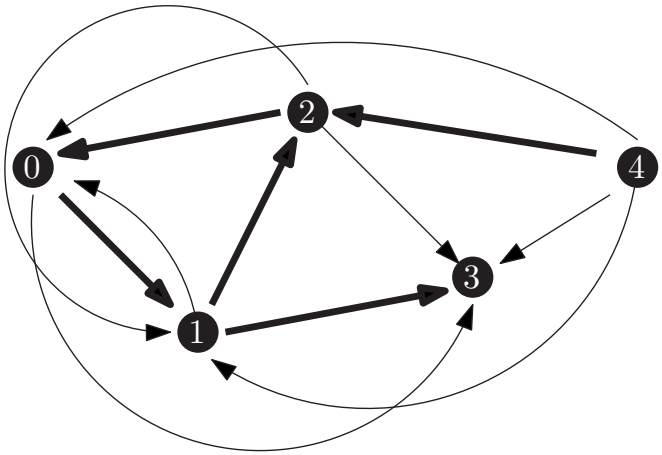


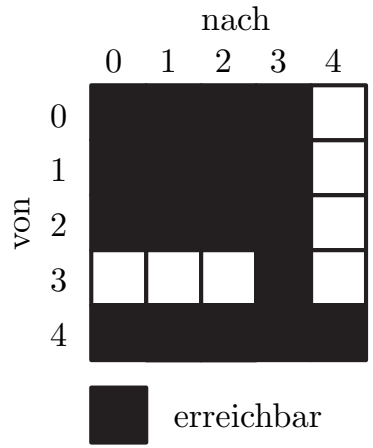

```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

Floyd Warshall

107 Iterationen später . . .

Floyd Warshall



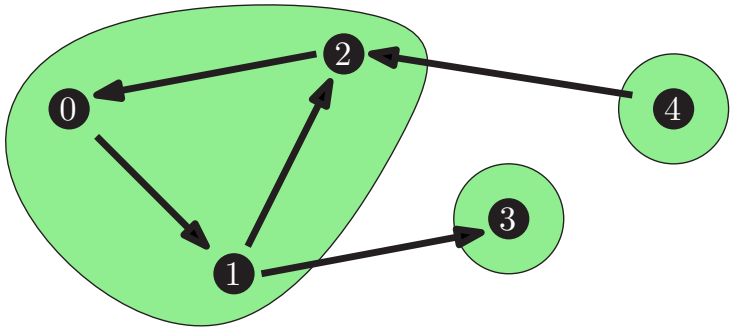


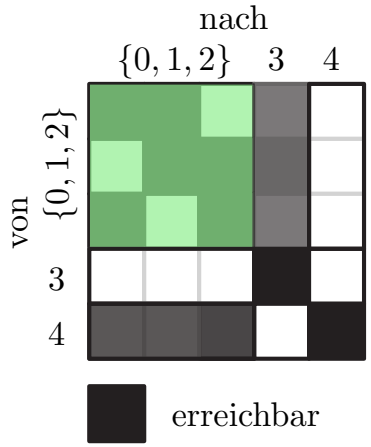

```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

Floyd Warshall und SCC

- Transitive Hülle einer SCC ist ein vollständiger Graph
- Betrachte Schrumpfgraphen: Floyd Warshall in $\#SCC^3$
- Deutlich Schneller falls $\#SCC < n$

