Karlsruhe Institute of Technology

Algorithmen II

Peter Sanders, Timo Bingmann

Übungen:

Tobias Heuer, Sebastian Lamm

Institut für Theoretische Informatik

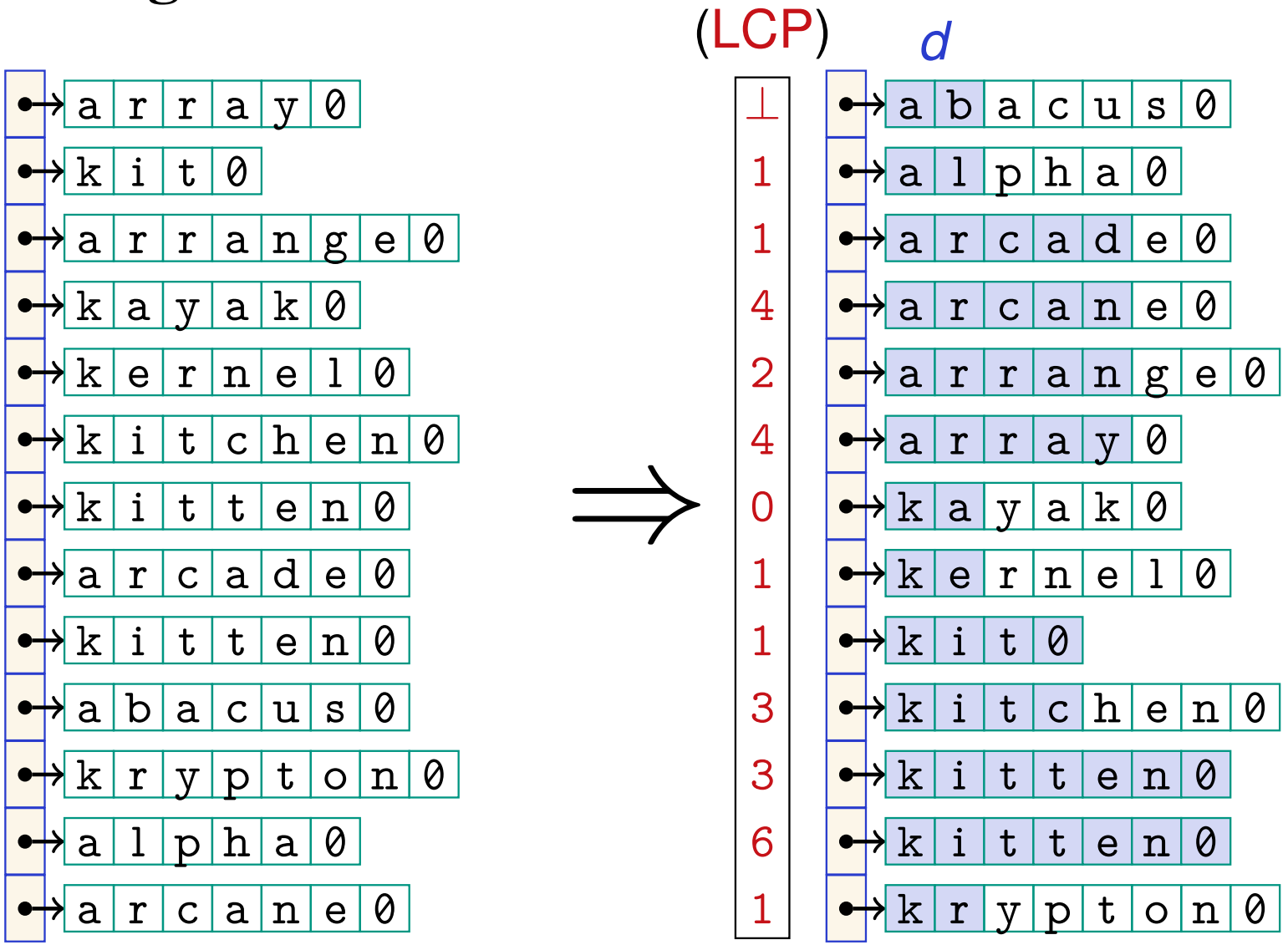
Web:

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS19.php`

11 Stringology (Zeichenkettenalgorithmen)

- Strings sortieren
- Patterns suchen
  - Pattern vorverarbeiten
  - Text vorverarbeiten
    - Invertierte Indizes
    - Suffix Trees / Suffix Arrays
- Datenkompression
- Pattern suchen in komprimierten Indizes

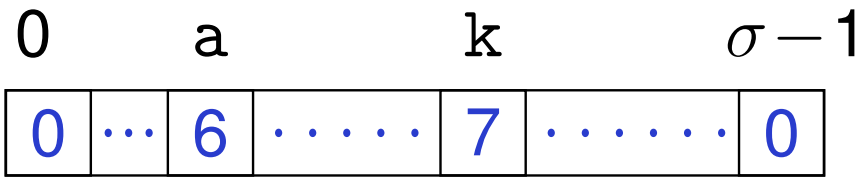
Strings Sortieren



Eingabe: n Strings mit N Zeichen insgesamt.

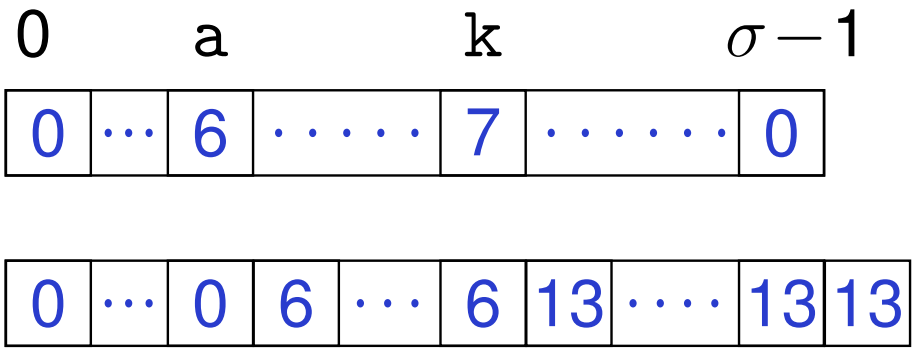
Sortieren: Most Significant Digit Radix Sort

a r r a y
k i t
a r r a n g e
k a y a k
k e r n e l
k i t c h e n
k i t t e n
a r c a d e
k i t e
a b a c u s
k r y p t o n
a l p h a
a r c a i c



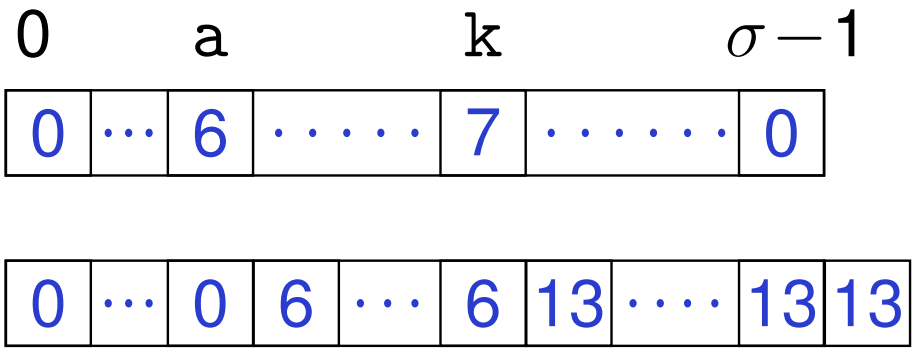
Sortieren: Most Significant Digit Radix Sort

a r r a y
k i t
a r r a n g e
k a y a k
k e r n e l
k i t c h e n
k i t t e n
a r c a d e
k i t e
a b a c u s
k r y p t o n
a l p h a
a r c a i c



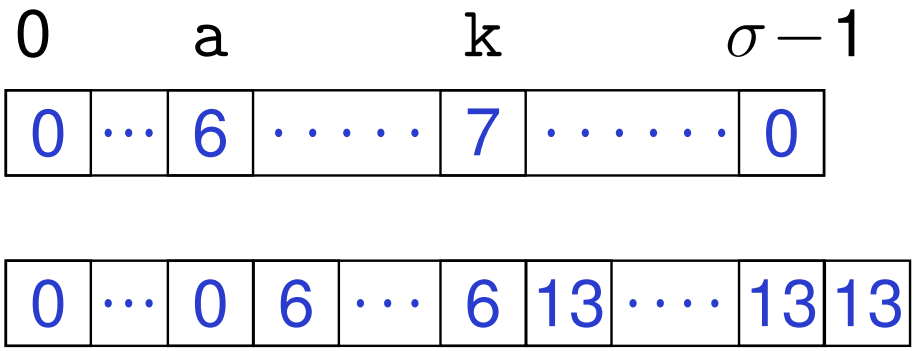
Sortieren: Most Significant Digit Radix Sort

a r r a y
k i t
a r r a n g e
k a y a k
k e r n e l
k i t c h e n
k i t t e n
a r c a d e
k i t e
a b a c u s
k r y p t o n
a l p h a
a r c a i c



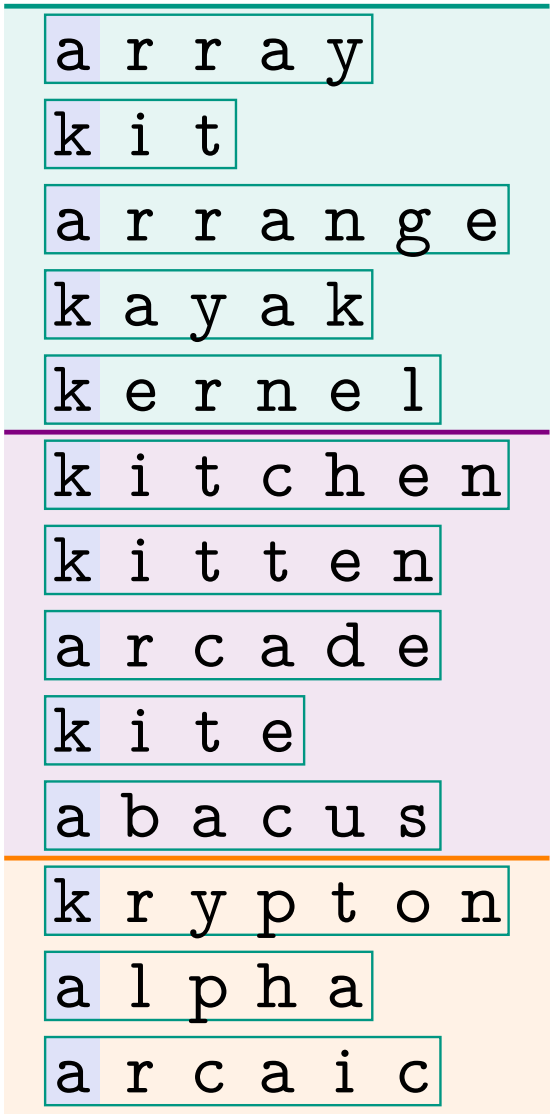
Sortieren: Most Significant Digit Radix Sort

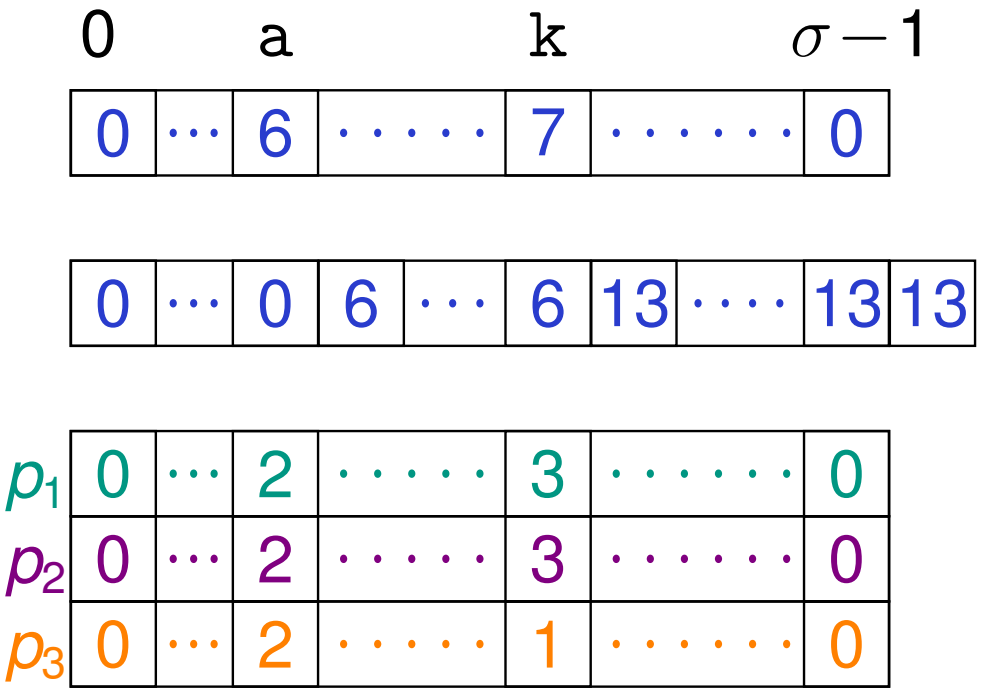
a r r a y
a r r a n g e
a r c a d e
a b a c u s
a l p h a
a r c a i c
k i t
k a y a k
k e r n e l
k i t c h e n
k i t t e n
k i t e
k r y p t o n



- Laufzeit: $\mathcal{O}(d + r\sigma + n \log \sigma)$
- Varianten: out-of-place und in-place!

