Burrows Wheeler Transformation – Algorithmen II

Timo Bingmann, Simon Gog
`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS19.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

```
        result = current_weight;
        return true;
    }

for( EdgeID eid = graph.edgeBegin( current ); eid != graph.edgeEnd( current ); ++eid ){
    const Edge & edge = graph.getEdge( eid );
    COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::TOUCHED_EDGES ); )
    if( edge.forward ){
        COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::RELAXED_EDGES ); )
        Weight new_weight = edge.weight + current_weight;
        GUARANTEE( new_weight >= current_weight, std::runtime_error, "Weight overflow detected.
        if( !priority_queue.isReached( edge.target ) ){
            COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::SUCCESSFULLY_RELAXED_EDGES );
            COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::REACHED_NODES ); )
            priority_queue.push( edge.target, new_weight );
        } else {
            if( priority_queue.getCurrentKey( edge.target ) > new_weight ){
                COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::SUCCESSFULLY_RELAXED_EDGES
                priority_queue.decreaseKey( edge.target, new_weight );
            }
```

Burrows-Wheeler-Transformation

Einführung

Burrows, Wheeler (1983, 1994)

- “nur” eine Umordnung des Textes,
  → gruppiert Zeichen mit ähnlichem Kontext, reversibel
- ursprünglich eingeführt zur Textkompression
  → Teilschritt von bzip2
- später auch für Textindizierung verwendet
  → z.B. Rückwärtssuche, Berechnung des LCP-Array

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \end{array}$$

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \hat{=}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- SA[i] ≙ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
								g	$	8
							n	g	$	7
						g	n	g	$	6
					n	g	n	g	$	5
				a	n	g	n	g	$	4
			l	a	n	g	n	g	$	3
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T=$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T=$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	SA
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- SA$[i]$ ≙ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

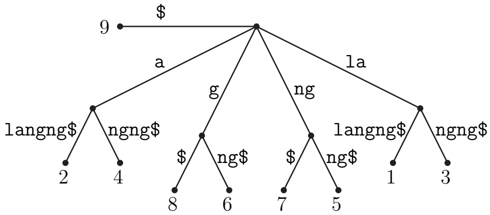
- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- SA$[i]$ ≙ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T=$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

	SA
`$`	9
`alangng$`	2
`angng$`	4
`g$`	8
`gng$`	6
`lalangng$`	1
`langng$`	3
`ng$`	7
`ngng$`	5



Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

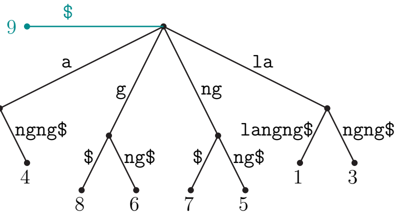
- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- SA$[i]$ $\hat{=}$ Index des *i*-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ \end{array}$$

	SA
`$`	9
`alangng$`	2
`angng$`	4
`g$`	8
`gng$`	6
`lalangng$`	1
`langng$`	3
`ng$`	7
`ngng$`	5



Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

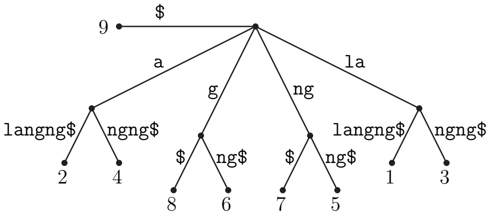
Definition

- $\mathrm{SA}[i] \mathrel{\hat{=}}$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
l	a	l	a	n	g	n	g	$

$T =$ `lalangng$`

	SA
`$`	9
`alangng$`	2
`angng$`	4
`g$`	8
`gng$`	6
`lalangng$`	1
`langng$`	3
`ng$`	7
`ngng$`	5



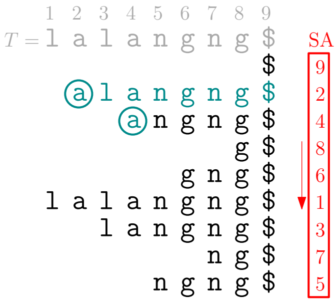
Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

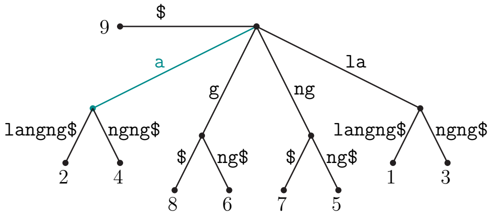
- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \triangleq$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T=$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	SA
									$	9
		ⓐ	l	a	n	g	n	g	$	2
				ⓐ	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5



Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

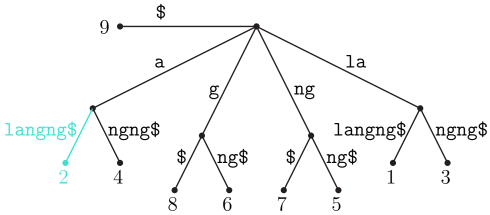
- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

- $\mathrm{SA}[i] \triangleq$ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T=$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

	SA
$	9
alangng$	2
angng$	4
g$	8
gng$	6
lalangng$	1
langng$	3
ng$	7
ngng$	5



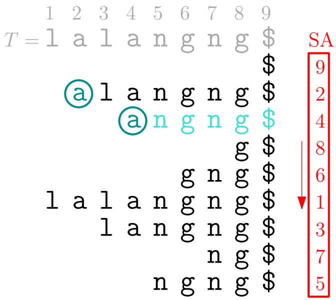
Burrows-Wheeler-Transformation

Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

Definition

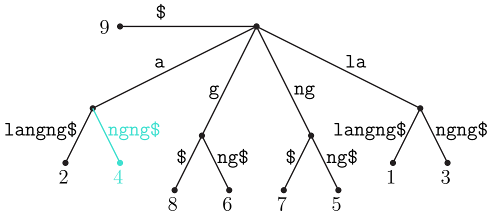
- SA$[i]$ ≙ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



1 2 3 4 5 6 7 8 9

$T =$ l a l a n g n g $

	SA
$	9
a l a n g n g $	2
a n g n g $	4
g $	8
g n g $	6
l a l a n g n g $	1
l a n g n g $	3
n g $	7
n g n g $	5



Burrows-Wheeler-Transformation

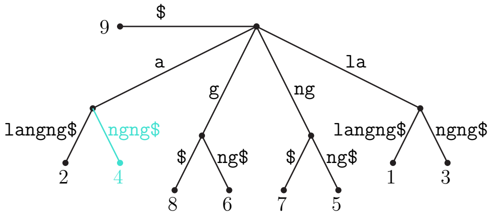
Wiederholung: Suffix-Arrays (und Suffixbäume)

- Textindizierung
  → schnelle Suche in Texten
- kann in $O(n)$ erzeugt werden
  (DC3-Algorithmus)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	SA
									$	9
		a	l	a	n	g	n	g	$	2
				a	n	g	n	g	$	4
								g	$	8
						g	n	g	$	6
	l	a	l	a	n	g	n	g	$	1
			l	a	n	g	n	g	$	3
							n	g	$	7
					n	g	n	g	$	5

Definition

- SA$[i]$ ≙ Index des i-ten sortierten Suffix
  (einer Zeichenkette T)



usw.

