

Algorithmen II

Peter Sanders, Timo Bingmann

Übungen:

Tobias Heuer, Sebastian Lamm

Institut für Theoretische Informatik

Web:

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS19.php

8 Approximationsalgorithmen

Eine Möglichkeit zum **Umgang mit NP-harten Problemen**

Beobachtung: Fast alle interessanten Optimierungsprobleme sind NP-hart

Auswege:

- Trotzdem optimale Lösungen suchen und riskieren, dass der Algorithmus nicht fertig wird
- Ad-hoc Heuristiken. Man kriegt eine Lösung aber wie gut ist die?
- Approximationsalgorithmen:**
Polynomielle Ausführungszeit.
Lösungen **garantiert „nah“** am Optimum.
- Problem umdefinieren/spezialisieren

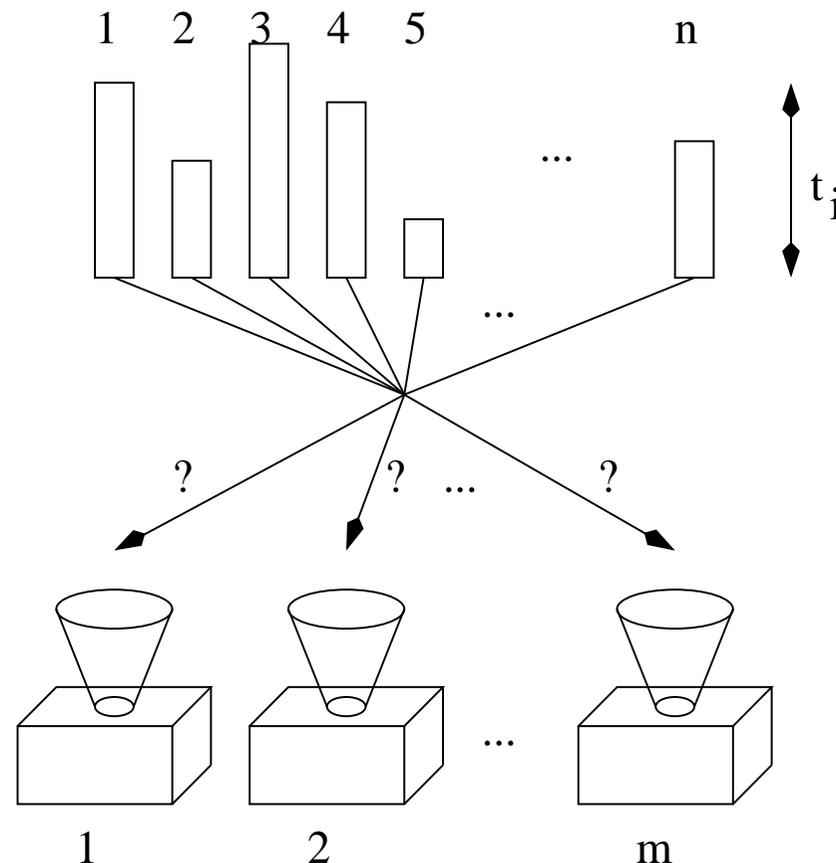
Scheduling unabhängiger gewichteter Jobs auf parallelen Maschinen

$x(j)$: Maschine auf der Job j ausgeführt wird

L_i : $\sum_{x(j)=i} t_j$, Last von Maschine i

Zielfunktion: Minimiere **Makespan**

$$L_{\max} = \max_i L_i$$



Details: Identische Maschinen, unabhängige Jobs, bekannte Ausführungszeiten, offline

List Scheduling

ListScheduling(n, m, \mathbf{t})