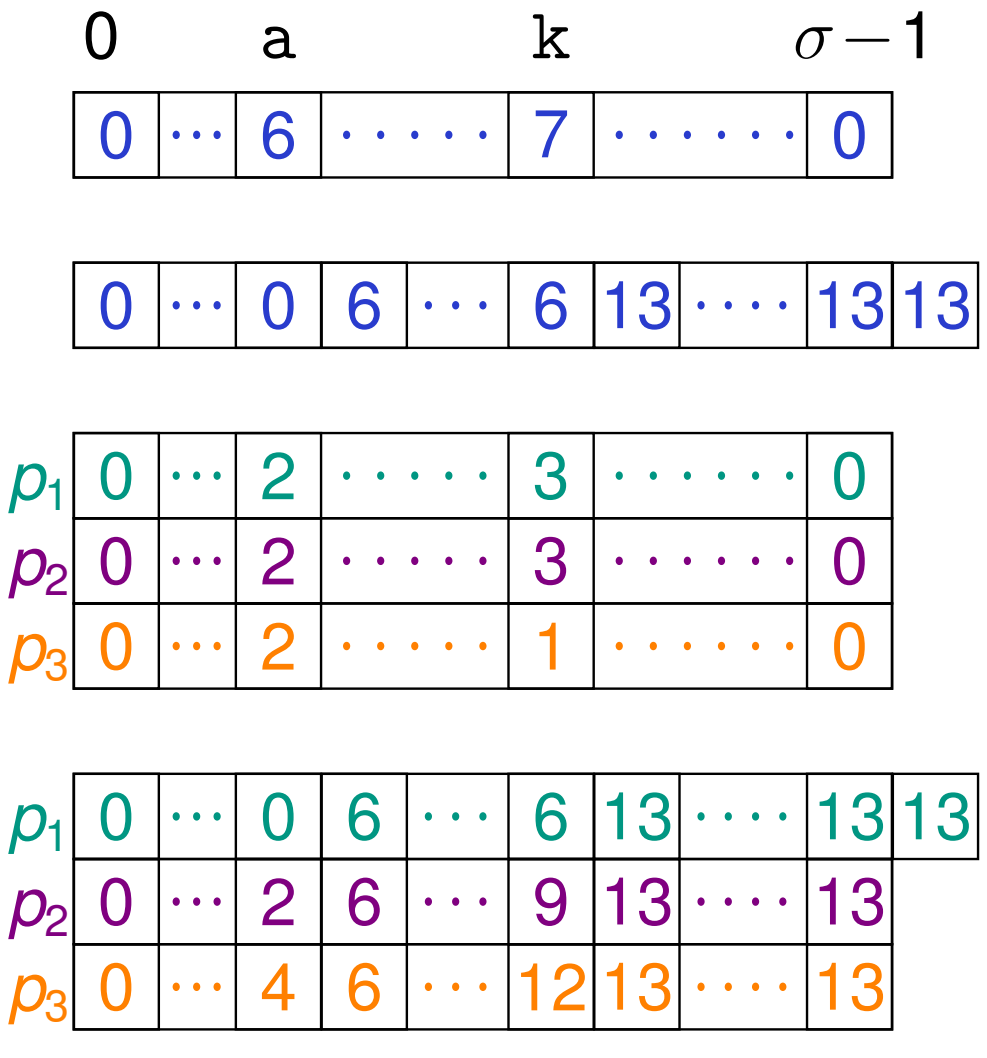
Sortieren: Most Significant Digit Radix Sort





Sortieren: Most Significant Digit Radix Sort

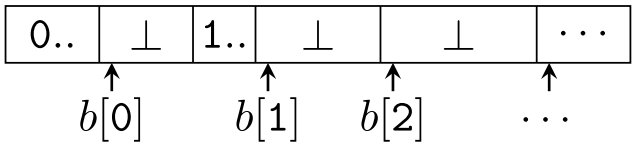
a r r a y
k i t
a r r a n g e
k a y a k
k e r n e l
k i t c h e n
k i t t e n
a r c a d e
k i t e
a b a c u s
k r y p t o n
a l p h a
a r c a i c



Sortieren: Most Significant Digit Radix Sort

Algorithm : Sequential Radix Sort "CE0", adapted from [KR08; Ran07]

```
1  Function RadixSortCE0(S, h)
       Input : S = [ s_0, ..., s_{n-1} ] an array of n strings with common prefix h.
2      c := [0, ..., 0]                          // Allocate |Σ| integer counters initialized with zero,
3      for i = 0, ..., n − 1 do  c[s_i[h]]++     // and count character occurrences.
4      b := [0, ⊥, ..., ⊥]                       // Calculate exclusive prefix sum of counters
5      for i = 1, ..., n − 1 do  b[i] := b[i − 1] + c[i − 1]   // as bucket pointers.
6      T := allocate(n, string pointer)          // Allocate temporary array for sorted output.
7      for i = 0, ..., n − 1 do                  // Reorder
8          T[b[s_i[h]]] := move(s_i)             // into
9          b[s_i[h]]++                           // buckets
10     copy(T → S),   deallocate(T, b).
11     x := c[0]                                 // Track beginning of bucket as x,
12     for i = 1, ..., |Σ| − 1 do                // recurse into every unfinished bucket,
13         StringSort(S[x .. x + c[i]), h + 1)    // except for the first (zero-termination),
14         x := x + c[i]                         // which contains all fully sorted strings.
       Output : The array S is fully sorted lexicographically.
```



Strings Sortieren: Multikey Quicksort

Auch: MKQS / ternary quicksort

Function mkqSort(S : Sequence **of** String, $\ell : \mathbb{N}$) : Sequence **of** String

assert $\forall e, e' \in S : e[1..\ell-1] = e'[1..\ell-1]$

if $|S| \leq 1$ **then return** S // base case

pick $p \in S$ uniformly at random // pivot string

return concatenation of mkqSort($\langle e \in S : e[\ell] < p[\ell] \rangle, \ell$),
mkqSort($\langle e \in S : e[\ell] = p[\ell] \rangle, \ell+1$), and
mkqSort($\langle e \in S : e[\ell] > p[\ell] \rangle, \ell$)

- Laufzeit: $O(|S| \log |S| + \sum_{t \in s} |t|)$
- genauer: $O(|S| \log |S| + d)$ (d: Summe der eindeutigen Präfixe)
- Übung: in-place!

Strings Sortieren: Multikey Quicksort

```
S A A L
B I E N E
E H R E
H A U S
A R M
M I E T E
T A S S E
M O R D
H A N D
S E E
H U N D
H A L L E
N A C H T
```

Strings Sortieren: Multikey Quicksort

```
      SAAL
      BIENE
      EHRE
      HAUS
      ARM
      MIETE
      TASSE
      MORD
p     HAND
      SEE
      HUND
      HALLE
      NACHT
```