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T = & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

$$
\begin{array}{rccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
T = & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} \\
 & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} \\
 & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a}
\end{array}
$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
T = & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \$ \\
 & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \$ & \texttt{l} \\
 & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \$ & \texttt{l} & \texttt{a} \\
 & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \$ & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l}
\end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l
	l	a	n	g	n	g	$	l	a
	a	n	g	n	g	$	l	a	l

⋮

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ \\
 & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} \\
 & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\
 & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} \\
 & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\
 & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \\
 & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} \\
 & \mathtt{g} & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} \\
 & \$ & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g}
\end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

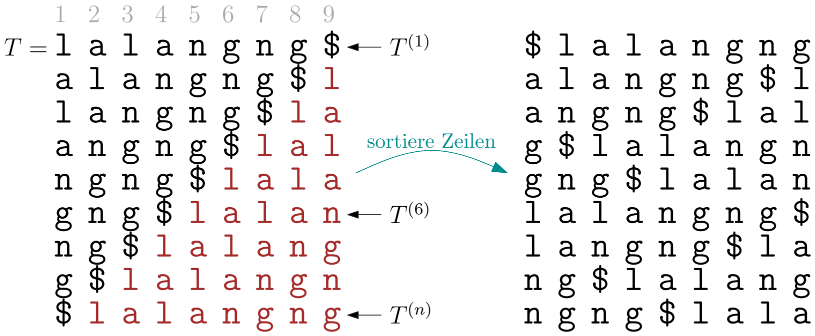
Transformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	$\longleftarrow T^{(1)}$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l	
	l	a	n	g	n	g	$	l	a	
	a	n	g	n	g	$	l	a	l	
	n	g	n	g	$	l	a	l	a	
	g	n	g	$	l	a	l	a	n	$\longleftarrow T^{(6)}$
	n	g	$	l	a	l	a	n	g	
	g	$	l	a	l	a	n	g	n	
	$	l	a	l	a	n	g	n	g	$\longleftarrow T^{(n)}$

- $T^{(i)} \triangleq T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	← $T^{(1)}$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l	
	l	a	n	g	n	g	$	l	a	
	a	n	g	n	g	$	l	a	l	
	n	g	n	g	$	l	a	l	a	
	g	n	g	$	l	a	l	a	n	← $T^{(6)}$
	n	g	$	l	a	l	a	n	g	
	g	$	l	a	l	a	n	g	n	
	$	l	a	l	a	n	g	n	g	← $T^{(n)}$

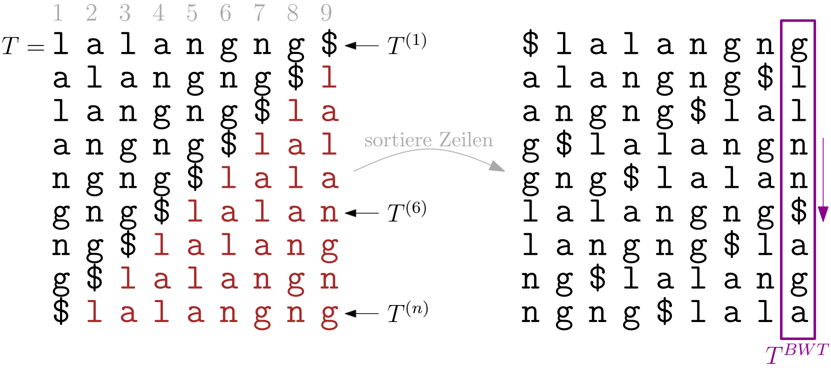
sortiere Zeilen

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

- $T^{(i)} \triangleq T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$	← $T^{(1)}$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l	
	l	a	n	g	n	g	$	l	a	
	a	n	g	n	g	$	l	a	l	
	n	g	n	g	$	l	a	l	a	
	g	n	g	$	l	a	l	a	n	← $T^{(6)}$
	n	g	$	l	a	l	a	n	g	
	g	$	l	a	l	a	n	g	n	
	$	l	a	l	a	n	g	n	g	← $T^{(n)}$

sortiere Zeilen

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

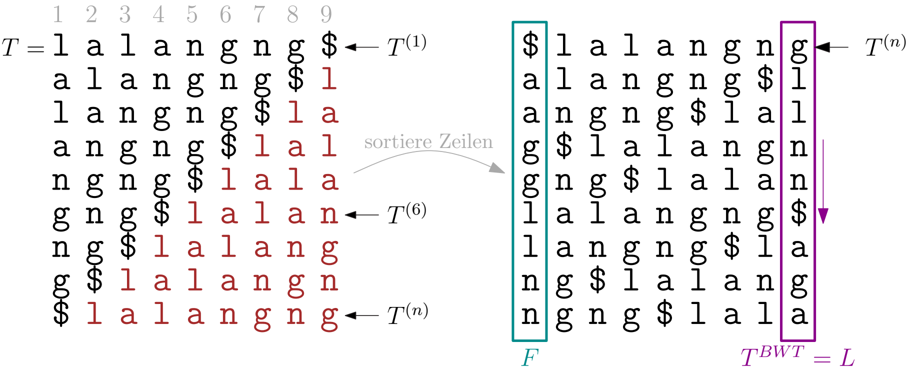
T^{BWT}

- $T^{(i)} \triangleq T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$
- $T =$ `lalangng$` $\rightarrow$ $T^{BWT} =$ `gllnn$aga`

$\mathcal{O}(n^2 + n \log n)$

Burrows-Wheeler-Transformation

Transformation



	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$
	a	l	a	n	g	n	g	$	l
	l	a	n	g	n	g	$	l	a
	a	n	g	n	g	$	l	a	l
	n	g	n	g	$	l	a	l	a
	g	n	g	$	l	a	l	a	n
	n	g	$	l	a	l	a	n	g
	g	$	l	a	l	a	n	g	n
	$	l	a	l	a	n	g	n	g

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

- $T^{(i)} \mathrel{\hat{=}} T$ zyklisch ab Position i, Länge $n = |T|$
- $T =$ `lalangng$` $\rightarrow$ $T^{BWT} =$ `gllnn$aga` $\mathcal{O}(n^2 + n \log n)$

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \end{array}$$

$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar
- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

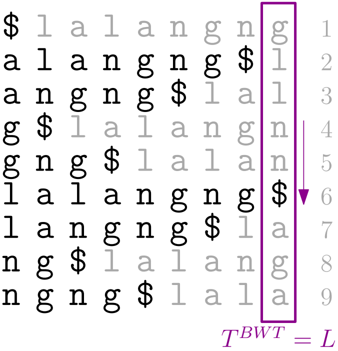
Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar

- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in *T*



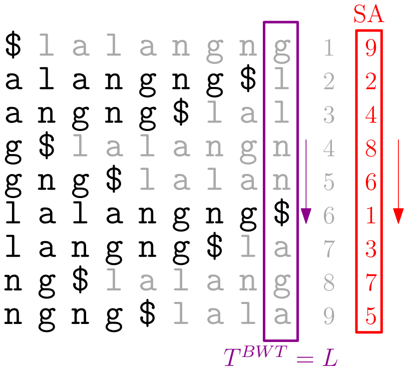
$	l	a	l	a	n	g	n	g	1
a	l	a	n	g	n	g	$	l	2
a	n	g	n	g	$	l	a	l	3
g	$	l	a	l	a	n	g	n	4
g	n	g	$	l	a	l	a	n	5
l	a	l	a	n	g	n	g	$	6
l	a	n	g	n	g	$	l	a	7
n	g	$	l	a	l	a	n	g	8
n	g	n	g	$	l	a	l	a	9

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Eigenschaften

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T =$	l	a	l	a	n	g	n	g	\$



										SA
\$	l	a	l	a	n	g	n	g	1	9
a	l	a	n	g	n	g	\$	l	2	2
a	n	g	n	g	\$	l	a	l	3	4
g	\$	l	a	l	a	n	g	n	4	8
g	n	g	\$	l	a	l	a	n	5	6
l	a	l	a	n	g	n	g	\$	6	1
l	a	n	g	n	g	\$	l	a	7	3
n	g	\$	l	a	l	a	n	g	8	7
n	g	n	g	\$	l	a	l	a	9	5

$T^{BWT} = L$

- BWT in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar

- Zeilen enthalten sortierte Suffixe
- Zeichen in letzer Spalte entspricht Zeichen vor Suffix in T

- $T^{BWT}[i] = L[i] = T[SA[i]-1] = T^{(SA[i])}[n]$

  ($T^{BWT}[i]$ ist das Zeichen vor dem i-ten Suffix in T)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

$$\begin{array}{cccccccc|c|} \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} \\ \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} \\ \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} \\ \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} \\ \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \\ \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \\ \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} \\ \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} \\ \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} \end{array}\downarrow$$