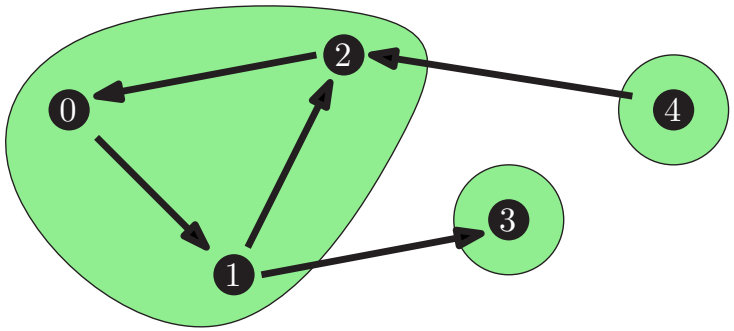
Floyd Warshall und SCC

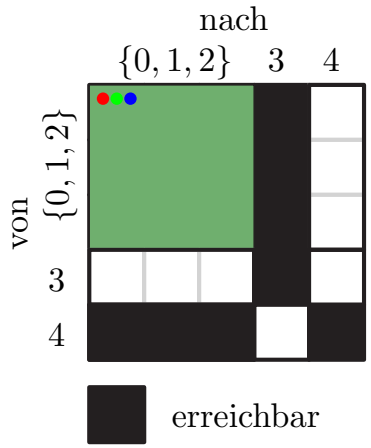





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

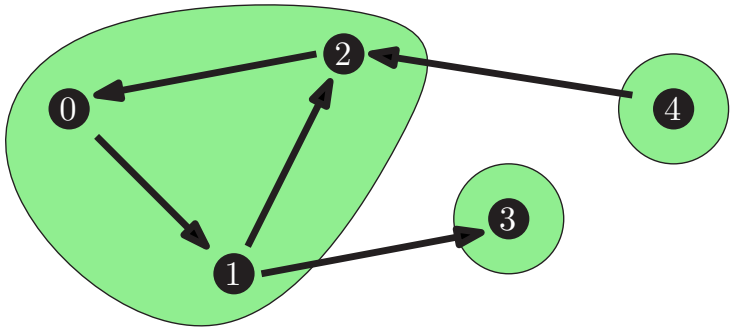
Floyd Warshall und SCC

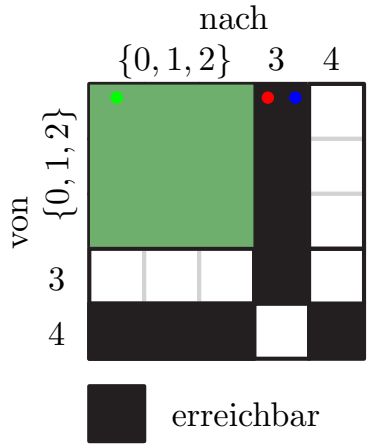





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

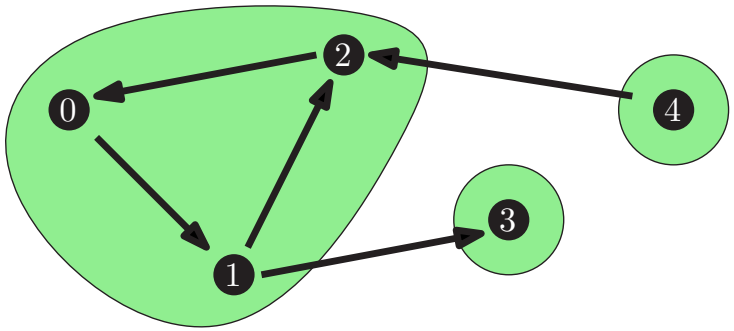
Floyd Warshall und SCC

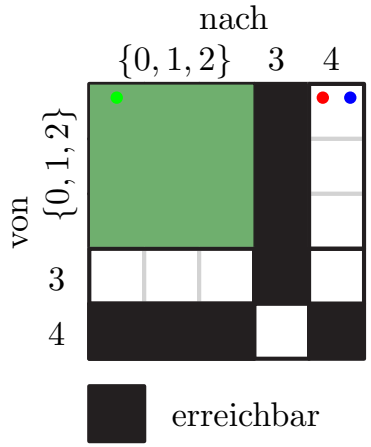





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

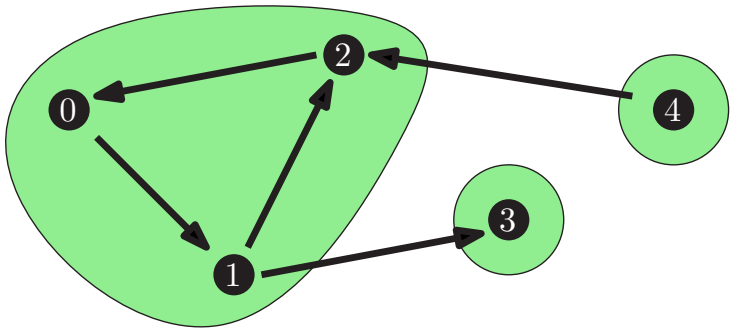
Floyd Warshall und SCC

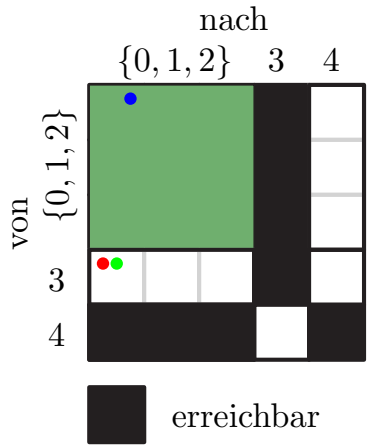





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