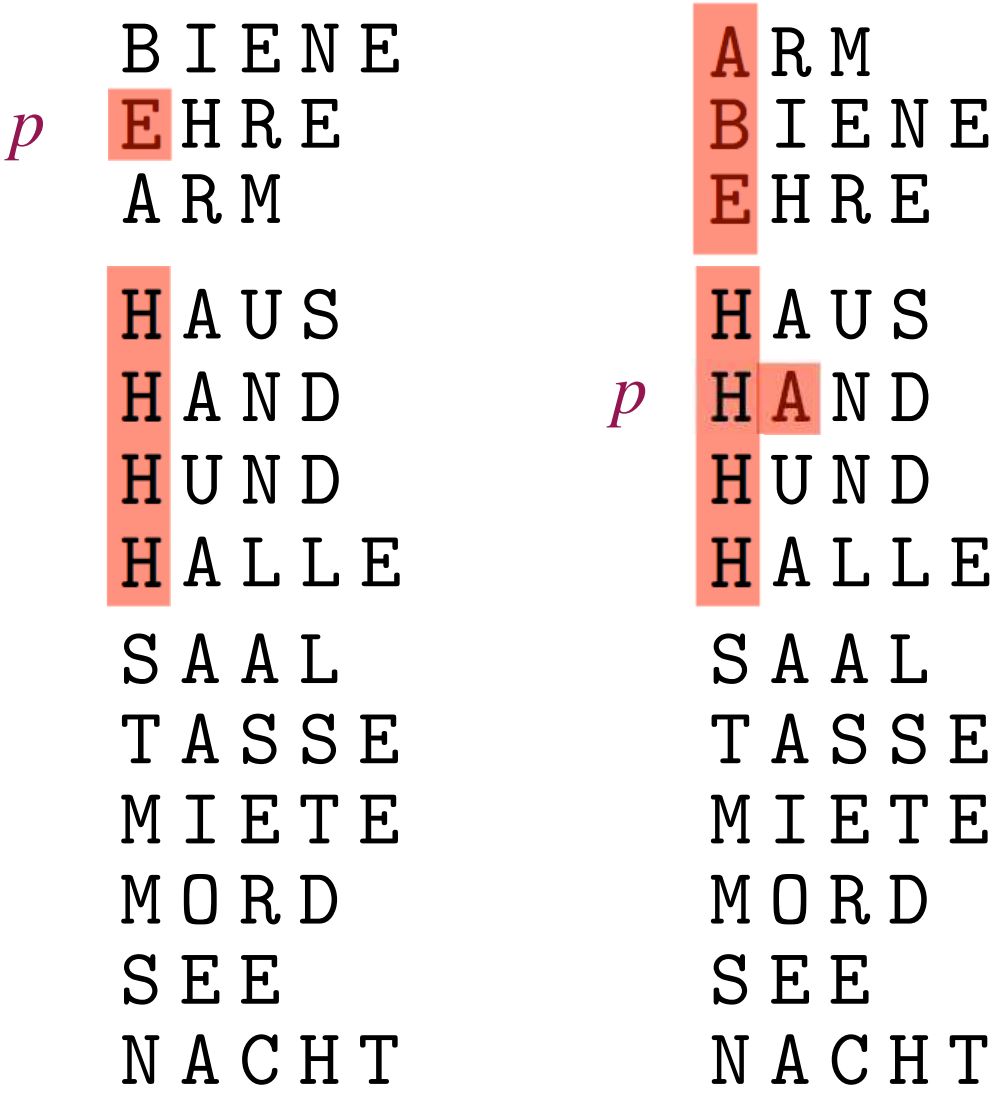
Strings Sortieren: Multikey Quicksort

BIENE
EHRE
ARM

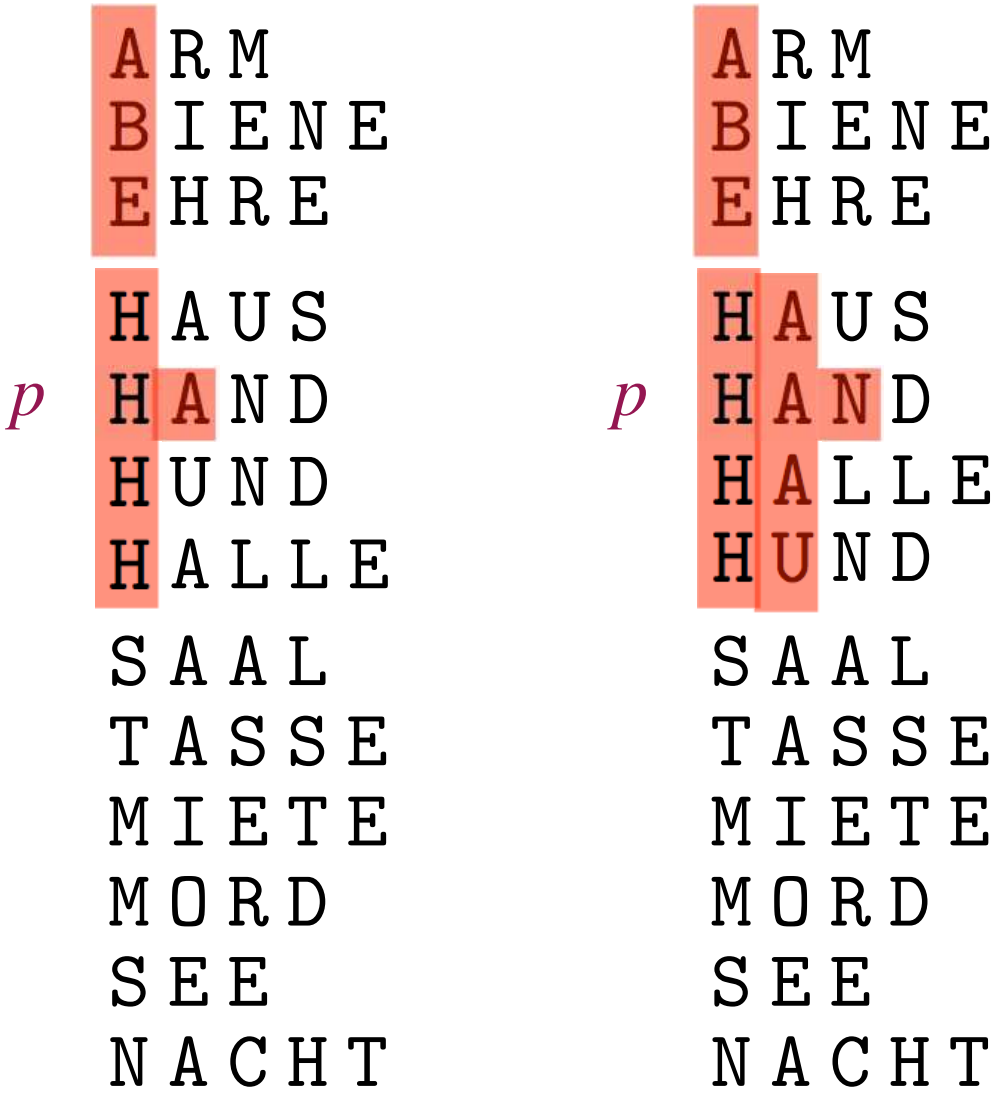
HAUS
HAND
HUND
HALLE

SAAL
TASSE
MIETE
MORD
SEE
NACHT

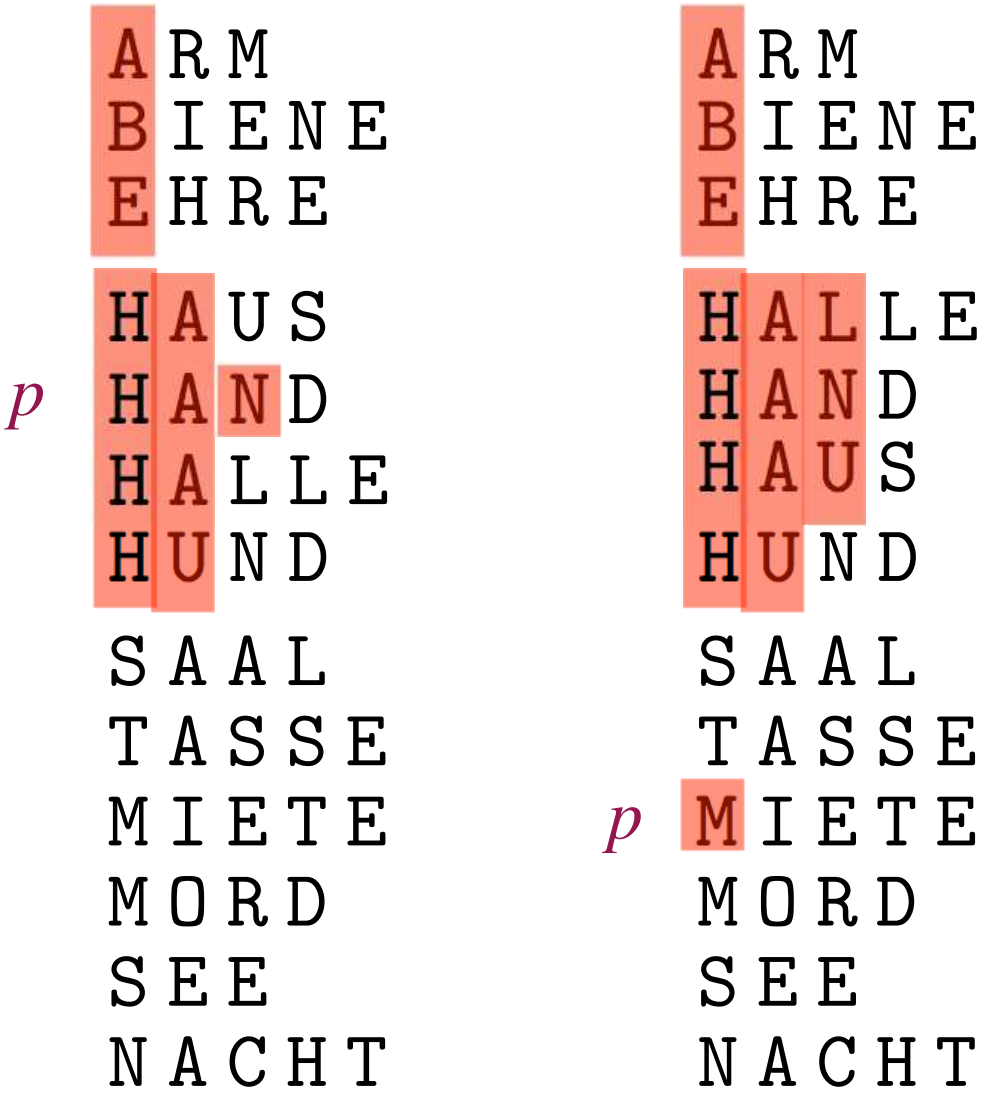
Strings Sortieren: Multikey Quicksort



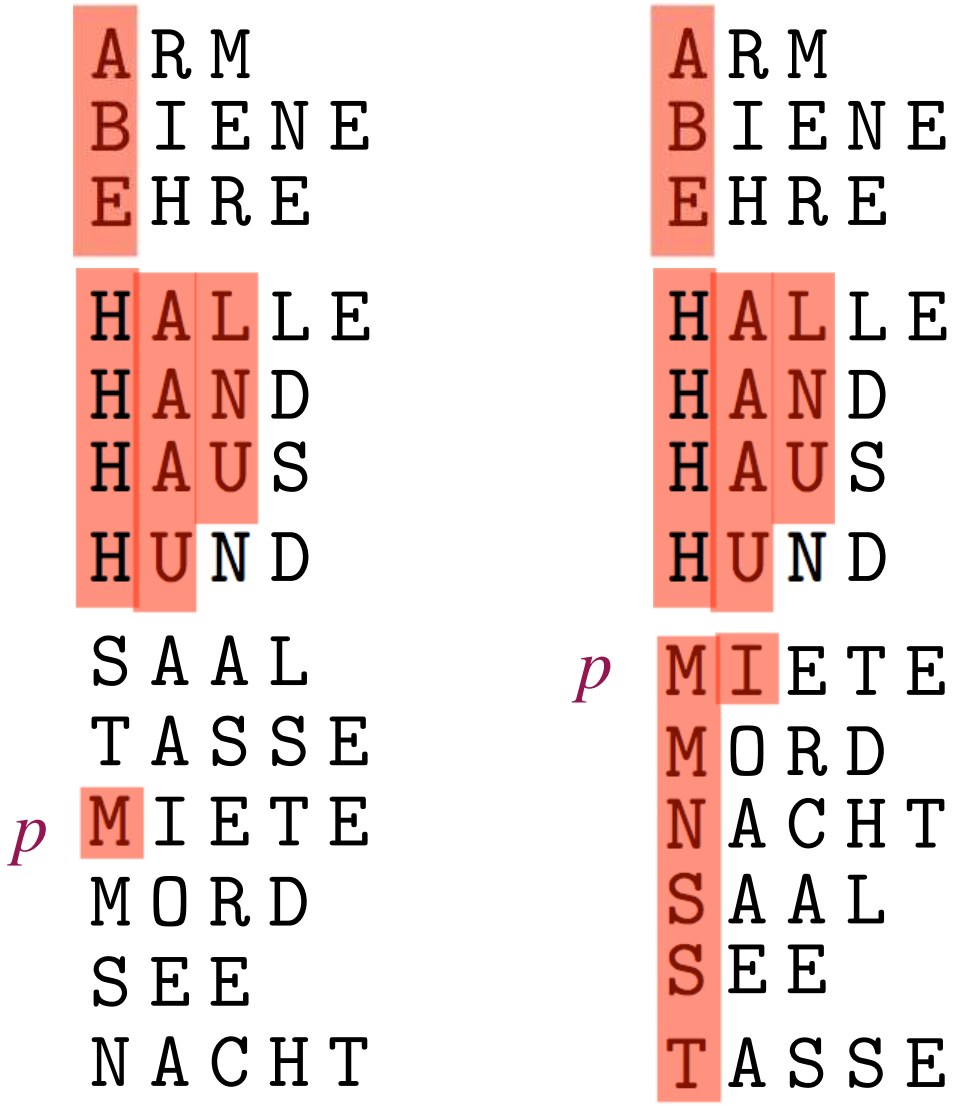
Strings Sortieren: Multikey Quicksort



Strings Sortieren: Multikey Quicksort



Strings Sortieren: Multikey Quicksort



Strings Sortieren: Multikey Quicksort

Strings Sortieren (ohne Endzeichen)

Function mkqSort(S : Sequence **of** String, $\ell : \mathbb{N}$) : Sequence **of** String

if $|S| \leq 1$ **then return** S

$S_\perp \leftarrow \langle e \in S : |e| = \ell \rangle$; $S \leftarrow S \setminus S_\perp$

select pivot $p \in S$

$S_< \leftarrow \langle e \in S : e[\ell] < p[\ell] \rangle$

$S_= \leftarrow \langle e \in S : e[\ell] = p[\ell] \rangle$

$S_> \leftarrow \langle e \in S : e[\ell] > p[\ell] \rangle$

return concatenation of $S_\perp$,
mkqSort$(S_<, \ell)$,
mkqSort$(S_=, \ell + 1)$, and
mkqSort$(S_>, \ell)$

Strings Sortieren – Laufzeitanalyse

Hauptarbeit in den Buchstabenvergleichen. Zwei Fälle:

- $e[\ell] = p[\ell]$: Ordne den Vergleich dem Zeichen $e[\ell]$ zu.
  - $e[\ell]$ wird danach nicht mehr betrachtet (Rekursion mit $\ell + 1$)
  - Maximale Vergleichsanzahl pro String e? Maximale Länge des längstes gemeinsamen Präfix von e mit $e' \in S$.
- $e[\ell] \neq p[\ell]$: Ordne den Vergleich dem String e zu.
  - e wird zu $S_<$ oder $S_>$ zugeordnet. Mit optimaler Pivotwahl sind beide Mengen höchstens $|S|/2$.
  - Nach höchstens $\log |S|$ Schritten ist e richtig sortiert.

Strings Sortieren: Algorithmen-Übersicht

Sequentielle Basis-Algorithmen

- ☐ Radix Sort $\mathrm{O}(d + n \log \sigma)$ [McIlroy et al. '95]
- ☐ Multikey Quicksort $\mathrm{O}(d + n \log n)$ exp. [Bentley, Sedgewick '97]
- ☐ Burstsort $\mathrm{O}(d + n \log \sigma)$ exp. [Sinha, Zobel '04]
- ☐ Binary LCP-Mergesort $\mathrm{O}(d + n \log n)$ [Ng, Kakehi '08]

Theoretische Parallele Algorithmen

- ☐ "Optimal Parallel String Algorithms: . . ." [Hagerup '94]
  $\mathrm{O}(\log N / \log \log N)$ time and $\mathrm{O}(N \log \log N)$ work on CRCW PRAM

Praktische Parallele und neue Basis-Algorithmen

- ☐ Parallel Super Scalar String Sample Sort (pS^5) [B, Sanders, ESA'13]
- ☐ Parallel K-way LCP-aware Merge(sort) [B, et al. Algorithmica'17]

Vergleich Sequentielle Algorithmen

Experiment [B'18]: Vergleich von 39 sequentiellen String Sorting Algorithmen und getunten Varianten auf sieben Eingaben und sechs Maschinen.
Unten: Repräsentative Auswahl der Basis-Algorithmen.

Rang	Algorithmus	GeoM
1	KR.radixsort-CE6	1.27
2	KRB.radixsort-CE3s	1.28
3	KR.radixsort-CE7	1.28
4	KRB.radixsort-CI3s	1.33
5	R.mkqs-cache8	1.34
6	KR.radixsort-CE2	1.49
7	KR.radixsort-DB	1.55

Rang	Algorithmus	GeoM
10	B.Seq-S^5-UI	1.67
14	R.burstsort-vec	1.72
16	SZ.burstsortA	1.78
23	BS.mkqs	2.36
28	NK.LCP-Mergesort	2.96
34	MBM.radixsort	4.82
35	AN.ForwardRadix16	4.88

Ergebnisse:

- Hardware-spezifische Beschleunigungen sind sehr wichtig.
- Cachen von Zeichen reduziert Random-Zugriffe aber kostet Speicher.