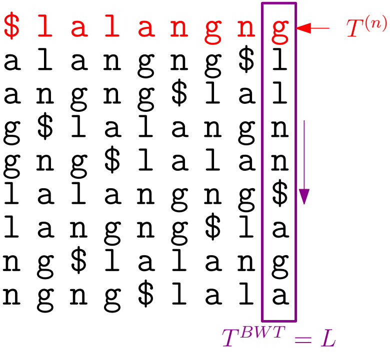
$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Voruberlegungen

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)



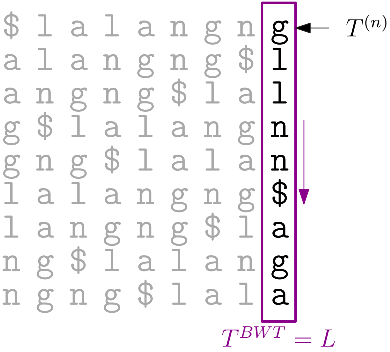
$$\begin{array}{cccccccc|c|l} \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \leftarrow T^{(n)} \\ \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \\ \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \\ \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \\ \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \\ \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \downarrow \\ \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \\ \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \\ \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \end{array}$$

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} & = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$



$$\begin{array}{ccccccccc|c} \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \leftarrow T^{(n)} \\ \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \\ \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \\ \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \\ \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \\ \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \\ \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \\ \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{n} & \texttt{g} & \\ \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{l} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{a} & \end{array}$$

$T^{BWT} = L$

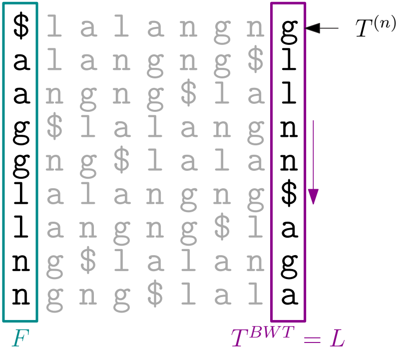
- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)



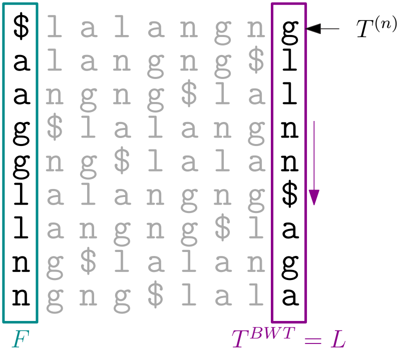
$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} & = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)



$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Voruberlegungen

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

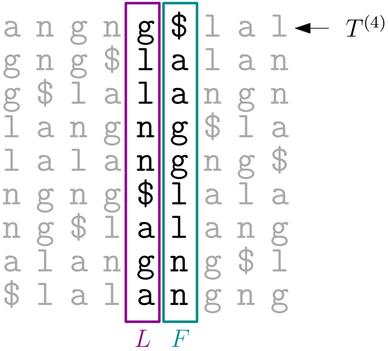
- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

l	a	l	a	n	g	n	g	$	← $T^{(1)}$
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	
$	l	a	l	a	n	g	n	g	
n	g	$	l	a	l	a	n	g	
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
a	n	g	n	g	$	l	a	l	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
							L	F	

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$



a	n	g	n	g	$	l	a	l	← $T^{(4)}$
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	
n	g	$	l	a	l	a	n	g	
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
$	l	a	l	a	n	g	n	g	
				L	F				

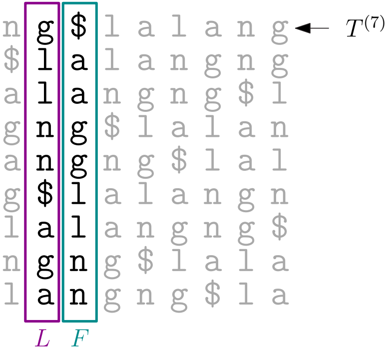
- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – Vorüberlegungen

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- betrachte Matrix aus Transformation
  - erste Zeile enthält Lösung $T^{(n)}$
  - $T^{BWT} = L$ gegeben
  - F leicht zu bestimmen (sortiere L)
  - L ist *immer* Spalte vor F (zyklisch)



n	g	$	l	a	l	a	n	g	← $T^{(7)}$
$	l	a	l	a	n	g	n	g	
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
a	n	g	n	g	$	l	a	l	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
	L	F							

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

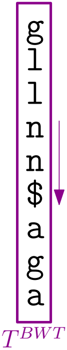
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} & = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert



g
l
l
n
n
$
a
g
a

T^{BWT}

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

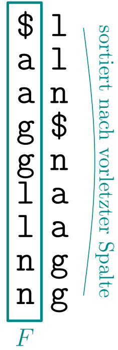
T^{BWT}	F
g	$
l	a
l	a
n	g
n	g
$	l
a	l
g	n
a	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert



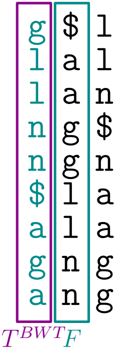
$	l
a	l
a	n
g	$
g	n
l	a
l	a
n	g
n	g
F	

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert



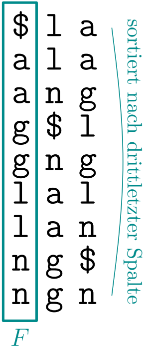
g	$	l
l	a	l
l	a	n
n	g	$
n	g	n
$	l	a
a	l	a
g	n	g
a	n	g
T^{BWT}	F	

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert



$	l	a
a	l	a
a	n	g
g	$	l
g	n	g
l	a	l
l	a	n
n	g	$
n	g	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

g	$	l	a
l	a	l	a
l	a	n	g
n	g	$	l
n	g	n	g
$	l	a	l
a	l	a	n
g	n	g	$
a	n	g	n
T^{BWT}	F		

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

. . .

g	$	l	a
l	a	l	a
l	a	n	g
n	g	$	l
n	g	n	g
$	l	a	l
a	l	a	n
g	n	g	$
a	n	g	n
T^{BWT}	F		

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \$ & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

$	l	a	l	a	n	g	n	g
a	l	a	n	g	n	g	$	l
a	n	g	n	g	$	l	a	l
g	$	l	a	l	a	n	g	n
g	n	g	$	l	a	l	a	n
l	a	l	a	n	g	n	g	$
l	a	n	g	n	g	$	l	a
n	g	$	l	a	l	a	n	g
n	g	n	g	$	l	a	l	a

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

$	l	a	l	a	n	g	n	g	← $T^{(n)}$
a	l	a	n	g	n	g	$	l	
a	n	g	n	g	$	l	a	l	
g	$	l	a	l	a	n	g	n	
g	n	g	$	l	a	l	a	n	
l	a	l	a	n	g	n	g	$	
l	a	n	g	n	g	$	l	a	
n	g	$	l	a	l	a	n	g	
n	g	n	g	$	l	a	l	a	

- schreibe T^{BWT} in Spaltenform
- sortiere zeilenweise
- schreibe T^{BWT} in Spaltenform davor
- wiederhole bis $|T^{BWT}|$ mal sortiert

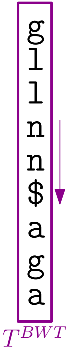
- $T^{BWT} = \mathtt{gllnn\$aga} \quad \rightarrow \quad T = \mathtt{lalangng\$}$ $\qquad \mathcal{O}(n^2 \log n)$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ T = & & & & & ? & & & & \end{array}$$

- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  → *last-to-front mapping LF*$[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)

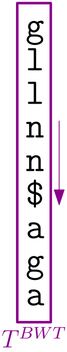


Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$									$

- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping LF*$[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)

