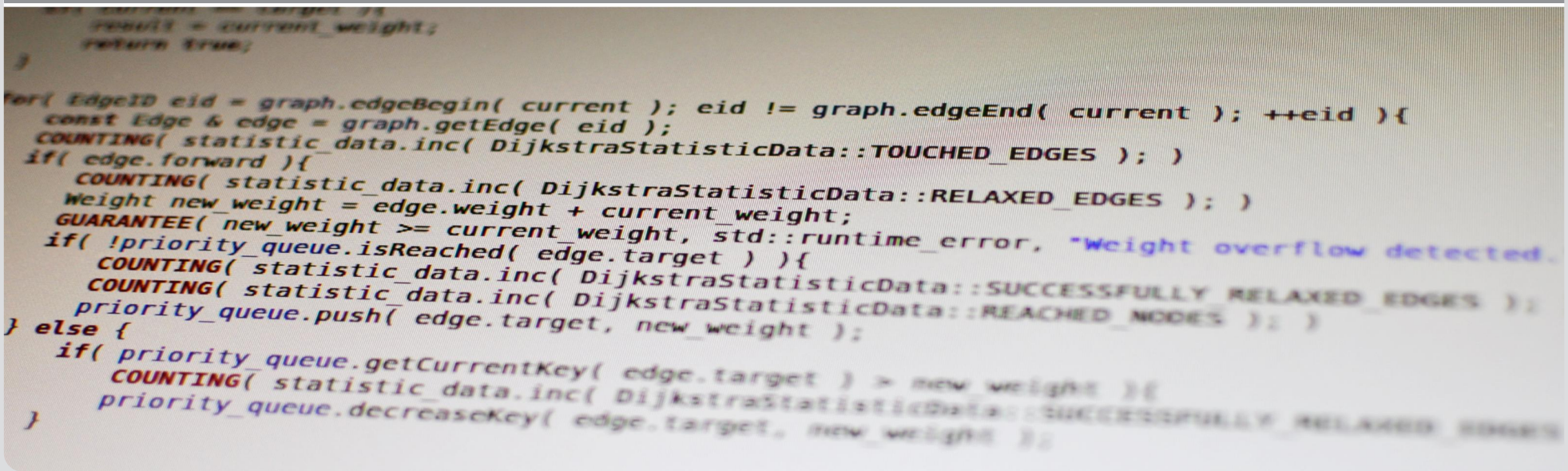
Karlsruher Institut für Technologie

Übung 10 – Algorithmen II

Tobias Heuer, Sebastian Lamm – *tobias.heuer@kit.edu, lamm@kit.edu*

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS19.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II



Organisatorisches

Klausurtermin

Fr 20.03.2020 11:00 Uhr
Hörsaaleinteilung wird rechtzeitig bekannt gegeben

Klausuranmeldung

Vorraussichtlich bis eine Woche vor Klausurtermin
($\approx$ 13.03.2020)

Evaluation der Übung

Freiwillige?

Themenübersicht

- *in-place Multikey Quicksort*
  (Sortierung von Zeichenketten *in-place*)

- Suche mit Hilfe von Suffix-Arrays
  - Wiederholung aus Vorlesung
  - Beschleunigung mittels LCP-Array

in-place Multikey Quicksort

Wiederholung

Bentley, Sedgewick (1997)

(*Three-way Radix Quicksort*)

- sortiert Elemente mit mehreren Schlüsseln wie msd-*Radixsort*
  $\rightarrow$ z.B. Stellen einer Zahl, Zeichen eines Strings

- für einen Schlüssel wird *Quicksort* mit drei Fällen ausgeführt
  $\rightarrow$ kleiner als, gleich, größer als das Pivotelement

- Partitionierungschritt kann *in-place* erfolgen
  $\rightarrow$ ähnlich wie bei normalem *Quicksort*