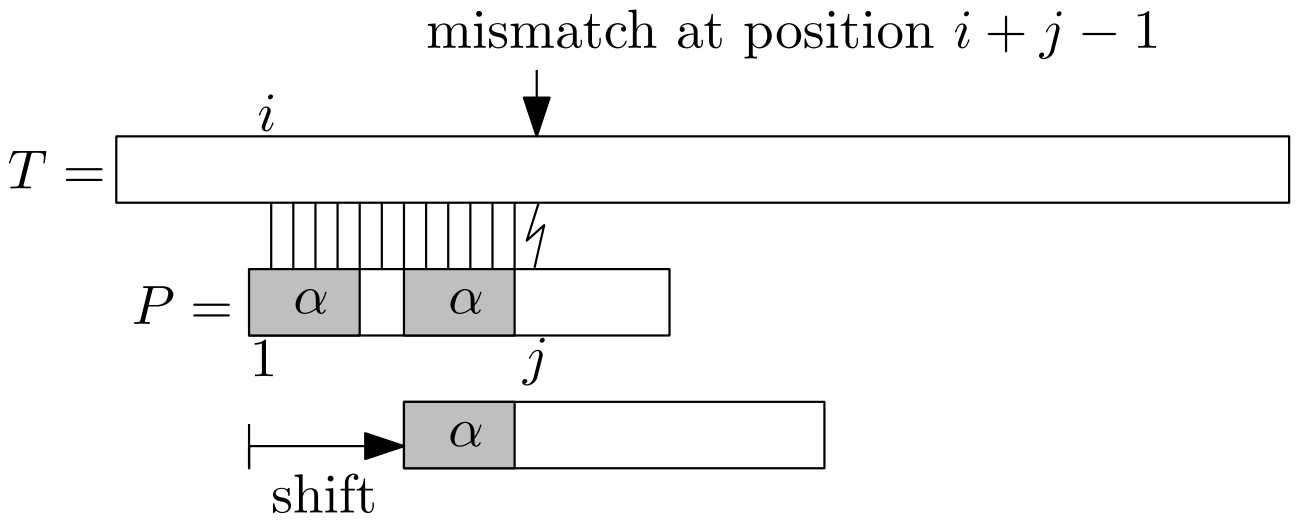
Naives Pattern Matching

- Aufgabe: Finde alle Vorkommen von P in T
  - n: Länge von T
  - m: Länge von P
- naiv in $O(nm)$ Zeit

```
i, j := 1                                          // indexes in T and P
while i ≤ n − m + 1
    while j ≤ m and t_{i+j−1} = p_j do j++         // compare characters
    if j > m then print "P occurs at position i in T"
    i++                                            // advance in T
    j := 1                                         // restart
```

Knuth-Morris-Pratt (1977)

- besserer Algorithmus in $O(n+m)$ Zeit
- Idee: beachte bereits gematchten Teil



- $\text{border}[j] =$ längstes echtes Präfix von $P_{1\ldots j-1}$, das auch (echtes) Suffix von $P_{1\ldots j-1}$ ist. $\text{border}[1] := -1, \quad \text{border}[2] = 0.$

Knuth-Morris-Pratt (1977)

$i := 1$ // index in T

$j := 1$ // index in P

while $i \leq n - m + 1$

  while $j \leq m$ and $t_{i+j-1} = p_j$ **do** j++ // compare characters

  if $j > m$ **then**

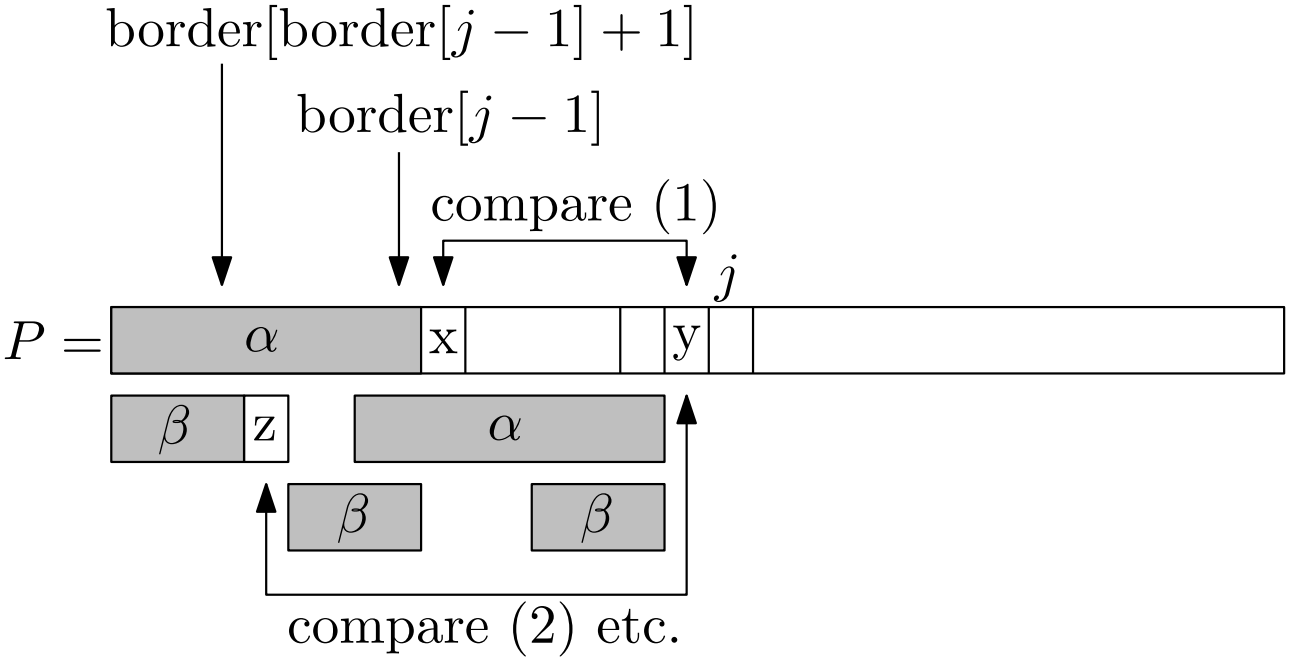
    print "P occurs at position i in T"

  $i := i + j - \text{border}[j] - 1$ // advance in T

  $j := \max\{1, border[j] + 1\}$ // skip first border$[j]$ characters of P

Berechnung des Border-Arrays

- seien die Werte bis zur Position $j-1$ bereits berechnet



Berechnung des Border-Arrays

- in $O(m)$ Zeit:

```
border[1] := −1
i := border[1]                                   // position in P
for j = 2,...,m+1
    while i ≥ 0 and p_{i+1} ≠ p_{j−1} do i = border[i+1]
    i++
    border[j] := i
```

Volltextsuche von Langsam bis Superschnell

Gegeben: Text S (n:= $|S|$), Muster (Pattern) P (m:= $|P|$), $n \gg m$

Gesucht: Alle/erstes/nächstes Vorkommen von P in S

naiv: $O(nm)$

P vorverarbeiten: $O(n+m)$

Mit Fehlern: ???

S vorverarbeiten: Textindizes. Erstes Vorkommen:

Invertierter Index: gute heuristik

Suffix Array: $O(m \log n) \ldots O(m)$

Invertierter Index

```
1  The old night keeper keeps the keep in the town
2  In the big old house in the big old gown
3  The house in the town had the big old keep
4  Where the old night keeper never did sleep
5  The night keeper keeps the keep in the night
6  And keeps in the dark and sleeps in the light
```

term t	f_t	Invertierte Liste für t
and	1	(6,2)
big	2	(2,2), (3,1)
dark	1	(6,1)
did	1	(4,1)
gown	1	(2,1)
had	1	(3,1)
house	2	(2,1), (3,1)
in	5	(1,1), (2,2), (3,1), (5,1), (6,2)
keep	3	(1,1), (3,1), (5,1)
...	...	...

Etwas “Stringology”-Notation

Alphabet Σ: Menge $\{a, b, c, \ldots\}$.

String S: Array $S[0..n) := S[0..n-1] := [S[0], \ldots, S[n-1]]$

von Buchstaben aus Σ.

Suffix: $S_i := S[i..n)$

Endmarkierungen: $S[n] := S[n+1] := \cdots := 0$

0 ist kleiner als alle anderen Zeichen

$S =$ `banana`:

0	`banana`
1	`anana`
2	`nana`
3	`ana`
4	`na`
5	`a`

Suffixe Sortieren

Sortiere die Menge $\{S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}\}$
von Suffixen des Strings S der Länge n
(Alphabet $[1,n] = \{1,\ldots,n\}$)
in lexikographische Reihenfolge.

- suffix $S_i = S[i,n]$ für $i \in [0..n-1]$

$S =$ banana:

0	banana
1	anana
2	nana
3	ana
4	na
5	a

$\Longrightarrow$

5	a
3	ana
1	anana
0	banana
4	na
2	nana

Anwendungen

- Volltextsuche
- Burrows-Wheeler Transformation (`bzip2` Kompressor)
- Ersatz für kompliziertere Suffixbäume
- Bioinformatik: Wiederholungen suchen (in $O(n)$ möglich?) ,. . .

Volltextsuche

Suche Muster (pattern) $P[0..m)$ im Text $S[0..n)$

mittels Suffix-Tabelle SA of S.

Binäre Suche: $O(m \log n)$ gut für kurze Muster

Binäre Suche mit lcp: $O(m + \log n)$ falls wir die

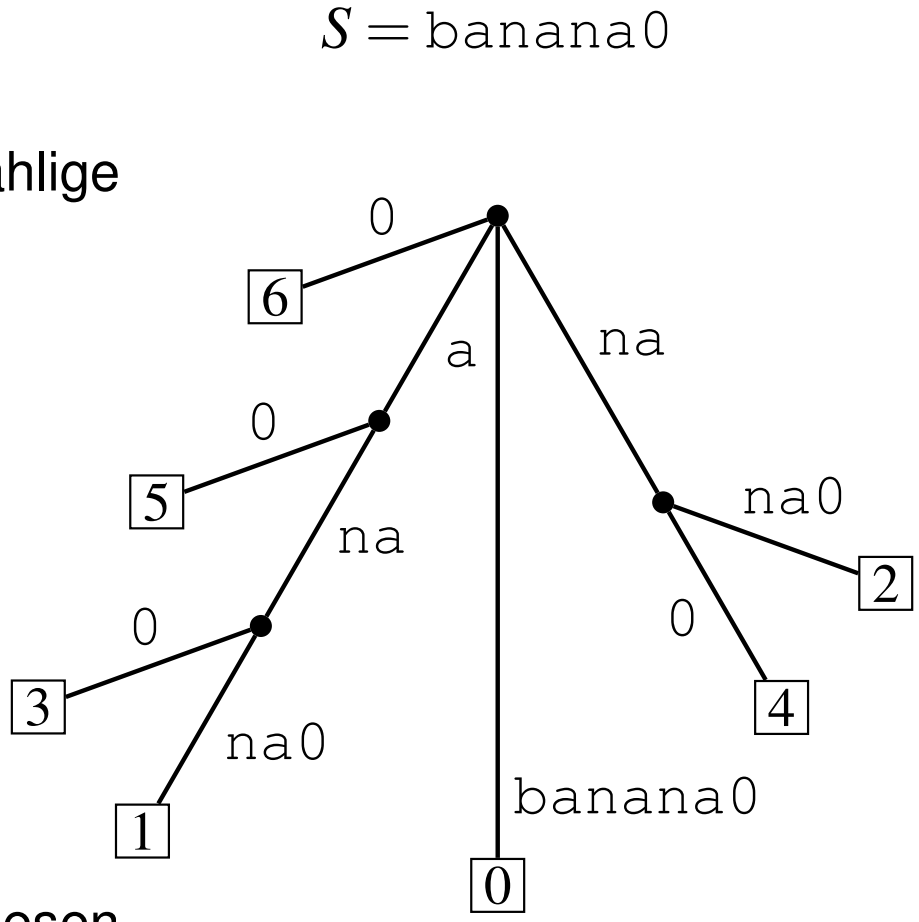
längsten gemeinsamen (common) Präfixe

zwischen verglichenen Zeichenketten vorberechnen

Suffix-Baum: $O(n)$ kann aus SA berechnet werden

Suffix-Baum [Weiner '73][McCreight '76][Ukkonen '95]

- ☐ kompaktierter Trie der Suffixe
- \+ Zeit $O(n)$ [Farach 97] für ganzzahlige Alphabete
- \+ Mächtigstes Werkzeug der Stringology?
- − Hoher Platzverbrauch
- − Effiziente direkte Konstruktion ist kompliziert
- ☐ kann aus SA in Zeit $O(n)$ abgelesen werden



Suche in Suffix-Bäumen

- Suche (alle/ein) Vorkommen von $P_{1..m}$ in T:
- Wenn ausgehende Kanten Arrays der Größe $|\Sigma|$:
  - $O(m)$ Suchzeit
  - $O(n|\Sigma|)$ Gesamtplatz
- Wenn ausgehende Kanten Arrays der Größe prop. zur #Kinder:
  - $O(m \log |\Sigma|)$ Suchzeit
  - $O(n)$ Platz

Alphabet-Modell

Geordnetes Alphabet: Zeichen können nur verglichen werden

Konstante Alphabetgröße: endliche Menge

deren Größe nicht von n abhängt.