$J := \{1, \dots, n\}$

array $L[1..m] = [0, \dots, 0]$

while $J \neq \emptyset$ **do**

pick **any** $j \in J$

$J := J \setminus \{j\}$

// Shortest Queue:

pick i such that $L[i]$ is minimized

$\mathbf{x}(j) := i$

$L[i] := L[i] + t_j$

return \mathbf{x}

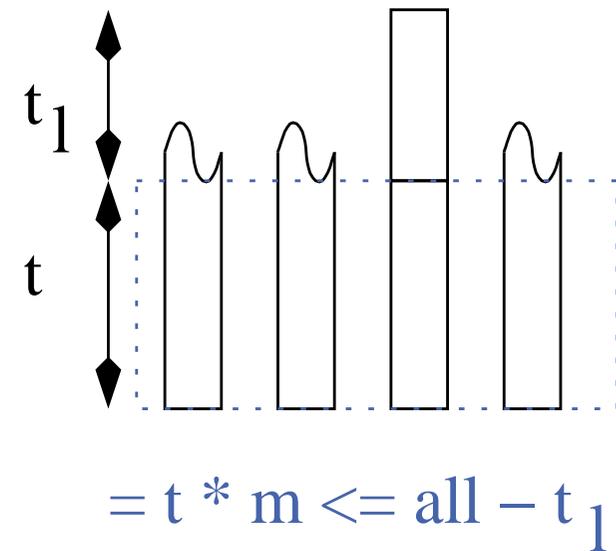
Viele Kleine Jobs

Lemma 1. Falls ℓ der zuletzt beendete Job ist, dann

$$L_{\max} \leq \sum_j \frac{t_j}{m} + \frac{m-1}{m} t_\ell$$

Beweis

$$L_{\max} = t + t_\ell \leq \sum_{j \neq \ell} \frac{t_j}{m} + t_\ell = \sum_j \frac{t_j}{m} + \frac{m-1}{m} t_\ell$$



Untere Schranken

Lemma 2. $L_{\max} \geq \sum_j \frac{t_j}{m}$

Lemma 3. $L_{\max} \geq \max_j t_j$

Der Approximationsfaktor

Definition:

Ein Minimierungsalgorithmus erzielt **Approximationsfaktor** ρ bezüglich Zielfunktion f falls er für **alle** Eingaben I , eine Lösung $\mathbf{x}(I)$ findet, so dass

$$\frac{f(\mathbf{x}(I))}{f(\mathbf{x}^*(I))} \leq \rho$$

wobei $\mathbf{x}^*(I)$ die optimale Lösung für Eingabe I bezeichnet.

Satz: ListScheduling erzielt Approximationsfaktor $2 - \frac{1}{m}$.

Beweis:

$$\frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x}^*)} \quad \text{(obere Schranke Lemma 1)}$$

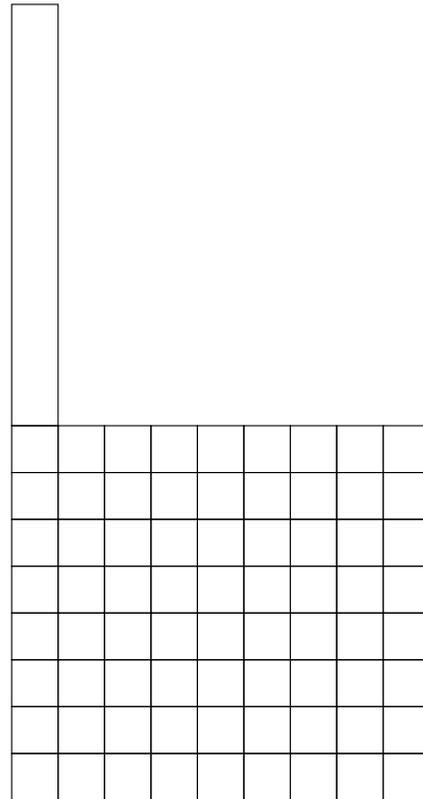
$$\leq \frac{\sum_j t_j / m}{f(\mathbf{x}^*)} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{t_\ell}{f(\mathbf{x}^*)} \quad \text{(untere Schranke Lemma 2)}$$

$$\leq 1 + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{t_\ell}{f(\mathbf{x}^*)} \quad \text{(untere Schranke Lemma 3)}$$