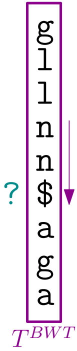


Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$

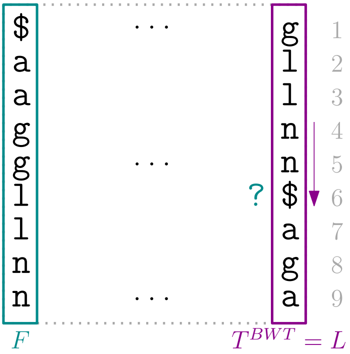
- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  $\rightarrow$ *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)



Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \$ & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\ T = & & & & & & & & ? & \$ \end{array}$$



- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  → *last-to-front mapping LF*$[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)

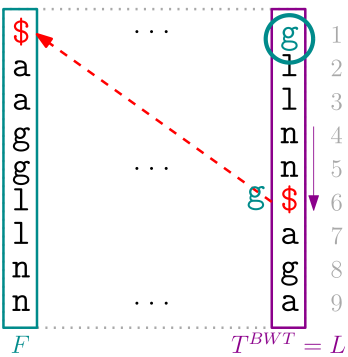
- $LF[6] = ?$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\ T = & & & & & & & & ? & \mathtt{\$} \end{array}$$

- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  → *last-to-front mapping LF*$[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)



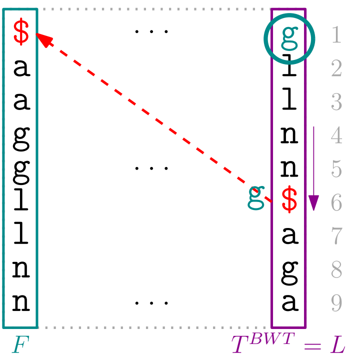
- $LF[6] = 1$
  ($LF[6]$ ist die Position in $F[\cdot]$ an der $L[6]$ steht)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$

- Wie lautet das Vorgängerzeichen?
  → *last-to-front mapping* $LF[\cdot]$
  (Position in $L[\cdot]$ an der Vorgänger steht)



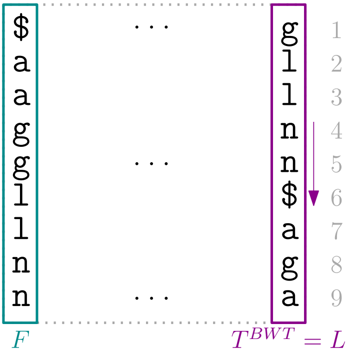
- $LF[i] = j \Leftrightarrow T^{(SA[j])} = (T^{(SA[i])})^{(n)} \Leftrightarrow SA[i] = SA[j] - 1 \pmod{n}$
  ($LF[i]$ ist die Position in $F[\cdot]$ an der $L[i]$ steht)

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$T^{BWT} = \overset{1}{\mathtt{g}}\ \overset{2}{\mathtt{l}}\ \overset{3}{\mathtt{l}}\ \overset{4}{\mathtt{n}}\ \overset{5}{\mathtt{n}}\ \overset{6}{\mathtt{\$}}\ \overset{7}{\mathtt{a}}\ \overset{8}{\mathtt{g}}\ \overset{9}{\mathtt{a}}$$

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt
  - → gleiche Zeichen besitzen gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$
  - → falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$, dann $LF[i] < LF[j]$
- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)



\$	…	g	1
a		l	2
a		l	3
g		n	4
g	…	n	5
l		\$	6
l		a	7
n		g	8
n	…	a	9

F

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

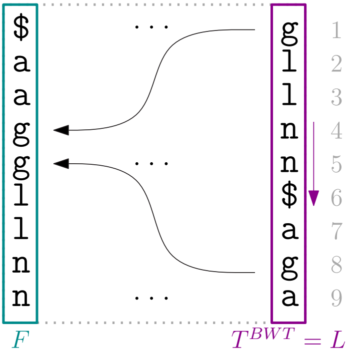
$$T^{BWT} = \overset{1}{\texttt{g}}\ \overset{2}{\texttt{l}}\ \overset{3}{\texttt{l}}\ \overset{4}{\texttt{n}}\ \overset{5}{\texttt{n}}\ \overset{6}{\texttt{\$}}\ \overset{7}{\texttt{a}}\ \overset{8}{\texttt{g}}\ \overset{9}{\texttt{a}}$$

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt

  → gleiche Zeichen besitzen gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$

  → falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$, dann $LF[i] < LF[j]$

- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)



Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation – weitere Überlegungen

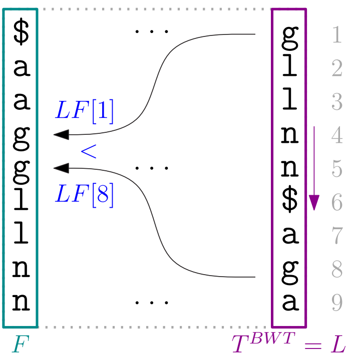
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt

  → gleiche Zeichen besitzen
  gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$

  → falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$,
  dann $LF[i] < LF[j]$

- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)



$	g	1
a	l	2
a	l	3
g	n	4
g	n	5
l	$	6
l	a	7
n	g	8
n	a	9

Burrows-Wheeler-Transformation

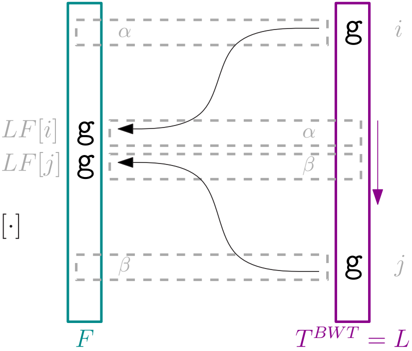
Rücktransformation – weitere Überlegungen

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- T^{BWT} hat Struktur, so dass gilt

  → gleiche Zeichen besitzen
  gleiche Reihenfolge in $F[\cdot]$ und $L[\cdot]$

  → falls $L[i] = L[j]$ mit $i < j$,
  dann $LF[i] < LF[j]$



- Grund: $\alpha < \beta$ lexikographisch (nach Konstruktion)

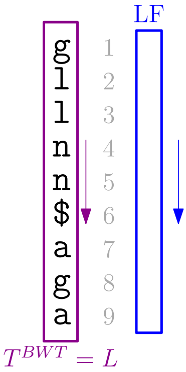
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{lccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \quad = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

  ($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



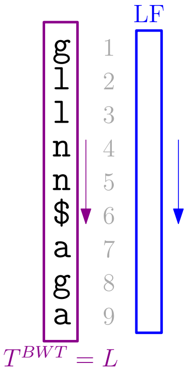
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \;\; = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



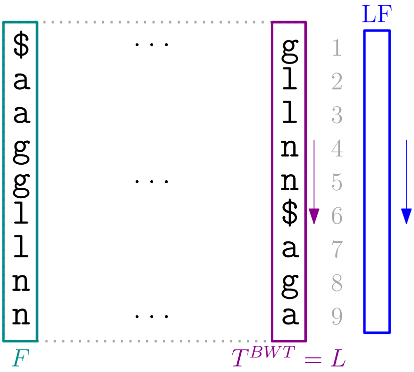
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$T^{BWT} = \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \end{array}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) \quad = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



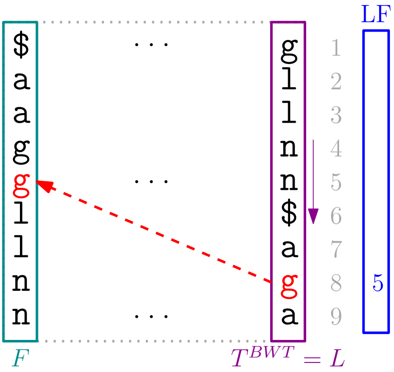
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$T^{BWT} = \overset{1}{\texttt{g}}\;\overset{2}{\texttt{l}}\;\overset{3}{\texttt{l}}\;\overset{4}{\texttt{n}}\;\overset{5}{\texttt{n}}\;\overset{6}{\texttt{\$}}\;\overset{7}{\texttt{a}}\;\overset{8}{\texttt{g}}\;\overset{9}{\texttt{a}}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