Ganzzahliges Alphabet: Alphabet ist $\{1, \ldots, \sigma\}$

für eine ganze Zahl $\sigma \geq 2$

Geordnetes $\rightarrow$ ganzzahliges Alphabet

Sortiere die Zeichen von S

Ersetze $S[i]$ durch seinen Rang

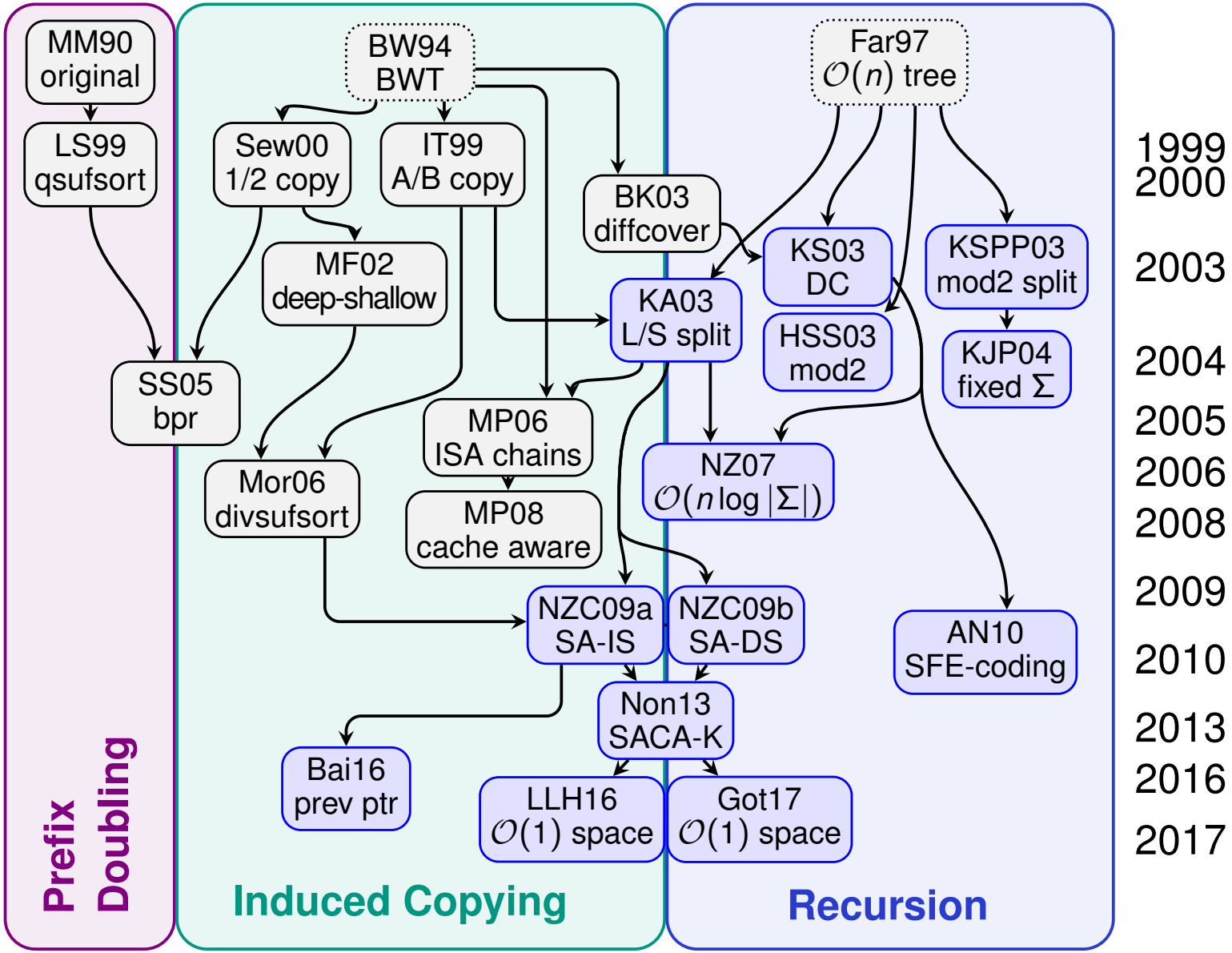
```
012345     135024
banana ->  aaabnn
213131 <-  111233
```

Verallgemeinerung: Lexikographische Namen

Sortiere die k-Tupel $S[i..i+k)$ für $i \in 1..n$

Ersetze $S[i]$ durch den Rang von $S[i..i+k)$ unter den Tupeln

Suffix Array Konstruktionsalgorithmen



SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_0[i]$	T_i	$ISA_0[i]$	L
0	0	t o b e o r n o t t o b e $	0	-
1	1	o b e o r n o t t o b e $	1	-
2	2	b e o r n o t t o b e $	2	-
3	3	e o r n o t t o b e $	3	-
4	4	o r n o t t o b e $	4	-
5	5	r n o t t o b e $	5	-
6	6	n o t t o b e $	6	-
7	7	o t t o b e $	7	-
8	8	t t o b e $	8	-
9	9	t o b e $	9	-
10	10	o b e $	10	-
11	11	b e $	11	-
12	12	e $	12	-
13	13	$	13	-

SA mit Präfix Verdopplung

[Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_1[i]$		T_i		$ISA_1[i]$	L
0	13	0	$		11	-1
1	2	1	b	e o r n o t t o b e $	6	2
2	11		b	e $	1	-
3	3	3	e	o r n o t t o b e $	3	2
4	12		e	$	6	-
5	6	5	n	o t t o b e $	10	-1
6	1	6	o	b e o r n o t t o b e $	5	4
7	4		o	r n o t t o b e $	6	-
8	7		o	t t o b e $	11	-
9	10		o	b e $	11	-
10	5	10	r	n o t t o b e $	6	-1
11	0	11	t	o b e o r n o t t o b e $	1	3
12	8		t	t o b e $	3	-
13	9		t	o b e $	0	-

SA mit Präfix Verdopplung

[Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_1[i]$	T_i	$ISA_1[i]$	L
0	13	$	11	-1
1	2	be3␣rnottobe$	6	2
2	11	be3$	1	-
3	3	eo6rnottobe$	3	2
4	12	e$0	6	-
5	6	nottobe$	10	-1
6	1	ob1e␣rnottobe$	5	4
7	4	or10␣ottobe$	6	-
8	7	ot11␣obe$	11	-
9	10	ob1e$	11	-
10	5	rnottobe$	6	-1
11	0	to6␣eornottobe$	1	3
12	8	t11␣be$	3	-
13	9	to6␣e$	0	-

$ISA[SA[i] + 1]$

SA mit Präfix Verdopplung

[Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_2[i]$	T_i	$ISA_1[i]$	L
0	13	$	11	-1
1	2	be3	6	2
2	11	be3$	1	-
3	12	e$0	3	-3
4	3	e o6	6	-
5	6	n	10	-
6	1	ob1	5	2
7	10	ob1e $	6	-
8	4	or10	11	-3
9	7	ot11	11	-
10	5	r	6	-
11	0	to6	1	2
12	9	to6e $	3	-
13	8	t	0	-1

ISA[SA[i] + 1]

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_2[i]$	T_i (ISA[SA[i] + 1])	$ISA_2[i]$	L
0	13	0 \$	11	-1
1	2	1 b e 3 ɔ r n o t t o b e \$	6	2
2	11	b e 3 \$	1	-
3	12	3 e \$ 0	4	-3
4	3	4 e o 6 r n o t t o b e \$	8	-
5	6	5 n o t t o b e \$	10	-
6	1	6 o b 1 e o r n o t t o b e \$	5	2
7	10	o b 1 e \$	9	-
8	4	8 o r 10 ı o t t o b e \$	13	-3
9	7	9 o t 11 ; o b e \$	11	-
10	5	10 r n o t t o b e \$	6	-
11	0	11 t o 6 ɔ e o r n o t t o b e \$	1	2
12	9	t o 6 ɔ e \$	3	-
13	8	13 t t 11 › b e \$	0	-1

SA mit Präfix Verdopplung

[Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_2[i]$	T_i (ISA[SA[i] + 2])	$ISA_2[i]$	L
0	13	0: $	11	-1
1	2	1: b e o8r n o t t o b e $	6	2
2	11	1: b e $0	1	-
3	12	3: e $	4	-3
4	3	4: e o r n o t t o b e $	8	-
5	6	5: n o t t o b e $	10	-
6	1	6: o b e4o r n o t t o b e $	5	2
7	10	6: o b e3$	9	-
8	4	8: o r n o t t o b e $	13	-3
9	7	9: o t t o b e $	11	-
10	5	10: r n o t t o b e $	6	-
11	0	11: t o b1e o r n o t t o b e $	1	2
12	9	11: t o b1e $	3	-
13	8	13: t t o b e $	0	-1

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_4[i]$	T_i	ISA[SA[i] + 2]	$ISA_2[i]$	L
0	13	$		11	-11
1	11	b e $0		6	-
2	2	b e o8r	n o t t o b e $	1	-
3	12	e $		4	-
4	3	e o	r n o t t o b e $	8	-
5	6	n	o t t o b e $	10	-
6	10	o b e3$		5	-
7	1	o b e4o	r n o t t o b e $	9	-
8	4	o r	n o t t o b e $	13	-
9	7	o t	t o b e $	11	-
10	5	r	n o t t o b e $	6	-
11	0	t o b1e	o r n o t t o b e $	1	2
12	9	t o b1e	$	3	-
13	8	t t	o b e $	0	-1

SA mit Präfix Verdopplung

[Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_4[i]$	T_i	$ISA_4[i]$	L
0	13	0 $	11	-11
1	11	1 b e $0	7	-
2	2	2 b e o8r n o t t o b e $	2	-
3	12	3 e $	4	-
4	3	4 e o r n o t t o b e $	8	-
5	6	5 n o t t o b e $	10	-
6	10	6 o b e3$	5	-
7	1	7 o b e4o r n o t t o b e $	9	-
8	4	8 o r n o t t o b e $	13	-
9	7	9 o t t o b e $	11	-
10	5	10 r n o t t o b e $	6	-
11	0	11 t o b1e o r n o t t o b e $	1	2
12	9	11 t o b1e $	3	-
13	8	13 t t o b e $	0	-1

ISA[SA[i] + 2]

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_4[i]$	T_i	$ISA_4[i]$	L
0	13	0 $	11	-11
1	11	1 b e $	7	-
2	2	2 b e o r n o t t o b e $	2	-
3	12	3 e $	4	-
4	3	4 e o r n o t t o b e $	8	-
5	6	5 n o t t o b e $	10	-
6	10	6 o b e $	5	-
7	1	7 o b e o r n o t t o b e $	9	-
8	4	8 o r n o t t o b e $	13	-
9	7	9 o t t o b e $	11	-
10	5	10 r n o t t o b e $	6	-
11	0	11 t o b e o r8n o t t o b e $	1	2
12	9	t o b e $ 0	3	-
13	8	13 t t o b e $	0	-1

ISA[SA[i] + 4]

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_8[i]$	T_i	ISA[SA[i] + 4]	$ISA_4[i]$	L
0	13	0 $		11	-14
1	11	1 b e $		7	-
2	2	2 b e o r n o t t o b e $		2	-
3	12	3 e $		4	-
4	3	4 e o r n o t t o b e $		8	-
5	6	5 n o t t o b e $		10	-
6	10	6 o b e $		5	-
7	1	7 o b e o r n o t t o b e $		9	-
8	4	8 o r n o t t o b e $		13	-
9	7	9 o t t o b e $		11	-
10	5	10 r n o t t o b e $		6	-
11	9	11 t o b e $ 0		3	-
12	0	11 t o b e o r 8 n o t t o b e $		1	-
13	8	13 t t o b e $		0	-

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

i	$SA_8[i]$	T_i	ISA[SA[i] + 4]	$ISA_8[i]$	L
0	13	0 $		12	-14
1	11	1 b e $		7	-
2	2	2 b e o r n o t t o b e $		2	-
3	12	3 e $		4	-
4	3	4 e o r n o t t o b e $		8	-
5	6	5 n o t t o b e $		10	-
6	10	6 o b e $		5	-
7	1	7 o b e o r n o t t o b e $		9	-
8	4	8 o r n o t t o b e $		13	-
9	7	9 o t t o b e $		11	-
10	5	10 r n o t t o b e $		6	-
11	9	11 t o b e $ 0		3	-
12	0	12 t o b e o r 8 n o t t o b e $		1	-
13	8	13 t t o b e $		0	-

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

Idee (aus [MM93]): Sortiere Suffixe bis zu $2h$ Zeichen tief mittels Informationen über die Ordnung der Suffixe bis zur Tiefe h.

Def.: Die h-Ordnung ist die lexikographische Ordnung bis zur Tiefe h.

Original [MM93]: Sortiere alle Suffix s_i mit dem Rang von s_i in einer h-Ordnung als ersten Sortier-Schlüssel und dem Rang von $s_i + h$ als zweiten Sortier-Schlüssel. Dies ergibt eine $2h$-Ordnung.

Definitionen [LS99]: Wenn SA_h in einer h-Ordnung sind, dann

1. nennt man eine maximale Sequenz aufeinanderfolgender Suffixe in SA_h mit den gleichen h initialen Zeichen eine h-Gruppe.
2. Eine h-Gruppe der Länge eins nennt man sortiert oder Singleton, anderenfalls heißt eine Gruppe unsortiert. Eine maximale Sequenz von sortierten Gruppen heißt eine konsolidierte sortierte Gruppe.

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

Algorithmus [LS'99]: Präfix Verdopplung

Gegeben ist ein Text T der Länge $n := |T|$.

1. Enumeriere alle Suffixe in einem Array SA_0 durch $\mathrm{SA}_0[i] = i$.
2. Sortiere SA_0 nach $T[i]$ für Index i und erhalte SA_1. Setze $h = 1$.
3. Für $i = 0, \ldots, n$ setze $\mathrm{ISA}_1[i]$ auf den aktuellen Rang der 1-Gruppe von Suffix i. Dies ist der kleinste Index in $\mathrm{SA}_1[i]$ der ein Suffix mit dem gleichen ersten Buchstaben wie das Suffix i.
4. Für jede unsortierte Gruppe in $\mathrm{SA}_1[a..b]$ setzte $L[a]$ auf dessen Länge. Für jede konsolidierte sortierte Gruppe in $\mathrm{SA}_1[a..b]$, setze $L[a]$ auf seine negierte Länge.

SA mit Präfix Verdopplung [Larsson, Sadakane'99]

5. Sortiere jede unsortierte Gruppe in SA_h (mit multikey quicksort), mittels $\mathrm{ISA}_h[\mathrm{SA}_h[i]+h]$ als den Sortier-Schlüssel für Index i. Verwende L um die unsortierten Gruppen zu finden. Erhalte SA_{2h}.