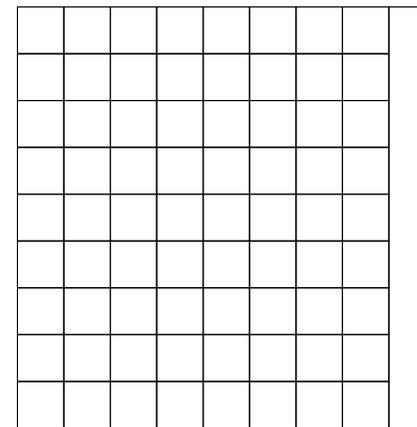
$$\leq 1 + \frac{m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m}$$

Diese Schranke ist bestmöglich

Eingabe: $m(m - 1)$ Jobs der Größe 1 und ein Job der Größe m .



List Scheduling: $2m-1$



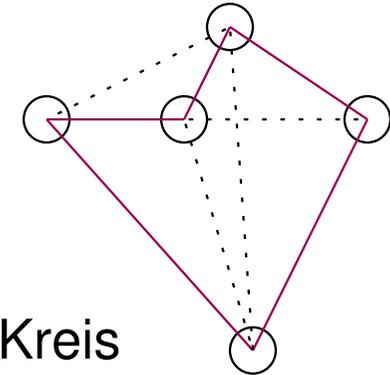
OPT: m

Also ist der Approximationsfaktor $\geq 2 - 1/m$.

Mehr zu Scheduling (siehe Approx-Vorlesung)

- 4/3-Approximation: Sortiere die Jobs nach **absteigender Größe**.
Dann List-Scheduling. Zeit $O(n \log n)$.
- Schnelle 7/6 Approximation: Rate Makespan (binäre Suche).
Dann **Best Fit Decreasing**.
- PTAS** ... später ...
- Uniform machines: Maschine i hat **Geschwindigkeit v_i** job j
braucht Zeit t_j/v_i auf Maschine j . \rightsquigarrow relative einfache
Verallgemeinerung
- Unrelated Machines** Job j braucht Zeit t_{ji} auf Maschine j .
2-Approximation. Ganz anderer Algorithmus.
- uvam: Andere Zielfunktionen, Reihenfolgebeschränkungen, ...

Nichtapproximierbarkeit des Handlungsreisendenproblems (TSP)



Gegeben ein Graph $G = (V, V \times V)$, finde einen einfachen Kreis $C = (v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ so dass $n = |V|$ und $\sum_{(u,v) \in C} d(u, v)$ minimiert wird.

Satz: Es ist NP-hart das TSP innerhalb irgendeines Faktors a zu approximieren.

Beweisansatz: Es genügt zu zeigen, dass
 $\text{HamiltonCycle} \leq_p a\text{-Approximation von TSP}$

α -Approximation von TSP

Gegeben:

Graph $G = (V, V \times V)$ mit Kantengewichten $d(u, v)$,
Parameter W .

Gesucht ist ein Algorithmus, mit folgenden Eigenschaften:

$[G, W]$ wird akzeptiert $\longrightarrow \exists$ Tour mit Gewicht $\leq \alpha W$.

$[G, W]$ wird abgelehnt $\longrightarrow \nexists$ Tour mit Gewicht $\leq W$.

HamiltonCycle \leq_p a -Approximation von TSP

Sei $G = (V, E)$ beliebiger ungerichteter Graph.

Definiere $d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (u, v) \in E \\ 1 + an & \text{sonst} \end{cases}$

Dann und nur dann, wenn G einen Hamiltonkreis hat gilt

\exists TSP Tour mit **Kosten n**

(sonst optimale **Kosten $\geq (n - 1) \cdot 1 + (an + 1) = an + n > an$**)

Entscheidungsalgorithmus für Hamiltonkreis:

Führe a -approx TSP auf $[G, n]$ aus.

