Übung 7 – Algorithmen II

Sebastian Lamm, Demian Hespe – *lamm@kit.edu,hespe@kit.edu*

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS18.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

Themenübersicht

Übungsinhalt

- Hashing
- Approximationsalgorithmen
  (schwierige Probleme gut abschätzen)
  - Grundlagen (Gütemaß, Klassen)
  - Minimum Metric TSP

Approximationsalgorithmen

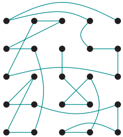
Grundlagen

Karlsruher Institut für Technologie

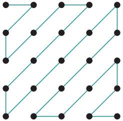
Warum Lösungen abschätzen?

- es gibt “schwierige” Probleme (z.B. TSP mit exponentieller Laufzeit)
  - → exakte Berechnung nicht möglich zu unseren Lebzeiten

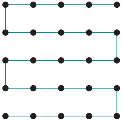
- vernünftige Näherungen effizient berechnen
  - → exakte/optimale Ergebnisse nicht immer wichtig
  - → “gute” Lösungen genügen oft
  - → aber Abstand zur korrekten Lösung wissenswert



Weglänge “lang”



Weglänge $8 + 16\sqrt{2}$



Weglänge 24

Approximationsalgorithmen
Gütemaß

- Ein Algorithmus ALG hat einen Approximationsfaktor ρ, wenn gilt

$$\frac{w\left(ALG(I)\right)}{w\left(OPT(I)\right)} \leq \rho$$

  f.a. Probleminstanzen I, OPT optimale Lösung, w Bewertungsfunktion
  (hier für Minimierungsprobleme, $\rho > 0$ ist obere Schranke)

Beispiel:

- ALG schätzt Distanz von Strecke x auf nächste Zweierpotenz $2^{\lceil \log |x| \rceil}$
- OPT bestimmt korrekte Distanz $|x|$

$$\Rightarrow \quad \frac{w(ALG)}{w(OPT)} = \frac{2^{\lceil \log |x| \rceil}}{|x|} \leq \frac{2^{\log |x| + 1}}{|x|} = \frac{2|x|}{|x|} = 2 = \rho$$

(Zahlenbeispiel: $|x| = 2^{10} + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2^{11}}{2^{10}+1} = 2 - \frac{2}{2^{10}+1} \approx 2$)

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

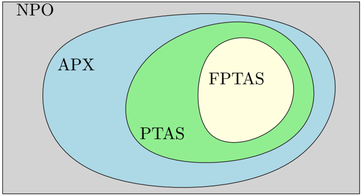
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX (*approximable*)
$\rho = const.$, T polynomiell in n

PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}, \rho(n, \varepsilon) = 2$

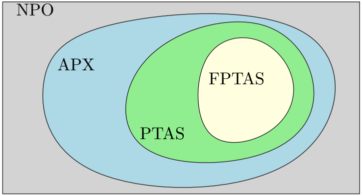
$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}, \rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n, \rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen
Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen
APX (*approximable*)
$\rho = const.$, T polynomiell in n
PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n
FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:
$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)
$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$
$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

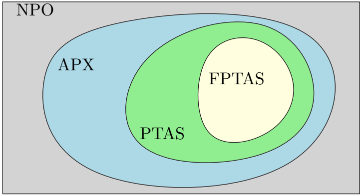
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX (*approximable*)
$\rho = \mathit{const.}$, T polynomiell in n

PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ (PTAS)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

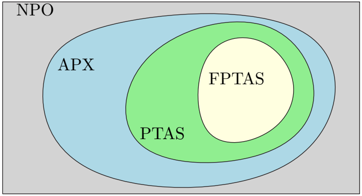
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX (*approximable*)
$\rho = \mathit{const.}$, T polynomiell in n

PTAS (*polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*)
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ (PTAS)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$ (FPTAS)

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP (NP-hart)

Problemstellung

- Gegeben eine Menge an Punkten V in der Ebene
- Vollständiger Graph
- Kantengewichte erfüllen Dreiecks-Ungleichung
- Finde Kreis minimaler Länge der alle Punkte abläuft

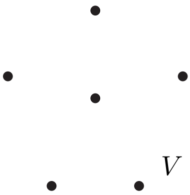
Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

Karlsruher Institut für Technologie

3/2-**Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



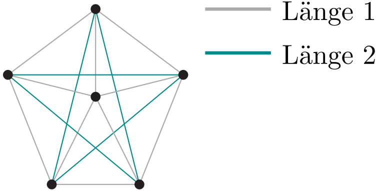
(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



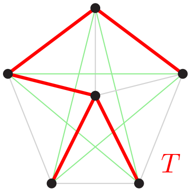
(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



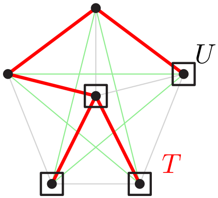
(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