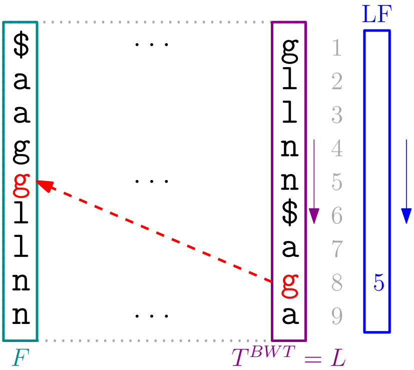
Burrows-Wheeler-Transformation

Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \end{array}$$

- $LF[\cdot]$ nur aus $T^{BWT}[\cdot]$ berechenbar
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$
  - $C(a) = \#_{\text{Zeichen}}$ kleiner als a
  - $occ[i] = \#_{\text{Zeichen}}$ gleich $L[i]$ in $L[1..i]$

  ($LF[i]$ ist Position in $F[\cdot]$, an der $L[i]$ steht)



- $C(\cdot)$, $occ[\cdot]$ in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar → $LF[\cdot]$ auch in $\mathcal{O}(n)$ berechenbar

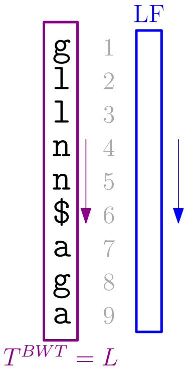
Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{r ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\ occ = & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r ccccc} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ h = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(zählt Zeichen)



- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

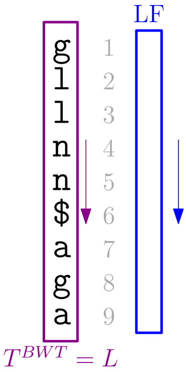
Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ occ = & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{n} \\ h = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

(zählt Zeichen)

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ ($i = 1..n$)
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$



Burrows-Wheeler-Transformation

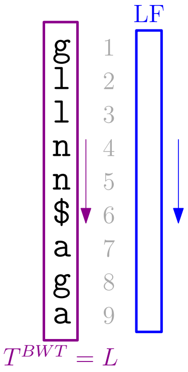
Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$									

	$	a	g	l	n
$h =$	0	0	1	0	0

(zählt Zeichen)

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$



Burrows-Wheeler-Transformation

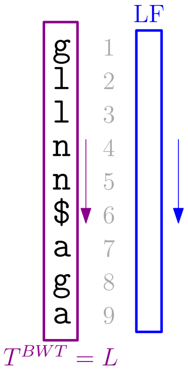
Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1								

	$	a	g	l	n
$h =$	0	0	1	0	0

(zählt Zeichen)

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$



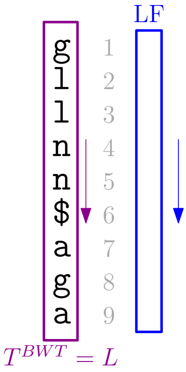
Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ occ = & 1 & 1 & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{n} \\ h = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(zählt Zeichen)



- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ ($i = 1..n$)
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

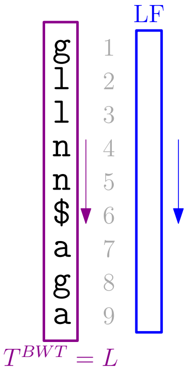
Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ occ = & 1 & 1 & 2 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{n} \\ h = & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

(zählt Zeichen)

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \to C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$



Burrows-Wheeler-Transformation

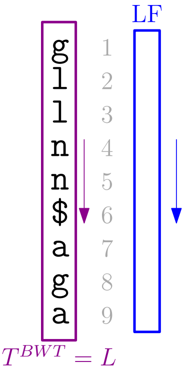
Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ occ = & 1 & 1 & 2 & \ldots & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{n} \\ h = & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

(zählt Zeichen)

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$



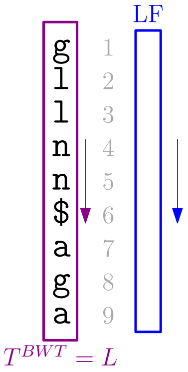
Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\ occ = & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ h = & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

(zählt Zeichen)



- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ $(i = 1..n)$
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

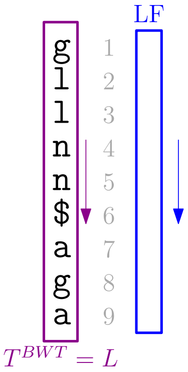
Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\ occ = & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ h = & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ C = & 0 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{array}$$

(Präfixsumme von h)

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ ($i = 1..n$)
  - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
  - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$



Burrows-Wheeler-Transformation

Ablauf der Berechnung von $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$occ =$	1	1	2	1	2	1	1	2	2

	$	a	g	l	n
$h =$	1	2	2	2	2
$C =$	0	1	3	5	7

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

- initialisiere *occ* und *h*
- laufe durch $T^{BWT} = L$ ($i = 1..n$)
    - $h(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ ) + 1$
    - $occ(\ L[i]\ ) = h(\ L[i]\ )$
- bilde exkl. Präfixsumme von $h \rightarrow C$
- $LF[i] = C(L[i]) + occ[i]$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ T = & & & & & & & & & \end{array}$$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \texttt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \texttt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - …

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ T = & & & & & & & & & \$ \end{array}$$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \texttt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \texttt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

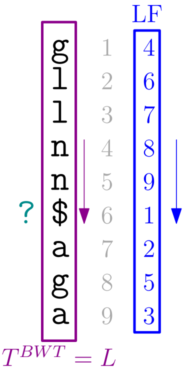
$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...



			LF
	g	1	4
	l	2	6
	l	3	7
	n	4	8
	n	5	9
?	$	6	1
	a	7	2
	g	8	5
	a	9	3

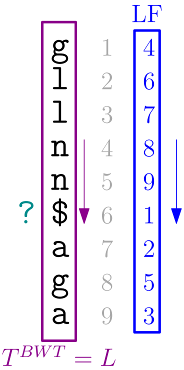
$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	$	a	g	a
$T =$								?	$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \texttt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \texttt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...



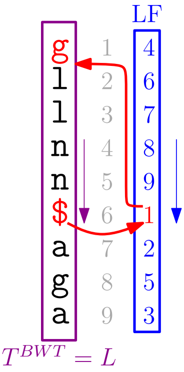
			LF
	g	1	4
	l	2	6
	l	3	7
	n	4	8
	n	5	9
?	$	6	1
	a	7	2
	g	8	5
	a	9	3

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\
T = & & & & & & & & \mathtt{g} & \mathtt{\$}
\end{array}$$

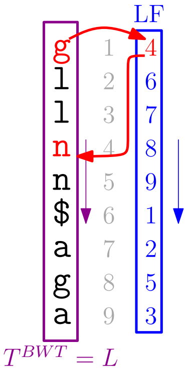


- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathrm{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathrm{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\ T = & & & & & & & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \end{array}$$



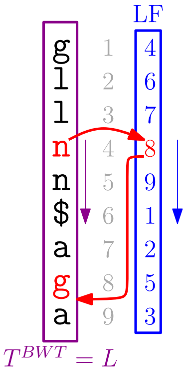
- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} \\ T = & & & & & \ldots & \texttt{g} & \texttt{n} & \texttt{g} & \texttt{\$} \end{array}$$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \texttt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \texttt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...



		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

$T^{BWT} = L$

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} \\ T = & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{a} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{n} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} \end{array}$$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \mathtt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \mathtt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...