Wird akzeptiert

$\longrightarrow \exists$ Tour mit Gewicht $\leq an$

$\longrightarrow \exists$ Tour mit Gewicht $n \longrightarrow \exists$ Hamiltonpfad

sonst \nexists Hamiltonpfad

TSP mit Dreiecksungleichung

G (ungerichtet) erfüllt die Dreiecksungleichung

$$\forall u, v, w \in V : d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

Metrische Vervollständigung

Betrachte beliebigen unger. Graph $G = (V, E)$ mit Gewichtsfunktion

$c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$. Definiere

$d(u, v) :=$ Länge des kürzesten Pfades von u nach v

Beispiel: (ungerichteter) Strassengraph \longrightarrow Abstandstabelle

Euler-Touren/-Kreise

Betrachte beliebigen zusammenhängenden ungerichteten (Multi-)Graph $G = (V, E)$ mit $|E| = m$.

Ein Pfad $P = \langle e_1, \dots, e_m \rangle$ ist ein **Euler-Kreis** falls $\{e_1, \dots, e_m\} = E$.
(Jede **Kante** wird genau einmal besucht)

Satz: G hat Euler-Kreis gdw. G ist zusammenhängend und $\forall v \in V : \text{Grad}(v)$ ist gerade.

Euler-Kreise lassen sich in Zeit $O(|E| + |V|)$ finden.

2-Approximation durch minimalen Spannbaum

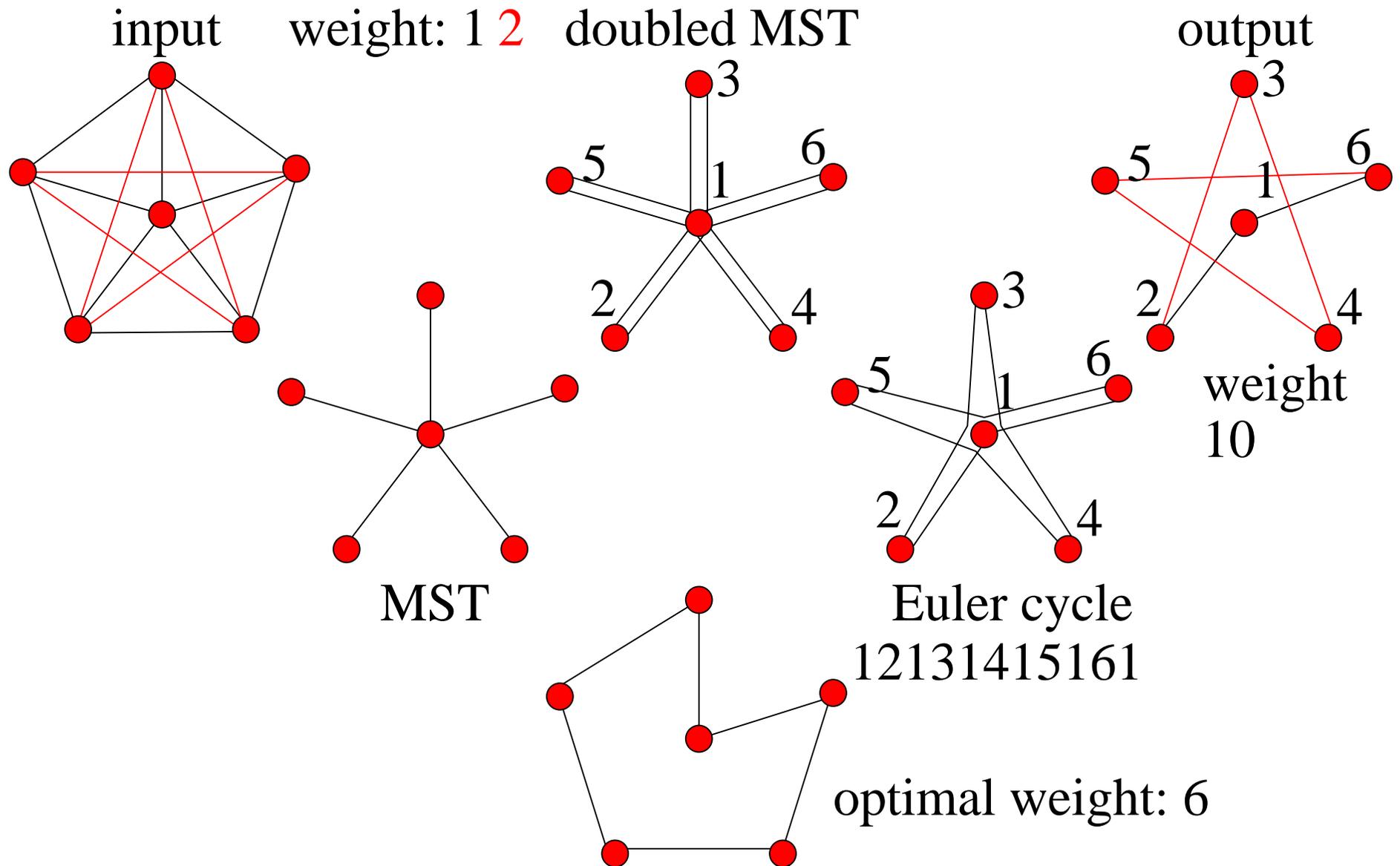
Lemma 4.