in-place Multikey Quicksort

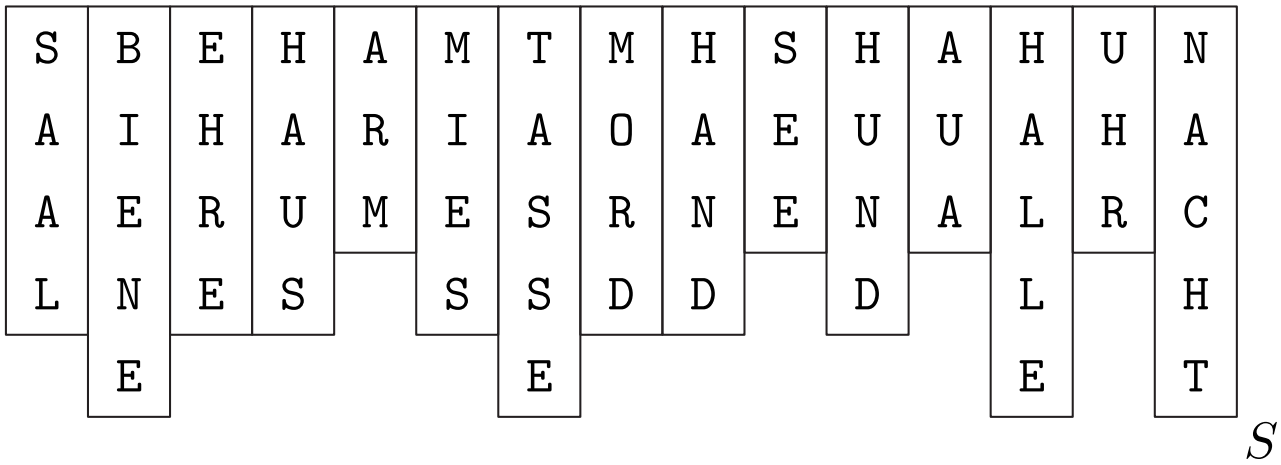
Ablauf

Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)

in-place Multikey Quicksort

Ablauf

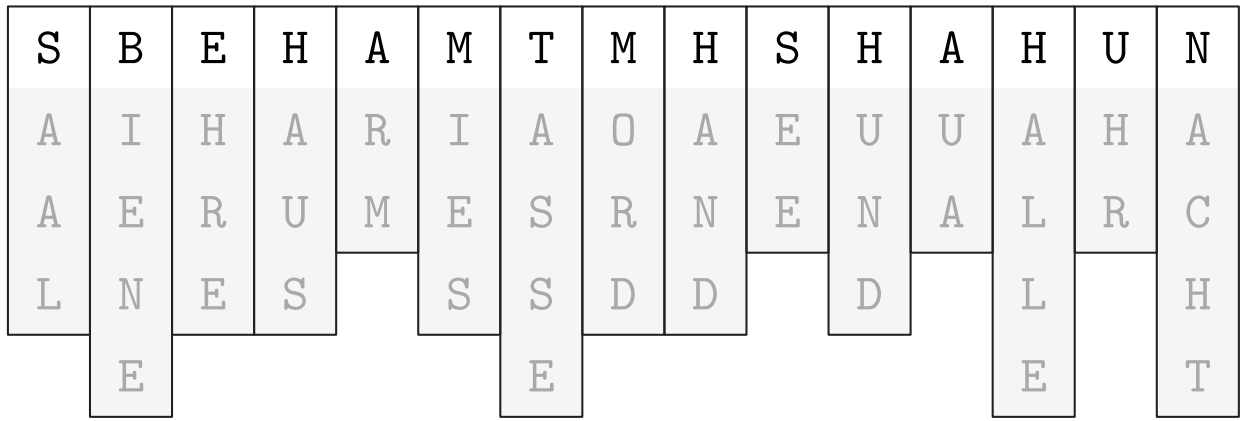
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

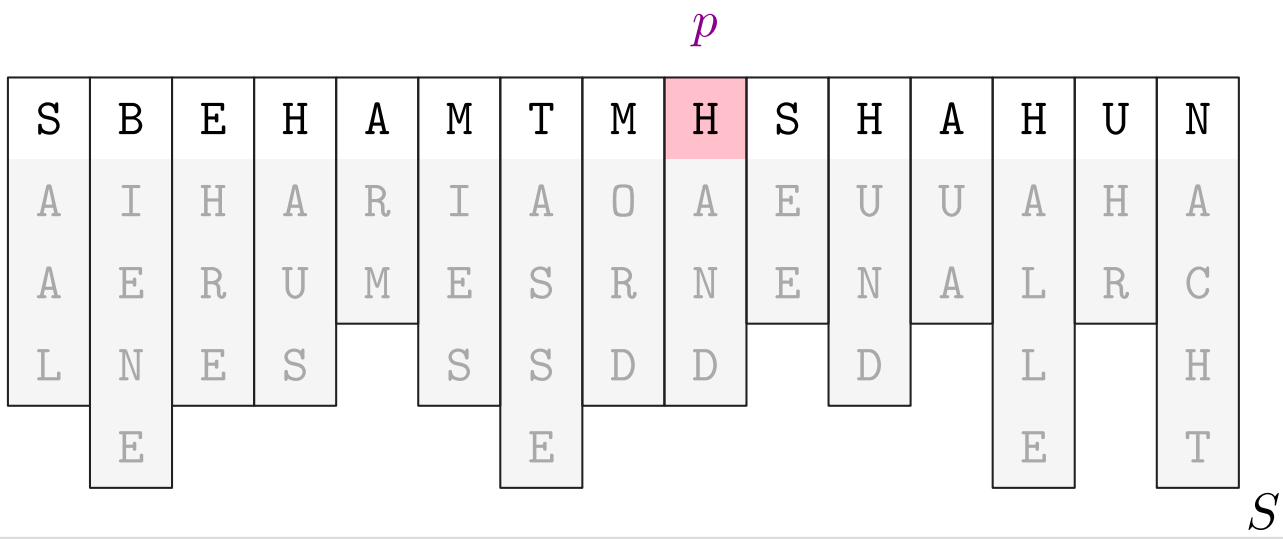
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