		LF
g	1	4
l	2	6
l	3	7
n	4	8
n	5	9
$	6	1
a	7	2
g	8	5
a	9	3

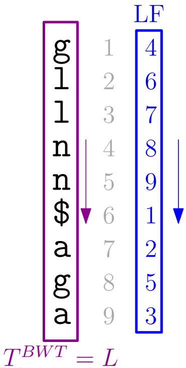
$T^{BWT} = L$

- Allgemein: $T[n-i] = L[LF(LF(\ldots(LF(1))\ldots))]$ $(i-1)$ LF Anwendungen

Burrows-Wheeler-Transformation

Rücktransformation mit $LF[\cdot]$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	`g`	`l`	`l`	`n`	`n`	`$`	`a`	`g`	`a`
$T =$	`l`	`a`	`l`	`a`	`n`	`g`	`n`	`g`	`$`



		LF
`g`	1	4
`l`	2	6
`l`	3	7
`n`	4	8
`n`	5	9
`$`	6	1
`a`	7	2
`g`	8	5
`a`	9	3

$T^{BWT} = L$

- Berechnung von T von rechts nach links
  - Initialisierung: $T[n] = \$ \Rightarrow LF(?) = 1$ (immer!)
  - $L[1] = \texttt{g} \Rightarrow T[n-1] = g \Rightarrow LF(1) = 4$
  - $L[4] = \texttt{n} \Rightarrow T[n-2] = n \Rightarrow LF(4) = 8$
  - ...
- Allgemein: $T[n-i] = L[LF(LF(\ldots(LF(1))\ldots))]$ $(i-1)$ LF Anwendungen
- Rücktransformation in $\mathcal{O}(n)$ (ohne Zusatzinformationen)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  → scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  → vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  → Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar → Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  → scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  → vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  → Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, ...)

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar → Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  → scheinbar keine Vorteile ?!?
- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  → vereinfacht Komprimierung
- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  → Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar → Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  → scheinbar keine Vorteile ?!?
- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  → vereinfacht Komprimierung
- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  → Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

```
  ⋮                    ⋮
t h e ...        ...   _
t h e ...        ...   _
t h e ...        ...   _
  ⋮                    ⋮
```

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar → Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  → scheinbar keine Vorteile ?!?
- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  → vereinfacht Komprimierung
- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  → Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)

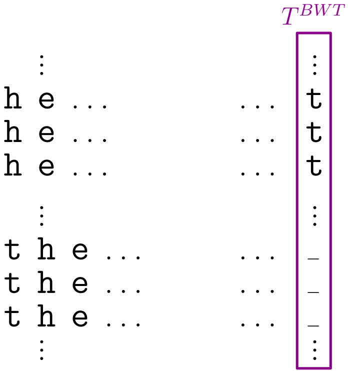
⋮	⋮
h e . . .	. . . t
h e . . .	. . . t
h e . . .	. . . t
⋮	⋮
t h e . . .	. . . _
t h e . . .	. . . _
t h e . . .	. . . _
⋮	⋮

(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar → Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie T
  → scheinbar keine Vorteile ?!?
- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  → vereinfacht Komprimierung
- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  → Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)



(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar → Indizierung / Suche)

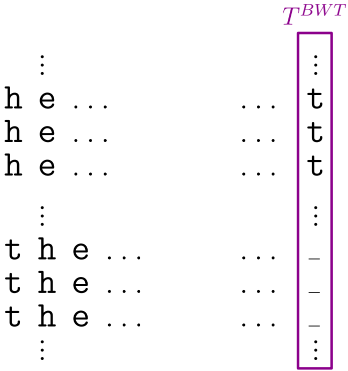
Burrows-Wheeler-Transformation

Was bringt die BWT?

- benötigt gleichen Platz, verwendet gleiche Zeichen wie *T*
  → scheinbar keine Vorteile ?!?

- Permutation einfach umkehrbar
  (benötigt keine Zusatzinformationen, $\mathcal{O}(n)$)
- Zeichen mit ähnlichem Kontext gruppiert
  → vereinfacht Komprimierung

- besonders gut auf Texten mit vielen gleichen Substrings
  → Beispiel: englischer Text
  (u.a. viele “the”, . . .)



(Außerdem: Vorgänger von Suffixen einfach bestimmbar → Indizierung / Suche)

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression

gegeben: Text T
gesucht : komprimierter Text C

bzip2 (1996)

- (Huffmann Kodierung)
- erzeuge *Burrows-Wheeler-Transformation*
- *Move-To-Front* (MTF) Kodierung
- Huffmann Kodierung
  (eigentliche Kompression)

bzip2

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} & \texttt{\$} \end{array}$$

$R =$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ Y = & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	a	g	a	$
$R =$	3								

	1	2	3	4	5
$Y =$	$	a	g	l	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} & \texttt{\$} \\ R = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{n} \\ Y = & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	a	g	a	$
$R =$	3	4							

	1	2	3	4	5
	$	a	g	l	n
$Y =$	g	$	a	l	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \mathtt{\$} \\ R = & 3 & 4 & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ Y = & \mathtt{l} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	a	g	a	$
$R =$	3	4	1						

	1	2	3	4	5
	$	a	g	l	n
	g	$	a	l	n
$Y =$	l	g	$	a	n

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
    - $R[i] =$ Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
    - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{l} & \texttt{n} & \texttt{n} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{a} & \texttt{\$} \\ R = & 3 & 4 & 1 & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{g} & \texttt{l} & \texttt{n} \\ & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{l} & \texttt{n} \\ & \texttt{l} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{n} \\ Y = & \texttt{l} & \texttt{g} & \texttt{\$} & \texttt{a} & \texttt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ T^{BWT} = & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{l} & \mathtt{n} & \mathtt{n} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{a} & \mathtt{\$} \\ R = & 3 & 4 & 1 & \dots & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccc} & & & \vdots & & \\ & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{g} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{l} & \mathtt{n} \\ & \mathtt{l} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \\ Y = & \mathtt{l} & \mathtt{g} & \mathtt{\$} & \mathtt{a} & \mathtt{n} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$T^{BWT} =$	g	l	l	n	n	a	g	a	$
$R =$	3	4	1	5	1	5	4	2	5

	1	2	3	4	5
	$	a	g	l	n
	g	$	a	l	n
	l	g	$	a	n
	l	g	$	a	n
	n	l	g	$	a
	n	l	g	$	a
	a	n	l	g	$
	g	a	n	l	$
	a	g	n	l	$
$Y =$	$	a	g	n	l

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
  - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
  - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

$$\begin{array}{rccccccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ T^{BWT} = & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{b} & \mathtt{c} & \mathtt{c} & \mathtt{c} & \mathtt{c} & \mathtt{d} \end{array}$$

$R =$

$$\begin{array}{rcccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ Y = & \mathtt{a} & \mathtt{b} & \mathtt{c} & \mathtt{d} \end{array}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: *Move-To-Front* (MTF) Kodierung

- nutzt lokale Redundanz
- erzeugt kleine Zahlen für gleiche Zeichen, die nahe beieinander sind

Ablauf

- initialisiere Y mit Alphabet von T^{BWT}
- durchlaufe T^{BWT} $(i = 1..n)$, generiere $R[1..n]$
    - $R[i]$ = Position von $T^{BWT}[i]$ in Y
    - Schiebe $T^{BWT}[i]$ an den Anfang von Y

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$T^{BWT} =$	a	a	a	a	b	b	b	b	c	c	c	c	d
$R =$	1	1	1	1	2	1	1	1	3	1	1	1	4

1	2	3	4
a	b	c	d
	⋮		
b	a	c	d
	⋮		
c	b	a	d
	⋮		
$Y =$ d	c	b	a

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

- präfixfreie Codes variabler Länge
- können greedy konstruiert werden

Ablauf

- erzeuge binären Baum *bottom-up*
    - nimm seltenste 2 Zeichen(-gruppen)
    - erzeuge neuen Knoten, der beide Zeichen(-gruppen) repräsentiert, neue Häufigkeit ≙ Summe beider Häufigkeiten
- Beschriftungen der Baumkanten (links:0, rechts:1) ergeben Zeichenkodierungen

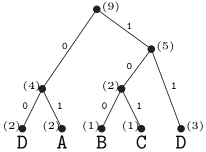
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