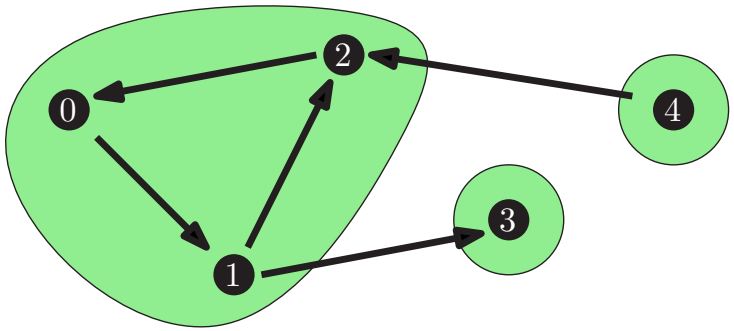
Floyd Warshall und SCC

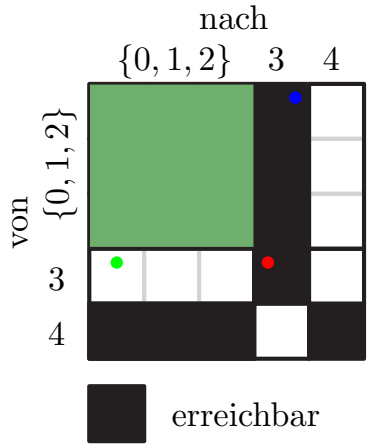





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

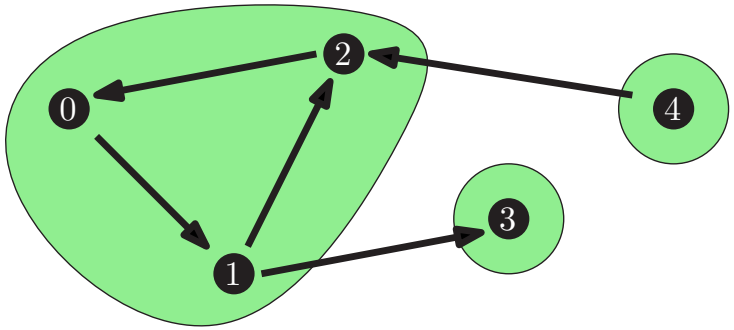
Floyd Warshall und SCC

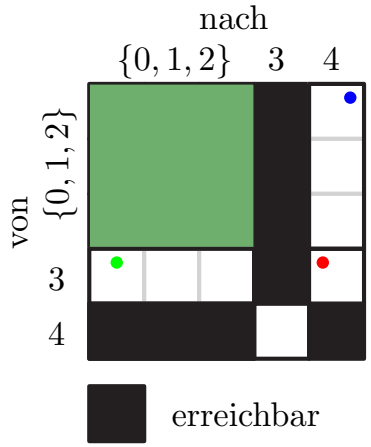





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

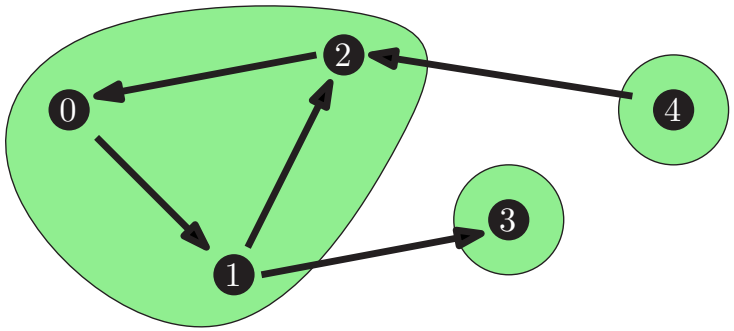
Floyd Warshall und SCC

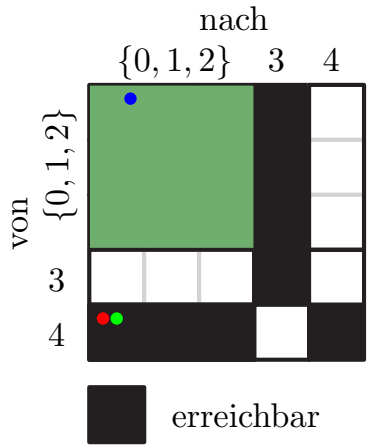





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

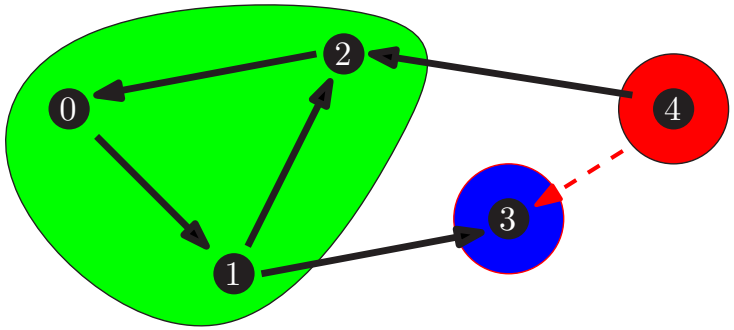
Floyd Warshall und SCC

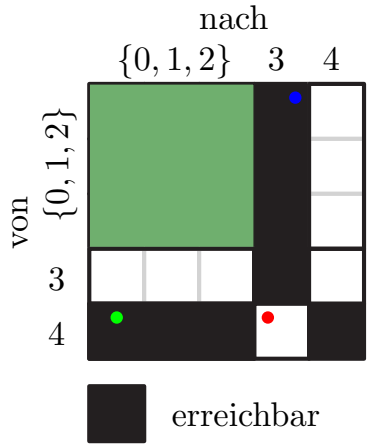





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