6. Betrachte Folgen gleicher Schlüssel in den eben sortierten Gruppen: markiere Singletons mit -1 in L und unsortierte $2h$-Gruppen mit positiven Längen. Konsolidiere die negativen Sprungwerte aufeinanderfolgende sortierte Gruppen.

7. Aktualisiere ISA_{2h} für alle bearbeiteten Gruppen, setze $h := 2h$.

8. Wenn SA_h noch unsortierte Gruppen enthält ($L[0] \neq -n$), goto 5.

Laufzeit: $\mathcal{O}(n \log n)$. Platz: $8n$ $(+\ 1n)$. Worst-case Eingabe: $[\mathtt{a}^n]$.

Suffixtabellen

aus

Linear Work Suffix Array Construction

Juha Kärkkäinen, Peter Sanders, Stefan Burkhardt

Journal of the ACM

Seiten 1–19, Nummer 6, Band 53.

Ein erster Teile-und-Herrsche-Ansatz

1. $SA^1 =$sort $\{S_i : i$ ist ungerade$\}$ (Rekursion)
2. $SA^0 =$sort $\{S_i : i$ ist gerade$\}$ (einfach mittels SA^1)
3. Mische SA^0 und SA^1 (schwierig)

Problem: wie vergleicht man gerade und ungerade Suffixe?

[Farach 97] hat einen Linearzeitalgorithmus für Suffix-Baum-Konstruktion entwickelt, der auf dieser Idee beruht.

Sehr kompliziert.

Das war auch der einzige bekannte Algorithmus für Suffix-Tabellen (läßt sich leicht aus S-Baum ablesen.)

SA^1 berechnen

- Erstes Zeichen weglassen.

  banana $\rightarrow$ anana

- Ersetze Buchstabenpaare durch Ihre lexikographischen Namen

  $\boxed{\texttt{an}}\boxed{\texttt{an}}\boxed{\texttt{a}\$}\rightarrow 221$

- Rekursion

  $\langle 1, 21, 221\rangle$

- Rückübersetzen

  $\langle \texttt{a}, \texttt{ana}, \texttt{anana}\rangle$

Berechne SA^0 aus SA^1

1	anana			5	a
3	ana	$\Longrightarrow$		3	ana
5	a			1	anana

Ersetze S_i, $i \bmod 2 = 0$ durch $(S[i], r(S_{i+1}))$

mit $r(S_{i+1})$:= Rang von S_{i+1} in SA^1

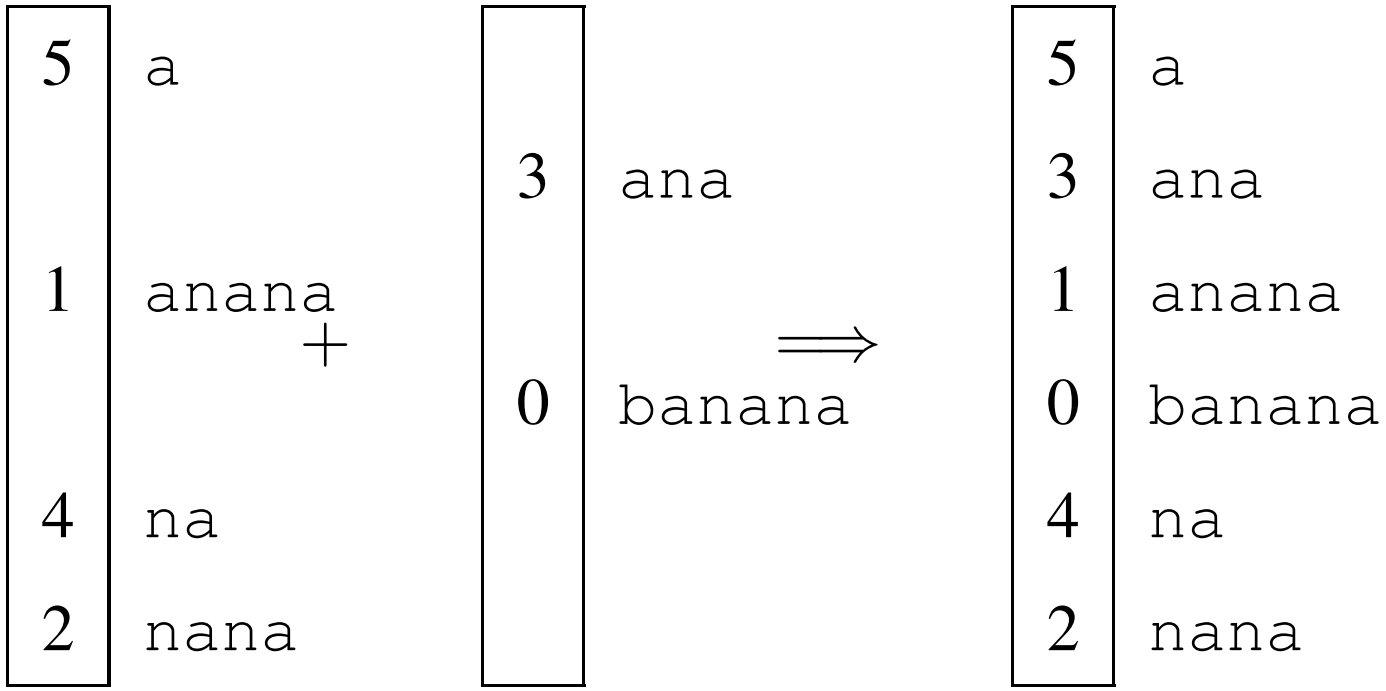
0	b 3(anana)			0	banana
2	n 2(ana)	$\Longrightarrow$		4	na
4	n 1(a)			2	nana

Radix-Sort

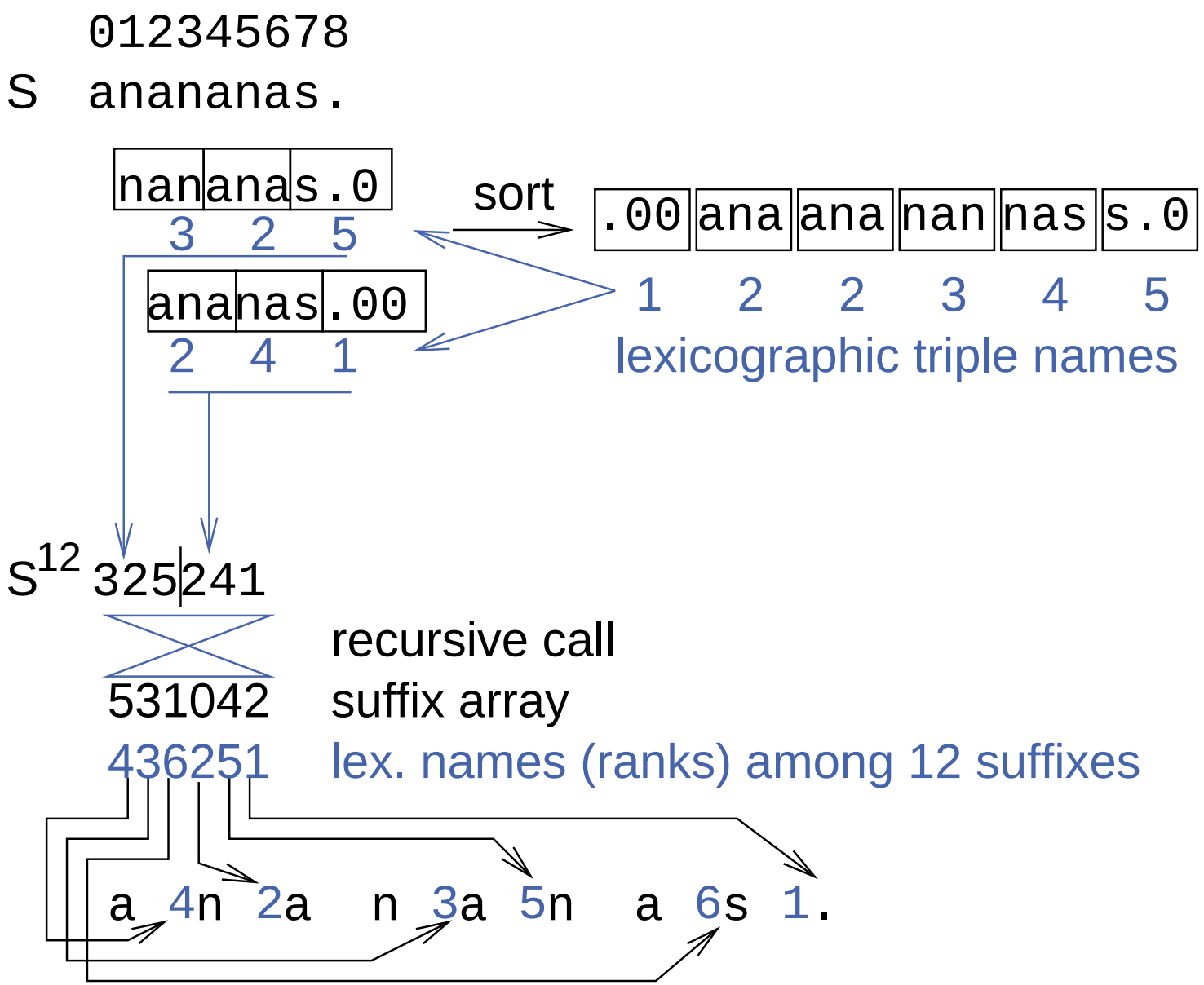
Asymmetrisches Divide-and-Conquer

1. $SA^{12} =$sort $\{S_i : i \bmod 3 \neq 0\}$ (Rekursion)
2. $SA^{0} =$sort $\{S_i : i \bmod 3 = 0\}$ (einfach mittels SA^{12})
3. Mische SA^{12} und SA^{0} (einfach!)

$$S = \texttt{banana}$$



Rekursion, Beispiel



Rekursion

- sortiere Tripel $S[i..i+2]$ für $i \bmod 3 \neq 0$
  (LSD Radix-Sortieren)
- Finde lexikographische Namen $S'[1..2n/3]$ der Tripel,
  (d.h., $S'[i] < S'[j]$ gdw $S[i..i+2] < S[j..j+2]$)
- $S^{12} = [S'[i] : i \bmod 3 = 1] \circ [S'[i] : i \bmod 3 = 2]$,
  Suffix S^{12}_i von S^{12} repräsentiert S_{3i+1}
  Suffix $S^{12}_{n/3+i}$ von S^{12} repräsentiert S_{3i+2}

- Rekursion auf (S^{12}) (Alphabetgröße $\leq 2n/3$)
- Annotiere die 12-Suffixe mit ihrer Position in rek. Lösung

Least Significant Digit First Radix Sort

Hier: Sortiere n 3-Tupel von ganzen Zahlen $\in [0..n]$ in lexikographische Reihenfolge