- präfixfreie Codes variabler Länge
- können greedy konstruiert werden

Ablauf

- erzeuge binären Baum *bottom-up*
  - nimm seltenste 2 Zeichen(-gruppen)
  - erzeuge neuen Knoten, der beide Zeichen(-gruppen) repräsentiert, neue Häufigkeit ≙ Summe beider Häufigkeiten
- Beschriftungen der Baumkanten (links:0, rechts:1) ergeben Zeichenkodierungen



Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$$T = \texttt{l a l a n g n g \$}$$
$$R = \texttt{3 4 1 5 1 5 4 2 5}$$

Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`

$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

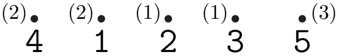
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T = \texttt{l a l a n g n g \$}$

$R = \texttt{3 4 1 5 1 5 4 2 5}$

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3



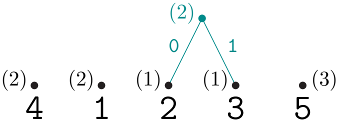
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`

$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

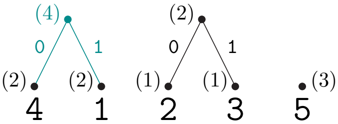


Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`
$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3



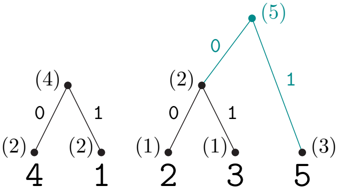
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`

$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

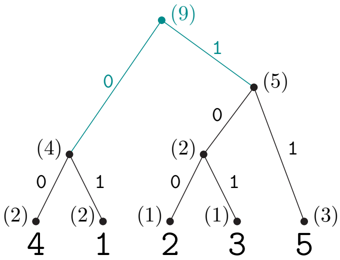


Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`
$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit
1	2
2	1
3	1
4	2
5	3

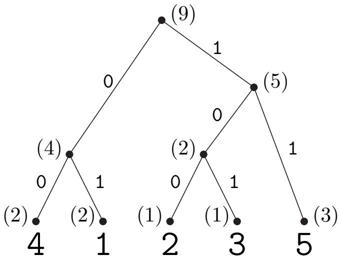


Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`
$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

Symbol	Häufigkeit	Code
1	2	01
2	1	100
3	1	101
4	2	00
5	3	11



Burrows-Wheeler-Transformation

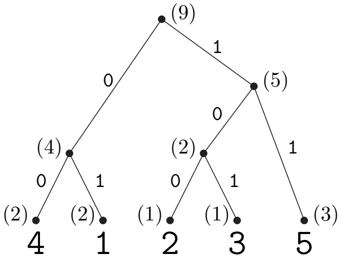
Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`

$R =$ `3 4 1 5 1 5 4 2 5`

`101 00 01 11 01 11 00 100 11` 20 Bits

Symbol	Häufigkeit	Code
1	2	01
2	1	100
3	1	101
4	2	00
5	3	11



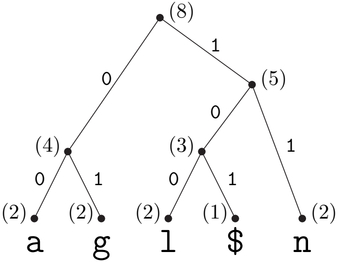
Burrows-Wheeler-Transformation

Kompression: Huffmann Kodierung

$T =$ `l a l a n g n g $`

100 00 100 00 11 01 11 01 101 21 Bits

Symbol	Häufigkeit	Code
$	1	101
a	2	00
g	2	01
l	2	100
n	2	11



Burrows-Wheeler-Transformation

Zusammenfassung

- erzeugt (sinnvolle) Permutation der Eingabe
  (gruppiert Zeichen mit ähnlichem Kontext nahe beieinander)
- keine Zusatzinformation für Rücktransformation nötig
  (alle Informationen in Struktur der Permutation)
- Hin- und Rücktransformation in $\mathcal{O}(n)$
  (einfache Papier-und-Bleistift-Methode existiert auch)
- Vorverarbeitung (statischer) Texte
  (Komprimierung, Indizierung, Suche)

Suche in der Burrows-Wheeler-Transformation

Ferragina &Manzini (2000)

- Index basierend auf der Burrows-Wheeler-Transformation (BWT)
- Vergleich des Musters von rechts nach links
- Zeitkomplexität: $\mathcal{O}(m \log \sigma)$

BWT

- $BWT[i] = \mathcal{T}[SA[i] - 1 \bmod n]$
- Unkomprimierte Größe: $n \log \sigma$ Bits
- Komprimierte Größe: $nH_k(\mathcal{T})$ Bits (+Kontextinformation)

Backward Search

i	$SA[i]$	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	18	a	\$
1	17	r	a\$
2	10	r	abarbara\$
3	7	d	abrabarbara\$
4	0	\$	abracadabrabarbara\$
5	3	r	acadabrabarbara\$
6	5	c	adabrabarbara\$
7	15	b	ara\$
8	12	b	arbara\$
9	14	r	bara\$
10	11	a	barbara\$
11	8	a	brabarbara\$
12	1	a	bracadabrabarbara\$
13	4	a	cadabrabarbara\$
14	6	a	dabrabarbara\$
15	16	a	ra\$
16	9	b	rabarbara\$
17	2	b	racadabrabarbara\$
18	13	a	rbara\$

- $BWT[i] = \mathcal{T}[SA[i]-1]$, for $SA[i] > 0$
- $BWT[i] = \mathcal{T}[n-1]$, for $SA[i] = 0$
- I.e. $BWT[i]$ is the character preceding suffix $SA[i]$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

Array C contains for each $c \in \Sigma$ the position of the first suffix in SA which starts with c:

$	a	b	c	d	r	r+1
0	1	9	13	14	15	19

- Operation $rank(i, X, BWT)$ returns how often character $X \in \Sigma$ occurs in the prefix $BWT[0..i-1]$.
- Example: search for $\mathcal{P} = bar$.

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	\$
1	r	a\$
2	r	abarbara\$
3	d	abrabarbara\$
4	\$	abracadabrabarbara\$
5	r	acadabrabarbara\$
6	c	adabrabarbara\$
7	b	ara\$
8	b	arbara\$
9	r	bara\$
10	a	barbara\$
11	a	brabarbara\$
12	a	bracadabrabarbara\$
13	a	cadabrabarbara\$
14	a	dabrabarbara\$
15	a	ra\$
16	b	rabarbara\$
17	b	racadabrabarbara\$
18	a	rbara\$

C					
\$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for r:
  $sp_1 = C[r] + rank(sp_0, r, BWT)$
  $ep_1 = C[r] + rank(ep_0 + 1, r, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C					
$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for r:
  $sp_1 = 15 + rank(0, r, BWT)$
  $ep_1 = 15 + rank(19, r, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	\$
1	r	a\$
2	r	abarbara\$
3	d	abrabarbara\$
4	\$	abracadabrabarbara\$
5	r	acadabrabarbara\$
6	c	adabrabarbara\$
7	b	ara\$
8	b	arbara\$
9	r	bara\$
10	a	barbara\$
11	a	brabarbara\$
12	a	bracadabrabarbara\$
13	a	cadabrabarbara\$
14	a	dabrabarbara\$
15	a	ra\$
16	b	rabarbara\$
17	b	racadabrabarbara\$
18	a	rbara\$

C					
\$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for r:

  $sp_1 = 15+0$

  $ep_1 = 15+rank(19, r, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Initial interval: $[sp_0, ep_0] = [0..n-1]$
- Determine interval for *r*:
  $sp_1 = 15+0 = 15$
  $ep_1 = 15+4-1 = 18$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	\$
1	r	a\$
2	r	abarbara\$
3	d	abrabarbara\$
4	\$	abracadabrabarbara\$
5	r	acadabrabarbara\$
6	c	adabrabarbara\$
7	b	ara\$
8	b	arbara\$
9	r	bara\$
10	a	barbara\$
11	a	brabarbara\$
12	a	bracadabrabarbara\$
13	a	cadabrabarbara\$
14	a	dabrabarbara\$
15	a	ra\$
16	b	rabarbara\$
17	b	racadabrabarbara\$
18	a	rbara\$