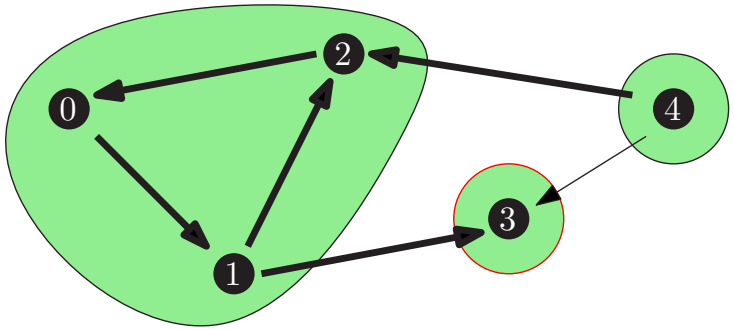
Floyd Warshall und SCC

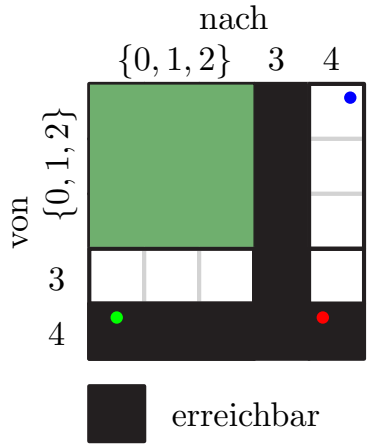





```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

Floyd Warshall und SCC






```
for int k = 0; k < n; ++k do
    for int i = 0; i < n; ++i do
        for int j = 0; j < n; ++j do
            array[i][j] = array[i][j] ||
            (array[i][k] && array[k][j]);
        end
    end
end
```

Floyd Warshall und SCC

- SCC-Algorithmus nicht nur eleganter Algorithmus . . .
- . . . sondern auch Tool für bessere Algorithmen
- Linearzeit Algorithmus kann teurere Algorithmen deutlich beschleunigen

Ende!

Feierabend!