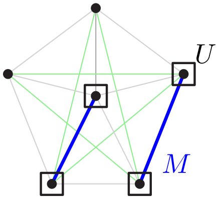


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

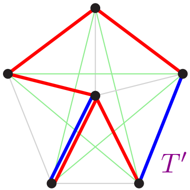
- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

3/2-Approximation (Algorithmus) (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

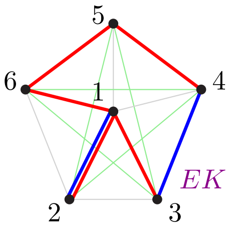


(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



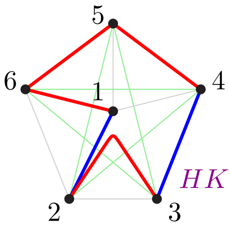
(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



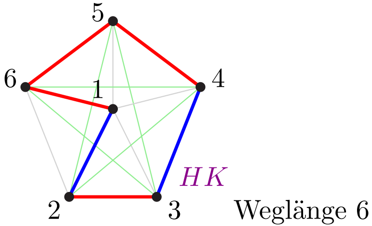
(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$**-Approximation (Algorithmus)** (Christofides-Heuristik)

- Graph $G = (V, E)$ (vollständig, ungerichtet)
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  (alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal)
- füge Kanten M zu $T \to T'$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  (alle Knoten haben geraden Grad)
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK



(Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$)

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

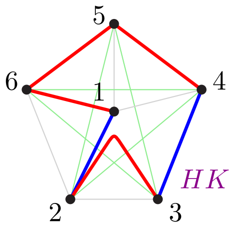
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T) (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK' (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$ (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

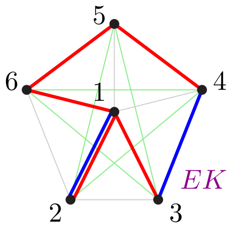
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

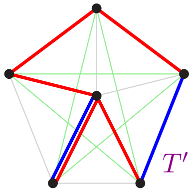
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T) (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK' (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$ (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

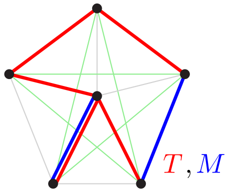
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

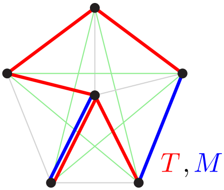
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

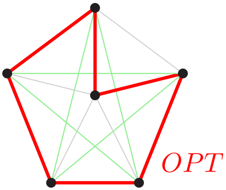
$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

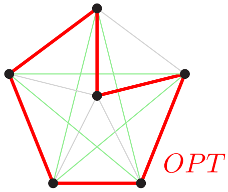
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

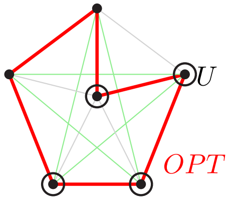
$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

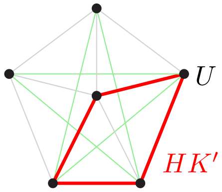
$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

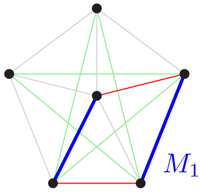
$3/2$**-Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

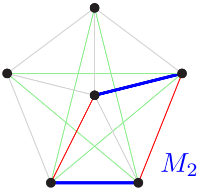
$3/2$-**Approximation (Beweis)** (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

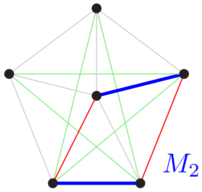
$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)

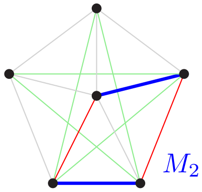
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

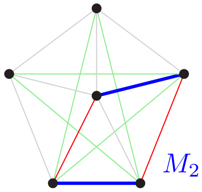
Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)
  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) (Christofides-Heuristik)

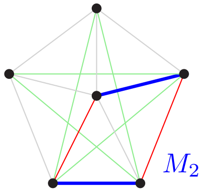
- Abschätzungen: (analog zu vorherigem Beweis)
  $\Rightarrow$ $w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    (erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT)
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    (existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$)

  $\Rightarrow$ $w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ (M min. Matching!)

  $\Rightarrow$ $2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  (Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung)

$\Rightarrow$ $w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



- Existiert immer perfektes Matching M?
  (Zeige, dass $|U|$ immer gerade ist!)

Approximationsalgorithmen

Zusammenfassung

Wissenswert (nicht erschöpfend!)

- Approximationsfaktor ρ
- APX, PTAS, FPTAS, pseudopolynomiell
- es gibt nicht gut approximierbare Probleme (z.B. minimum TSP)

Typische Fragestellungen

- Zu welcher Klasse gehört Algorithmus X mit $T(n, \varepsilon)$, $\rho(n, \varepsilon)$?
- Zeigen/Widerlegen Sie Approximationsfaktor ρ für Algorithmus X.
- (Bestimmen Sie einen Algorithmus mit Approximationsfaktor ρ)