Sortiere nach 3. Position

Elemente sind nach Pos. 3 sortiert

Sortiere stabil nach 2. Position

Elemente sind nach Pos. 2,3 sortiert

Sortiere stabil nach 1. Position

Elemente sind nach Pos. 1,2,3 sortiert

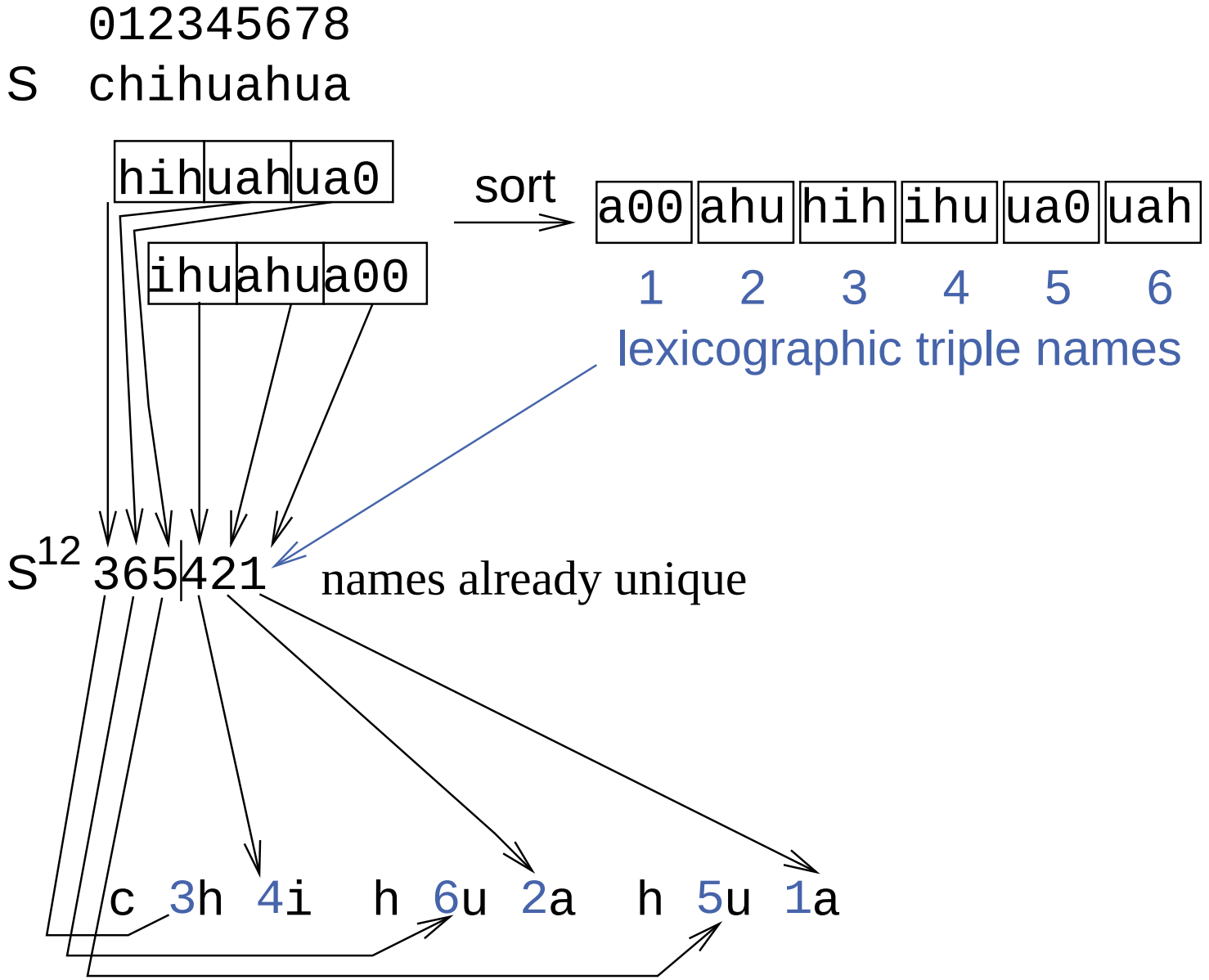
Stabiles Ganzzahliges Sortieren

Sortiere $a[0..n)$ nach $b[0..n)$ mit $\text{key}(a[i]) \in [0..n]$

$c[0..n] := [0,\ldots,0]$	Zähler
for $i \in [0..n)$ do $c[a[i]]{+}{+}$	zähle
$s := 0$	
for $i \in [0..n)$ do $(s, c[i]) := (s + c[i], s)$	Präfixsummen
for $i \in [0..n)$ do $b[c[a[i]]{+}{+}] := a[i]$	bucket sort

Zeit $O(n)$!

Rekursions-Beispiel: Einfacher Fall



Sortieren der mod 0 Suffixe

0	c 3(h 4i h 6u 2a h 5u 1a)
1	
2	
3	h 6(u 2a h 5u 1a)
4	
5	
6	h 5(u 1a)
7	
8	

Benutze Radix-Sort (LSD-Reihenfolge bereits bekannt)

Mische SA^{12} und SA^{0}

$0 < 1 \Leftrightarrow c\,n < c\,n$

$0 < 2 \Leftrightarrow cc\,n < cc\,n$

```
3: h 6u 2(ahua)
6: h 5u 1(a)
0: c 3h 4(ihuahua)
```

```
4: (6)u 2(ahua)
7: (5)u 1(a)
2: (4)i  h 6(uahua)
1: (3)h 4(ihuahua)
5: (2)a  h 5(ua)
8: (1)a 0 0 0(0)
```

$\Downarrow$

```
8: a
5: ahua
0: chihuahua
1: hihuahua
6: hua
3: huahua
2: ihuahua
7: ua
4: uahua
```

Analyse

1. Rekursion: $T(2n/3)$ plus

   Tripel extrahieren: $\mathrm{O}(n)$ (forall $i, i \bmod 3 \neq 0$ do ...)

   Tripel sortieren: $\mathrm{O}(n)$

   (e.g., LSD-first radix sort — 3 Durchgänge)

   Lexikographisches benenennen: $\mathrm{O}(n)$ (scan)

   Rekursive Instanz konstruieren: $\mathrm{O}(n)$ (forall names do ...)

2. $SA^0 =$sortiere $\{S_i : i \bmod 3 = 0\}$: $\mathrm{O}(n)$

   (1 Radix-Sort Durchgang)

3. mische SA^{12} and SA^0: $\mathrm{O}(n)$

   (gewöhnliches Mischen mit merkwürdiger Vergleichsfunktion)

Insgesamt: $T(n) \leq cn + T(2n/3)$

$\Rightarrow T(n) \leq 3cn = \mathrm{O}(n)$

Implementierung: Vergleichs-Operatoren

```
inline bool leq(int a1, int a2,   int b1, int b2) {
  return(a1 < b1 || a1 == b1 && a2 <= b2);
}
inline bool leq(int a1, int a2, int a3,   int b1, int b2, int b3) {
  return(a1 < b1 || a1 == b1 && leq(a2,a3, b2,b3));
}
```

Implementierung: Radix-Sortieren

```
// stably sort a[0..n-1] to b[0..n-1] with keys in 0..K from r
static void radixPass(int* a, int* b, int* r, int n, int K)
{ // count occurrences
  int* c = new int[K + 1];                          // counter array
  for (int i = 0;  i <= K;  i++) c[i] = 0;          // reset counters
  for (int i = 0;  i < n;  i++) c[r[a[i]]]++;     // count occurences
  for (int i = 0, sum = 0;  i <= K;  i++) { // exclusive prefix sums
     int t = c[i];  c[i] = sum;  sum += t;
  }
  for (int i = 0;  i < n;  i++) b[c[r[a[i]]]++] = a[i];      // sort
  delete [] c;
}
```

Implementierung: Tripel Sortieren

```
void suffixArray(int* s, int* SA, int n, int K) {
  int n0=(n+2)/3, n1=(n+1)/3, n2=n/3, n02=n0+n2;
  int* s12  = new int[n02 + 3];  s12[n02]= s12[n02+1]= s12[n02+2]=0;
  int* SA12 = new int[n02 + 3]; SA12[n02]=SA12[n02+1]=SA12[n02+2]=0;
  int* s0   = new int[n0];
  int* SA0  = new int[n0];

  // generate positions of mod 1 and mod  2 suffixes
  // the "+(n0-n1)" adds a dummy mod 1 suffix if n%3 == 1
  for (int i=0, j=0;  i < n+(n0-n1);  i++) if (i%3 != 0) s12[j++] = i;

  // lsb radix sort the mod 1 and mod 2 triples
  radixPass(s12 , SA12, s+2, n02, K);
  radixPass(SA12, s12 , s+1, n02, K);
  radixPass(s12 , SA12, s  , n02, K);
```

Implementierung: Lexikographisches Benennen

```
// find lexicographic names of triples
int name = 0, c0 = -1, c1 = -1, c2 = -1;
for (int i = 0;  i < n02;  i++) {
  if (s[SA12[i]] != c0 || s[SA12[i]+1] != c1 || s[SA12[i]+2] != c2) {
    name++;  c0 = s[SA12[i]];  c1 = s[SA12[i]+1];  c2 = s[SA12[i]+2];
  }
  if (SA12[i] % 3 == 1) { s12[SA12[i]/3]      = name; } // left half
  else                  { s12[SA12[i]/3 + n0] = name; } // right half
```

Implementierung: Rekursion

```
// recurse if names are not yet unique
if (name < n02) {
  suffixArray(s12, SA12, n02, name);
  // store unique names in s12 using the suffix array
  for (int i = 0;  i < n02;  i++) s12[SA12[i]] = i + 1;
} else // generate the suffix array of s12 directly
  for (int i = 0;  i < n02;  i++) SA12[s12[i] - 1] = i;
```

Implementierung: Sortieren der mod 0 Suffixe

```
for (int i=0, j=0;  i < n02;  i++)
  if (SA12[i] < n0) s0[j++] = 3*SA12[i];
radixPass(s0, SA0, s, n0, K);
```

Implementierung: Mischen

```
  for (int p=0,  t=n0-n1,  k=0;  k < n;  k++) {
#define GetI() (SA12[t] < n0 ? SA12[t] * 3 + 1 : (SA12[t] - n0) * 3 + 2)
    int i = GetI(); // pos of current offset 12 suffix
    int j = SA0[p]; // pos of current offset 0  suffix
    if (SA12[t] < n0 ?
        leq(s[i],       s12[SA12[t] + n0], s[j],       s12[j/3]) :
        leq(s[i],s[i+1],s12[SA12[t]-n0+1], s[j],s[j+1],s12[j/3+n0]))
    { // suffix from SA12 is smaller
      SA[k] = i;  t++;
      if (t == n02) { // done --- only SA0 suffixes left
        for (k++;  p < n0;  p++, k++) SA[k] = SA0[p];
      }
    } else {
      SA[k] = j;  p++;
      if (p == n0)  { // done --- only SA12 suffixes left
        for (k++;  t < n02;  t++, k++) SA[k] = GetI();
      }
    }
  }
  delete [] s12; delete [] SA12; delete [] SA0; delete [] s0; }
```

Verallgemeinerung: Differenzenüberdeckungen

Ein Differenzenüberdeckung D modulo v ist eine Teilmenge von $[0,v)$, so dass $\forall i \in [0,v) : \exists j,k \in D : i \equiv k - j \pmod{v}$.

Beispiel:

$\{1,2\}$ ist eine Differenzenüberdeckung modulo 3.

$\{1,2,4\}$ ist eine Differenzenüberdeckung modulo 7.

- ☐ Führt zu platzeffizienterer Variante
- ☐ Schneller für kleine Alphabete

Verbesserungen / Verallgemeinerungen

- tuning
- größere Differenzenüberdeckungen
- Kombiniere mit den besten Alg. für einfache Eingaben

  [Manzini Ferragina 02, Schürmann Stoye 05, Yuta Mori 08]

Suffixtabellenkonstruktion: Zusammenfassung

- einfache, direkte, Linearzeit für Suffixtabellenkonstruktion
- einfach anpassbar auf fortgeschrittene Berechnungsmodelle
- Verallgemeinerung auf Diff-Überdeckungen ergibt platzeffiziente Implementierung

Suche in Suffix Arrays

Given: T, SA, P.

$l := 1; r := n+1$

while $l < r$ **do** // search left index

$q := \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

if $P >_{\text{lex}} T_{\text{SA}[q]\ldots\min\{\text{SA}[q]+m-1,n\}}$

then $l := q+1$ **else** $r := q$

$s := l; l--; r := n$

while $l < r$ **do** // search right index

$q := \lceil \frac{l+r}{2} \rceil$

if $P =_{\text{lex}} T_{\text{SA}[q]\ldots\min\{\text{SA}[q]+m-1,n\}}$

then $l := q$ **else** $r := q-1$

return $[s,l]$

- Zeit $O(m \log n)$ (geht auch: $O(m+\log n)$)

LCP-Array

speichert Längen der längsten gemeinsamen Präfixe lexikographisch benachbarter Suffixe!

$S =$ banana:

0	banana
1	anana
2	nana
3	ana
4	na
5	a

SA =

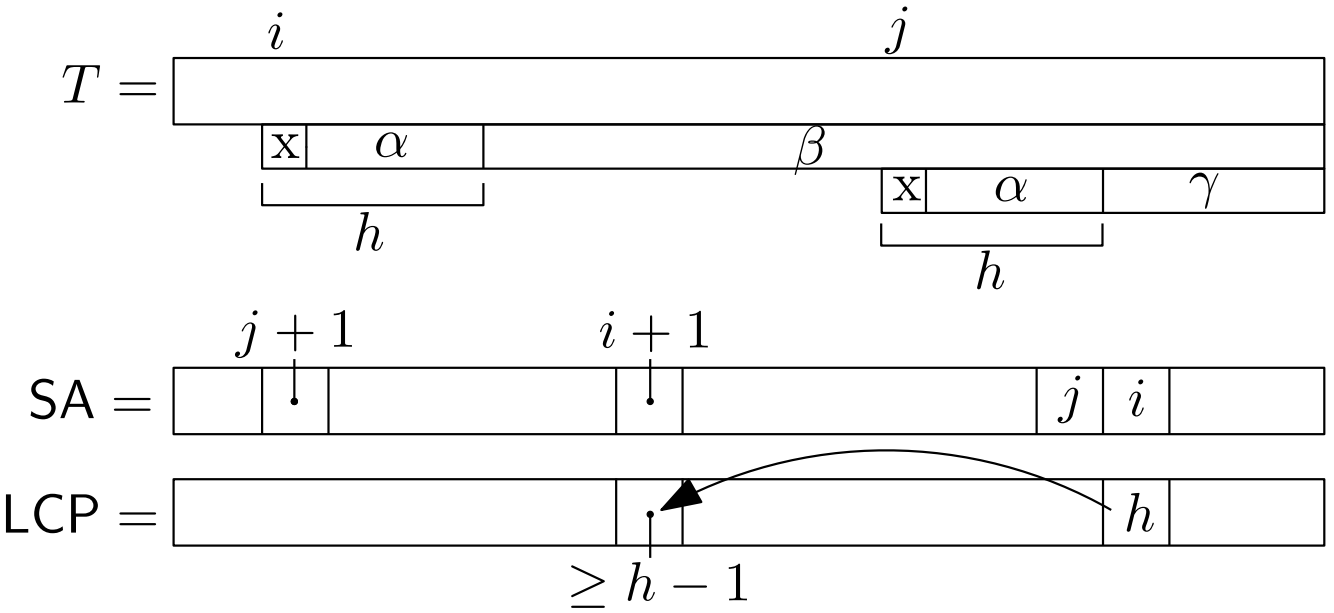
5	a
3	ana
1	anana
0	banana
4	na
2	nana

LCP =

$\perp$	a
1	**a**na
3	**ana**na
0	banana
0	na
2	**na**na

LCP-Array: Berechnung

- naiv $O(n^2)$
- inverses Suffix-Array: $\mathrm{SA}^{-1}[\mathrm{SA}[i]] = i$ (wo steht i in SA?)
- For all $1 \leq i < n$: $\mathrm{LCP}[\mathrm{SA}^{-1}[i+1]] \geq \mathrm{LCP}[\mathrm{SA}^{-1}[i]] - 1$.