Gesamtgewicht eines *MST* \leq
Gesamtgewicht jeder *TSP-Tour*

Algorithmus:

$T := \text{MST}(G)$	// $\text{weight}(T) \leq \text{opt}$
$T' := T$ with every edge doubled	// $\text{weight}(T') \leq 2\text{opt}$
$T'' := \text{EulerKreis}(T')$	// $\text{weight}(T'') \leq 2\text{opt}$
output $\text{removeDuplicates}(T'')$	// shortcutting

Beispiel



Beweis von $\text{Gewicht MST} \leq \text{Gewicht TSP-Tour}$

Sei T die optimale TSP tour

entferne eine Kante

macht T leichter

nun ist T ein Spannbaum

der nicht leichter sein kann als der

MST



Allgemeine Technik: Relaxation

hier: ein TSP-Pfad ist ein Spezialfall eines Spannbaums

Mehr TSP

- Praktisch bessere 2-Approximationen, z.B. lightest edge first
- Relativ einfache aber unpraktische 3/2-Approximation
(MST + min. weight perfect matching + Euler-Kreis)
- PTAS for **Euclidean TSP**
- Versuchskanichen für praktisch jede Optimierungs**heuristik**
- Optimale Lösungen für praktische Eingaben. Faustregel:
Falls es in den Speicher passt, läßt sichs lösen.
[\[http://www.tsp.gatech.edu/concorde.html\]](http://www.tsp.gatech.edu/concorde.html)
sechsstellige Anzahl Codezeilen.
- TSP-artige Anwendungen sind meist komplizierter

Pseudopolynomielle Algorithmen

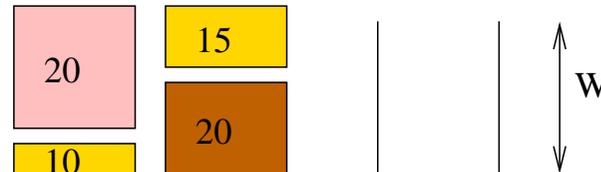
\mathcal{A} ist **pseudopolynomieller** Algorithmus falls

$$\text{Time}_{\mathcal{A}}(n) \in \mathbf{P}(n)$$

wobei n die Anzahl Eingabebits ist,

wenn alle Zahlen **unär** codiert werden ($k \equiv 1^k$).

Beispiel Rucksackproblem



- n Gegenstände mit Gewicht $w_i \in \mathbb{N}$ und profit p_i
oBdA: $\forall i \in 1..n : w_i \leq W$
- Wähle eine Teilmenge \mathbf{x} von Gegenständen
- so dass $\sum_{i \in \mathbf{x}} w_i \leq W$ und
- maximiere den Profit $\sum_{i \in \mathbf{x}} p_i$

Dynamische Programmierung **nach Profit**

$C(i, P)$:= kleinste Kapazität für Gegenstände $1, \dots, i$ die Profit $\geq P$ ergeben.

Lemma 5.

$$\forall 1 \leq i \leq n : C(i, P) = \min(C(i-1, P), \\ C(i-1, P - p_i) + w_i)$$

Dynamische Programmierung **nach Profit**

Sei \hat{P} obere Schranke für den Profit (z.B. $\sum_i p_i$).