C					
\$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = C[a] + rank(sp_1, a, BWT)$
  $ep_2 = C[a] + rank(ep_1 + 1, a, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = 1 + rank(15, a, BWT)$
  $ep_2 = 1 + rank(ep_1, a, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:

$$sp_2 = 1 + rank(15, a, BWT)$$

$$ep_2 = 1 + rank(ep_1, a, BWT)$$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	\$
1	r	a\$
2	r	abarbara\$
3	d	abrabarbara\$
4	\$	abracadabrabarbara\$
5	r	acadabrabarbara\$
6	c	adabrabarbara\$
7	b	ara\$
8	b	arbara\$
9	r	bara\$
10	a	barbara\$
11	a	brabarbara\$
12	a	bracadabrabarbara\$
13	a	cadabrabarbara\$
14	a	dabrabarbara\$
15	a	ra\$
16	b	rabarbara\$
17	b	racadabrabarbara\$
18	a	rbara\$

C					
\$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:

  $sp_2 = 1 + 6$

  $ep_2 = 1 + rank(19, a, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C					
$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_1, ep_1] = [15..18]$
- Determine interval for *ar*:
  $sp_2 = 1+6 = 7$
  $ep_2 = 1+8-1 = 8$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = C[b] + rank(sp_2, b, BWT)$
  $ep_3 = C[b] + rank(ep_2 + 1, b, BWT) - 1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9 + rank(7, b, BWT)$
  $ep_3 = 9 + rank(ep_1, b, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	$
1	r	a$
2	r	abarbara$
3	d	abrabarbara$
4	$	abracadabrabarbara$
5	r	acadabrabarbara$
6	c	adabrabarbara$
7	b	ara$
8	b	arbara$
9	r	bara$
10	a	barbara$
11	a	brabarbara$
12	a	bracadabrabarbara$
13	a	cadabrabarbara$
14	a	dabrabarbara$
15	a	ra$
16	b	rabarbara$
17	b	racadabrabarbara$
18	a	rbara$

C

$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9 + rank(7, b, BWT)$
  $ep_3 = 9 + rank(ep_1, b, BWT)$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	\$
1	r	a\$
2	r	abarbara\$
3	d	abrabarbara\$
4	\$	abracadabrabarbara\$
5	r	acadabrabarbara\$
6	c	adabrabarbara\$
7	b	ara\$
8	b	arbara\$
9	r	bara\$
10	a	barbara\$
11	a	brabarbara\$
12	a	bracadabrabarbara\$
13	a	cadabrabarbara\$
14	a	dabrabarbara\$
15	a	ra\$
16	b	rabarbara\$
17	b	racadabrabarbara\$
18	a	rbara\$

C

\$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9+0$
  $ep_3 = 9+rank(9, b, BWT)-1$

Backward Search

i	BWT	$\mathcal{T}[SA[i]..n-1]$
0	a	\$
1	r	a\$
2	r	abarbara\$
3	d	abrabarbara\$
4	\$	abracadabrabarbara\$
5	r	acadabrabarbara\$
6	c	adabrabarbara\$
7	b	ara\$
8	b	arbara\$
9	r	bara\$
10	a	barbara\$
11	a	brabarbara\$
12	a	bracadabrabarbara\$
13	a	cadabrabarbara\$
14	a	dabrabarbara\$
15	a	ra\$
16	b	rabarbara\$
17	b	racadabrabarbara\$
18	a	rbara\$

C					
\$	a	b	c	d	r
0	1	9	13	14	15

- Search backwards for *bar*.
- Interval: $[sp_2, ep_2] = [7..8]$
- Determine interval for *bar*:
  $sp_3 = 9+0 = 9$
  $ep_3 = 9+2-1 = 10$

Backward Search

Summary

- Only C and a data structure R supporting the *rank* operation on *BWT* are required for existence and count queries.
- Space: $\sigma \log n$ bits for C + space for R
- Time: $\mathcal{O}(m \cdot t_{rank})$, where t_{rank} is time for one rank operation. Independent from n?
- Next: How to implement *rank*?

Rank operation

- Constant time and $o(n)$ extra space solution on bitvectors (Jacobson 1989)
- Solution on general sequences: Wavelet Tree (Grossi & Vitter 2003)

Backward Search

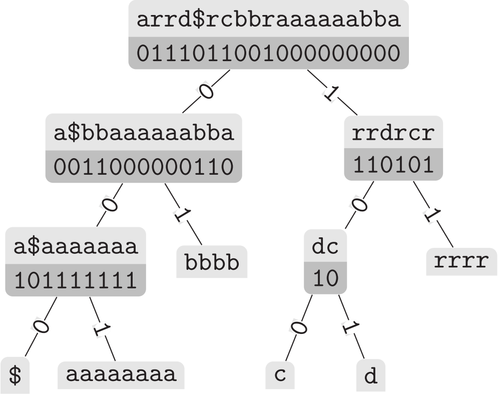
Summary

- Only C and a data structure R supporting the *rank* operation on *BWT* are required for existence and count queries.
- Space: $\sigma \log n$ bits for C + space for R
- Time: $\mathcal{O}(m \cdot t_{rank})$, where t_{rank} is time for one rank operation. Independent from n? If t_{rank} is independent from n
- Next: How to implement *rank*?

Rank operation

- Constant time and $o(n)$ extra space solution on bitvectors (Jacobson 1989)
- Solution on general sequences: Wavelet Tree (Grossi & Vitter 2003)

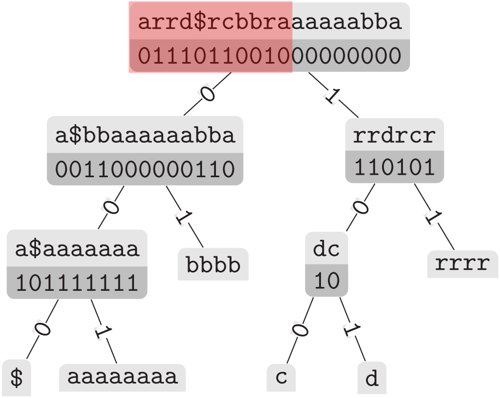
Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_\epsilon) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$

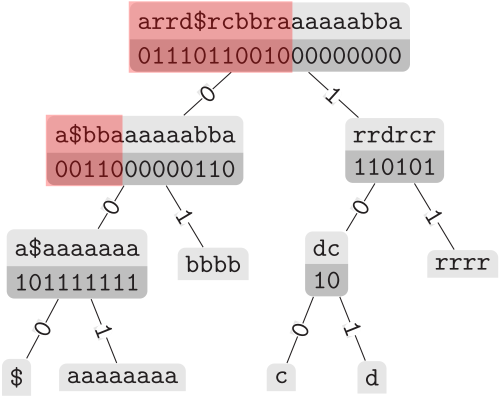
Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_\epsilon) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$$

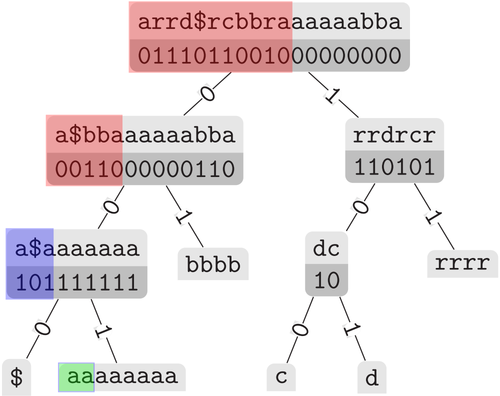
Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_{\epsilon}) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$$

Wavelet Tree Example: Calculate Rank



a = 001

$$rank(11, a, WT) = rank(rank(rank(11, 0, b_\epsilon) = 5, 0, b_0) = 3, 1, b_{00}) = 2$$