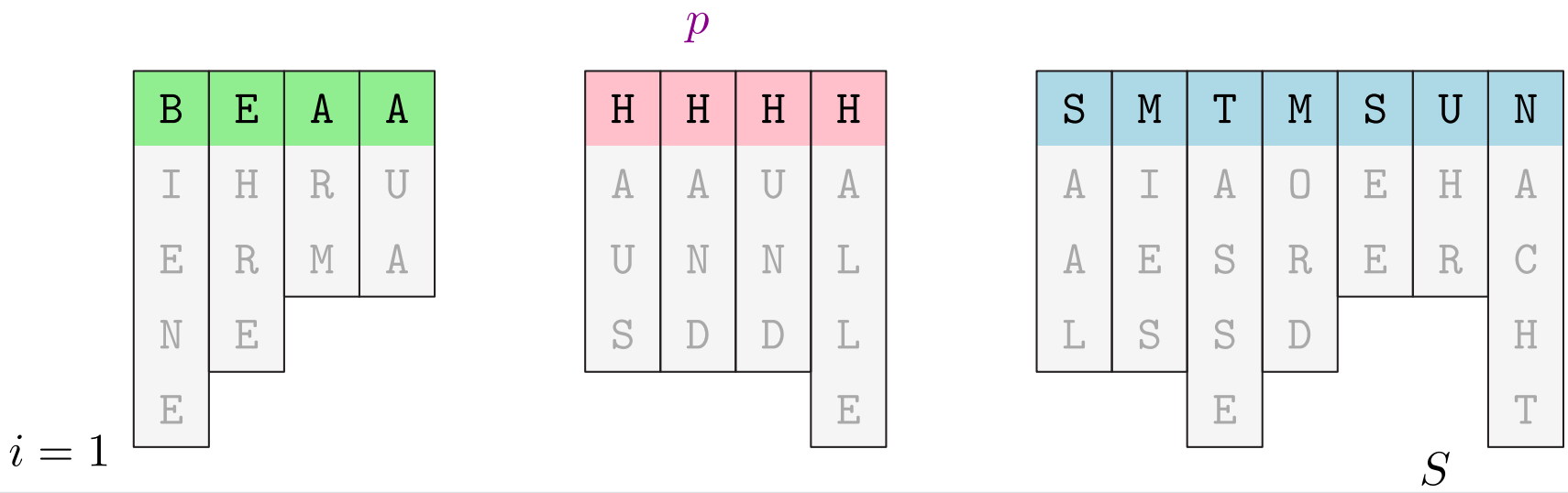
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