LCP-Array: Berechnung

[KLAAP '01]

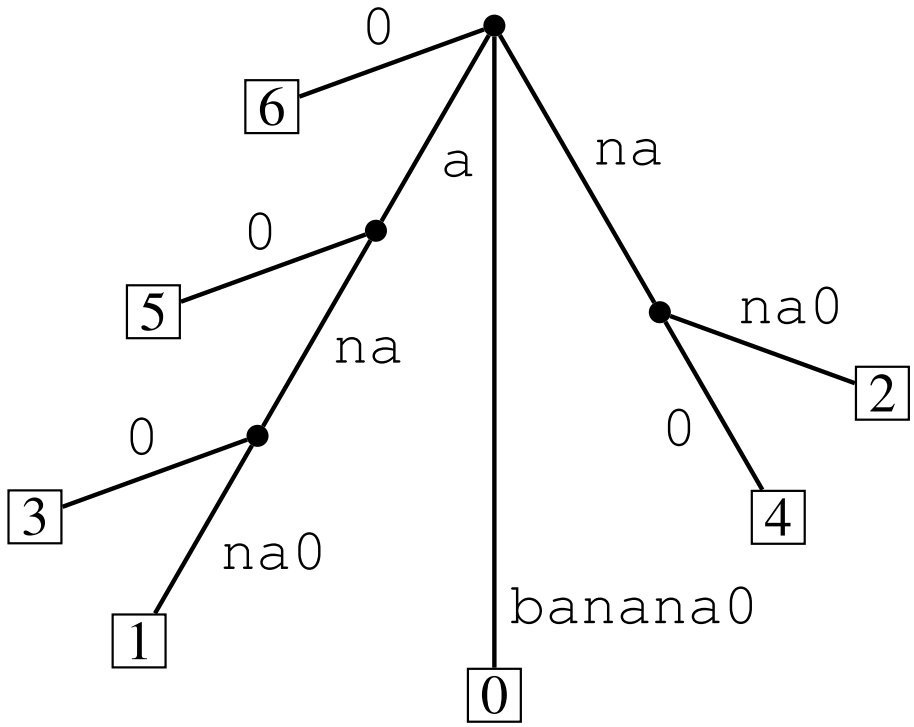
- For all $1 \leq i < n$: $\mathrm{LCP}[\mathrm{SA}^{-1}[i+1]] \geq \mathrm{LCP}[\mathrm{SA}^{-1}[i]] - 1$.

$h := 0, \mathrm{LCP}[1] := 0$
for $i = 1, \ldots, n$ **do**
  if $\mathrm{SA}^{-1}[i] \neq 1$ **then**
    while $t_{i+h} = t_{\mathrm{SA}[\mathrm{SA}^{-1}[i]-1]+h}$ **do** $h{+}{+}$
    $\mathrm{LCP}[\mathrm{SA}^{-1}[i]] := h$
    $h := \max(0, h-1)$

- Zeit: $O(n)$

Suffix-Baum aus SA und LCP

$S =$ banana0



- naiv: $O(n^2)$
- mit Suffix-Array: in lexikographischer Reihenfolge

Suffix-Baum aus SA und LCP

- LCP-Werte helfen!
- Betrachte nur rechtesten Pfad!
- Finde tiefsten Knoten mit String-Tiefe $\leq \mathrm{LCP}[i] \rightsquigarrow$ Einfügepunkt!

	0	1	2	3	4	5	6
$\mathrm{SA} =$	6	5	3	1	0	4	2
$\mathrm{LCP} =$	0	0	1	3	0	0	2

- Zeit $O(n)$

Datenkompression

Problem: bei naiver Speicherung verbrauchen Daten sehr viel Speicherplatz / Kommunikationsbandbreite. Das läßt sich oft reduzieren.

Varianten:

- Verlustbehaftet (mp3, jpg, ...) / **Verlustfrei** (Text, Dateien, Suchmaschinen, Datenbanken, medizin. Bildverarbeitung, Profifotografie, ...)
- **1D** (text, Zahlenfolgen,...) / 2D (Bilder) / 3D (Filme)
- **nur Speicherung** / mit Operationen ($\rightsquigarrow$ succinct data structures)

Verlustfreie Textkompression

Gegeben: Alphabet Σ

String $S = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle \in \Sigma^*$

Textkompressionsalgorithms $f : S \to f(S)$ mit $|f(S)|$ (z.B. gemessen in bits) möglichst klein.

Theorie Verlustfreier Textkompression

Informationstheorie. Zum Beispiel

Entropie: $H(S) = \sum_{c \in \Sigma} p(c) \log(1/p(c))$ wobei

$p(c) = |\{s_i : s_i = c\}|/n$ die relative Häufigkeit von c ist.

untere Schranke für # bits pro Zeichen falls Text einer Zufallsquelle entspränge.

$\rightsquigarrow$ Huffman-Coding ist annähernd optimal! (Entropiecodierung) ????

Schon eher:

Entropie höherer Ordnung betrachte Teilstrings fester Länge

“Ultimativ”: Kolmogorov Komplexität. Leider nicht berechenbar.

Theorie Verlustfreier Textkompression

Entropie höherer Ordnung: Gegeben ein Text S der Länge n über dem Alphabet Σ. Wir definieren $N(\omega, S)$ als Konkatenation aller Zeichen, die in S auf Vorkommen von $\omega \in \Sigma^k$ folgen. Wir definieren die empirische Entropie der Ordung k wie folgt:

$$H_k(S) = \sum_{\omega \in \Sigma^k} \frac{|N(\omega, S)|}{n} H(N(\omega, S))$$

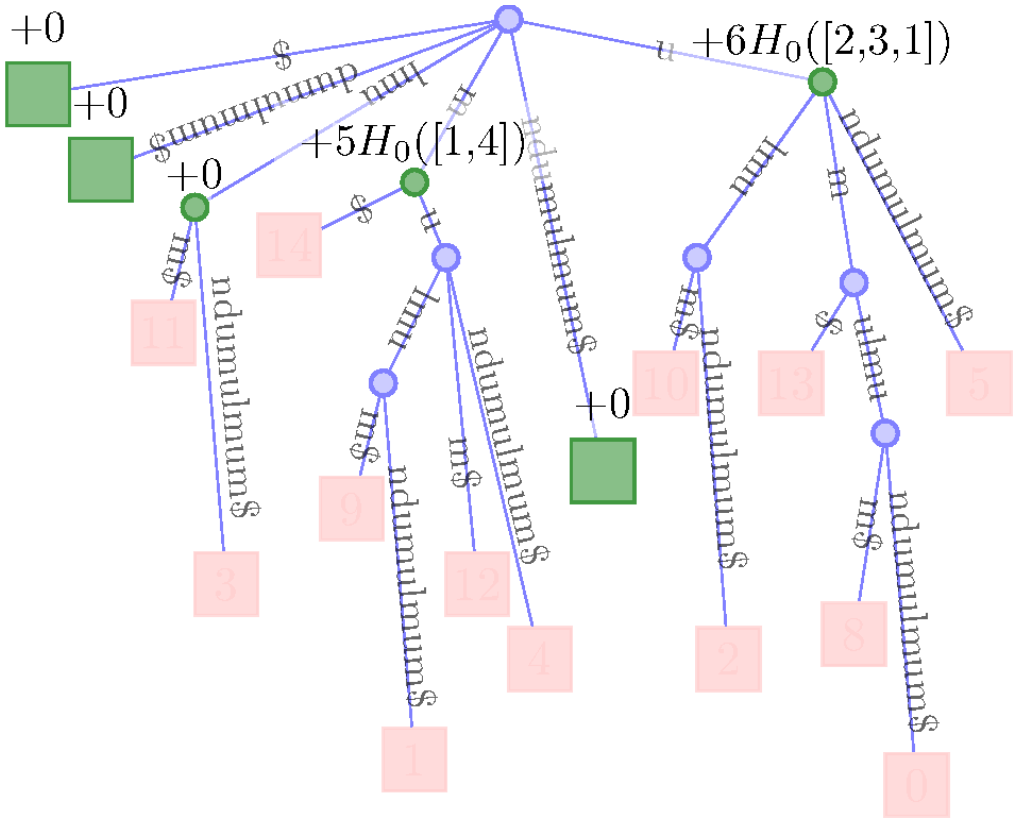
Beispiel: $S = \texttt{ananas}$, $k = 2$

$N(\texttt{an}, S) = \texttt{aa}$, $N(\texttt{na}, S) = \texttt{ns}$, $N(\texttt{as}, S) = \varepsilon$.

$H_2(\texttt{ananas}) = \frac{2}{6} H(\texttt{ns}) = \frac{1}{3}$ bits

Theorie Verlustfreier Textkompression

H_k: Berechnung mittels Suffixbaumes (Beispiel: H_1)



Theorie Verlustfreier Textkompression

Werte der empirischen Entropie in der Praxis

$H_k(S)$ in bits und (# eindeutiger Kontexte/$|S|$ in Prozent)

k	dblp.xml		DNA		english		proteins	
0	5.26	0.0	1.97	0.0	4.53	0.0	4.20	0.0
1	3.48	0.0	1.93	0.0	3.62	0.0	4.18	0.0
2	2.17	0.0	1.92	0.0	2.95	0.0	4.16	0.0
3	1.43	0.1	1.92	0.0	2.42	0.0	4.07	0.0
4	1.05	0.4	1.91	0.0	2.06	0.3	3.83	0.1
5	0.82	1.3	1.90	0.0	1.84	1.0	3.16	1.7
6	0.70	2.7	1.88	0.0	1.67	2.7	1.50	17.4

Wörterbuchbasierte Textkompression

Grundidee: wähle $\Sigma' \subseteq \Sigma^*$ und ersetze $S \in \Sigma^*$ durch $S' = \langle s'_1, \ldots, s'_k \rangle \in \Sigma'^*$, so dass $S = s'_1 \cdot s'_2 \cdots s'_k$. (mit '$\cdot$'= Zeichenkettenkonkatenation.

Platz $n \lceil \log \Sigma \rceil \rightarrow k \lceil \log \Sigma' \rceil$ mit Entropiecodierung der Zeichen aus Σ' sogar $k\text{Entropie}(S')$

Problem: zusätzlicher Platz für Wörterbuch.

OK für sehr große Datenbestände.

Wörterbuchbasierte Textkompression – Beispiel

Volltextsuchmaschinen verwenden oft $\Sigma' :=$ durch Leerzeichen (etc.) separierte Wörter der zugrundeliegenden natürlichen Sprache.

Spezialbehandlung von Trennzeichen etc.

`Gallia est omnis divisa in partes tres,...`

$\rightarrow$ gallia | est | omnis | divisa | in | partes | tres ...

Lempel-Ziv Kompression (LZ)

[LZ'78]

Idee: baue Wörterbuch "on the fly" bei Codierung und Decodierung.

Ohne explizite Speicherung!

Naive Lempel-Ziv Kompression (LZ)

[LZ'78]

Procedure naiveLZCompress$(\langle s_1, \ldots, s_n \rangle, \Sigma)$

$D := \Sigma$ // Init Dictionary

$p := s_1$ // current string

for $i := 2$ **to** n **do**

if $p \cdot s_i \in D$ **then** $p := p \cdot s_i$

else

output code for p

$D := D \cup p \cdot s_i$

$p := s_i$

output code for p

Naive LZ Dekompression

[LZ'78]

Procedure naiveLZDecode($\langle c_1, \ldots, c_k \rangle$)

$D := \Sigma$

output decode(c_1)

for $i := 2$ **to** k **do**

if $c_i \in D$ **then**

$D := D \cup \text{decode}(c_{i-1}) \cdot \text{decode}(c_i)[1]$

else // where $s[1]$ is the first letter.

$D := D \cup \text{decode}(c_{i-1}) \cdot \text{decode}(c_{i-1})[1]$

output decode(c_i)

LZ Beispiel: abracadabra

#	p	output	input	$D \cup =$
1	$\perp$	-	a	a,b,c,d,r
2	a	a	b	ab
3	b	b	r	br
4	r	r	a	ra
5	a	a	c	ac
6	c	c	a	ca
7	a	a	d	ad
8	d	d	a	da
9	a	-	b	-
10	ab	ab	r	abr
11	r	-	a	-
-	ra	ra	-	-

LZ-Verfeinerungen

- Wörterbuchgröße begrenzen, z.B. $|D| \leq 4096 \rightsquigarrow$ 12bit codes.
- Von vorn wenn Wörterbuch voll $\rightsquigarrow$ Blockweise arbeiten
- Kodierung mit variabler Zahl Bits (z.B. Huffman, arithmetic coding)
- Selten benutzte Wörterbucheinträge löschen ???
- Wörterbuch effizient implementieren:
  (universelles) hashing
- verwendet in zip/gzip mit Huffman Kodierung