Zeit: $O(n\hat{P})$ **pseudo**-polynomiell

z.B. $0..n \times 0..\hat{P}$ Tabelle $C(i, P)$ spaltenweise ausfüllen

Platz: $\hat{P} + O(n)$ Maschinenworte plus $\hat{P}n$ bits.

Fully Polynomial Time Approximation Scheme

Algorithm \mathcal{A} ist ein

(Fully) Polynomial Time Approximation Scheme

für $\begin{matrix} \text{minimization} \\ \text{maximization} \end{matrix}$ Problem Π falls:

Eingabe: Instanz I , Fehlerparameter ε

Ausgabequalität: $f(\mathbf{x}) \begin{matrix} \leq \\ \geq \end{matrix} \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 1-\varepsilon \end{pmatrix} \text{opt}$

Zeit: Polynomiell in $|I|$ (und $1/\varepsilon$)

Beispielschranken

PTAS	FPTAS
$n + 2^{1/\varepsilon}$	$n^2 + \frac{1}{\varepsilon}$
$n^{\log \frac{1}{\varepsilon}}$	$n + \frac{1}{\varepsilon^4}$
$n^{\frac{1}{\varepsilon}}$	n/ε
n^{42/ε^3}	\vdots
$n + 2^{2^{1000/\varepsilon}}$	\vdots
\vdots	\vdots

FPTAS für Knapsack

$$P := \max_i p_i$$

// maximaler Einzelprofit

$$K := \frac{\varepsilon P}{n}$$

// Skalierungsfaktor

$$p'_i := \left\lfloor \frac{p_i}{K} \right\rfloor$$

// skaliere Profite

$$\mathbf{x}' := \text{dynamicProgrammingByProfit}(\mathbf{p}', \mathbf{w}, C)$$

gib \mathbf{x}' aus

Lemma 6. $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' \geq (1 - \varepsilon)\text{opt}$.

Beweis. Betrachte die optimale Lösung \mathbf{x}^* .

$$\begin{aligned} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - K\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}^* &= \sum_{i \in \mathbf{x}^*} \left(p_i - K \left\lfloor \frac{p_i}{K} \right\rfloor \right) \\ &\leq \sum_{i \in \mathbf{x}^*} \left(p_i - K \left(\frac{p_i}{K} - 1 \right) \right) = |\mathbf{x}^*|K \leq nK, \end{aligned}$$

also, $K\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}^* \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - nK$. Weiterhin,

$$K\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}^* \leq K\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}' = \sum_{i \in \mathbf{x}'} K \left\lfloor \frac{p_i}{K} \right\rfloor \leq \sum_{i \in \mathbf{x}'} K \frac{p_i}{K} = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}'. \text{ Also,}$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' \geq K\mathbf{p}' \cdot \mathbf{x}^* \geq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}^* - nK = \text{opt} - \varepsilon \underbrace{P}_{\leq \text{opt}} \geq (1 - \varepsilon)\text{opt}$$

□

Lemma 7. Laufzeit $O(n^3 / \varepsilon)$.

Beweis. Die Laufzeit $O(n\hat{P}')$ der dynamischen Programmierung dominiert:

$$n\hat{P}' \leq n \cdot (n \cdot \max_{i=1}^n p'_i) = n^2 \left[\frac{P}{K} \right] = n^2 \left[\frac{Pn}{\varepsilon P} \right] \leq \frac{n^3}{\varepsilon}.$$

□

Das beste bekannte FPTAS

[Kellerer, Pferschy 04]

$$O\left(\min\left\{n \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{\log^2 \frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon^3}, \dots\right\}\right)$$

- Weniger buckets C_j (nichtuniform)
- Ausgefeilte dynamische Programmierung

Optimale Algorithmen für das Rucksackproblem

Annähernd Linearzeit für fast alle Eingaben! In Theorie und Praxis.

[Beier, Vöcking, An Experimental Study of Random Knapsack Problems, European Symposium on Algorithms, 2004.]

[Kellerer, Pferschy, Pisinger, Knapsack Problems, Springer 2004.]