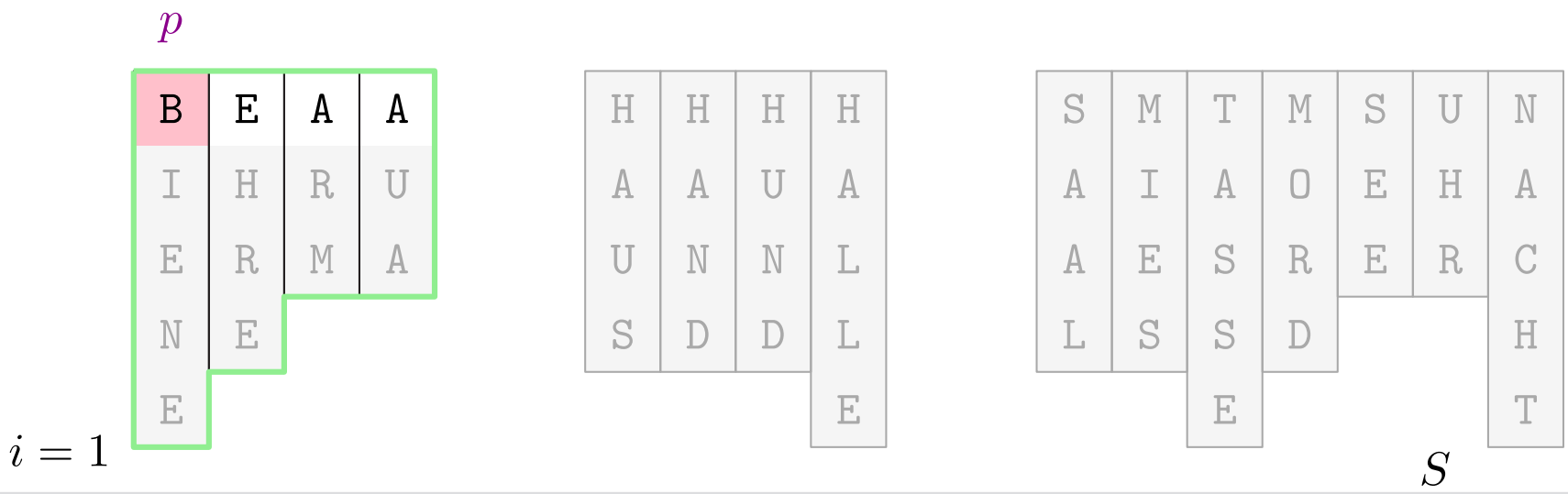
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

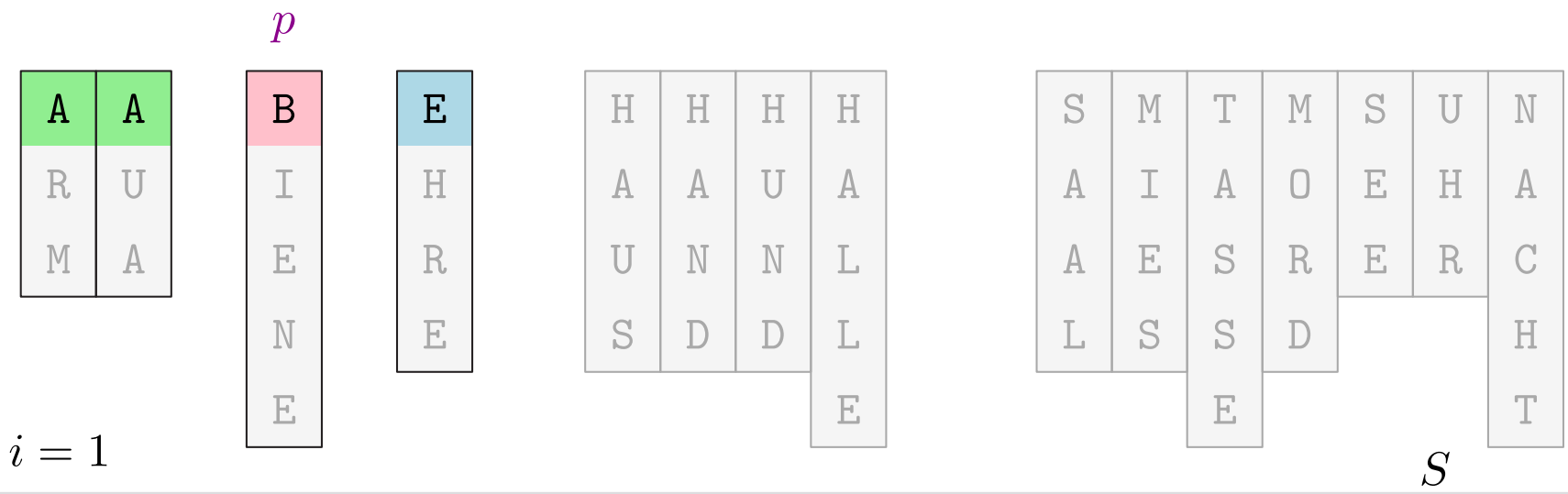
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

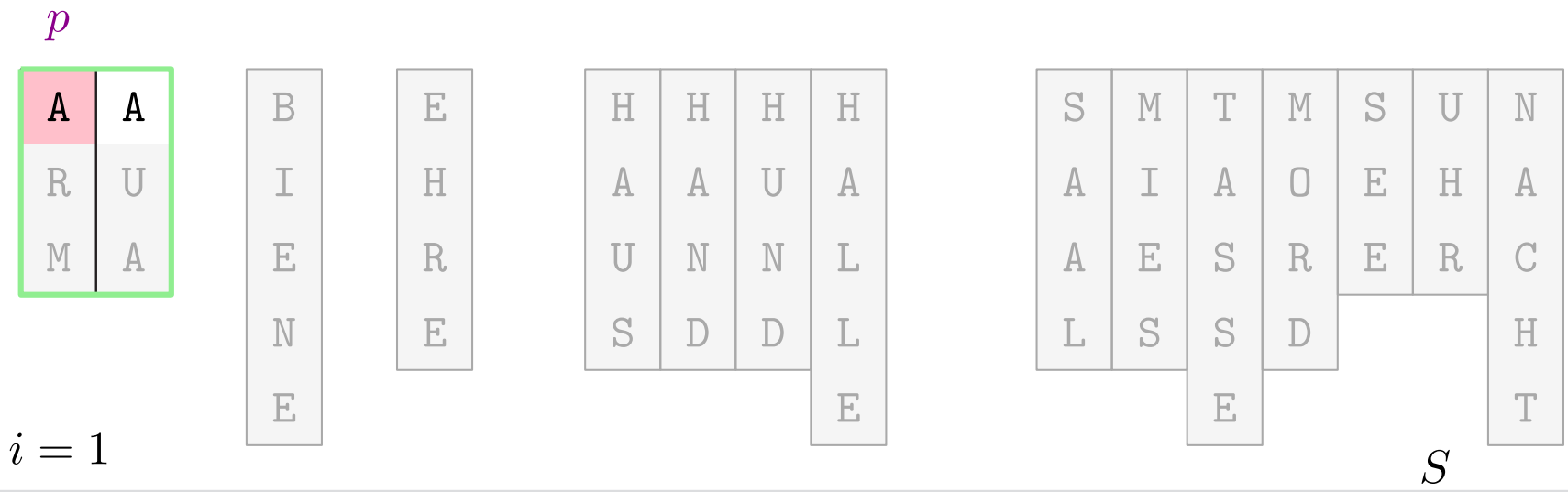
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

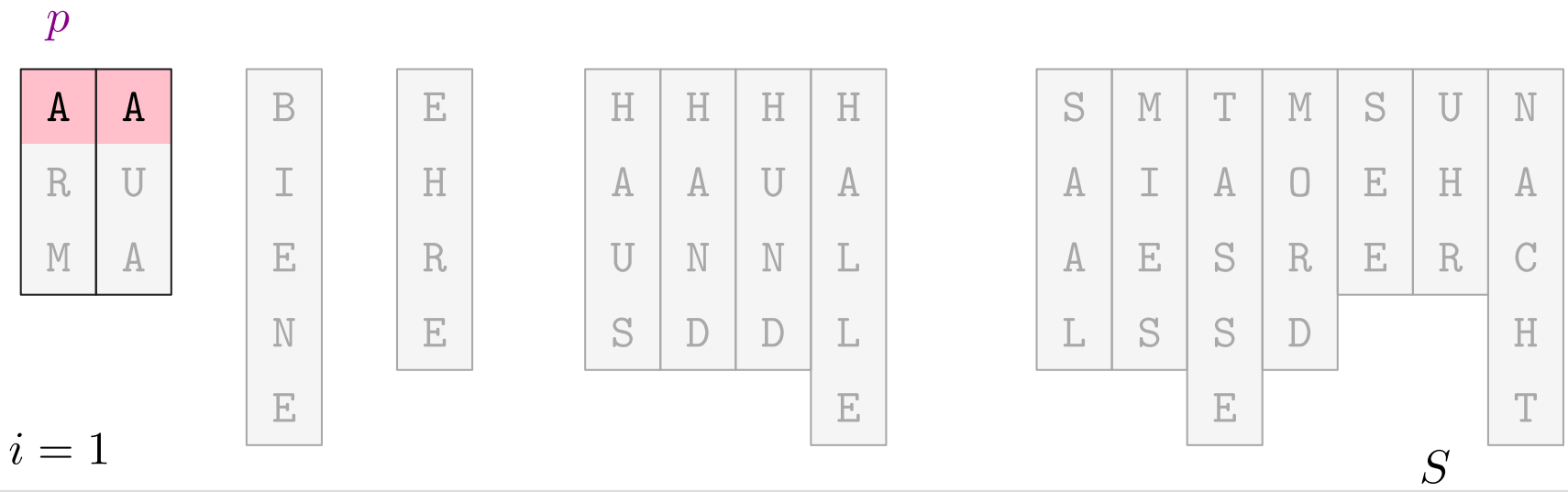
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

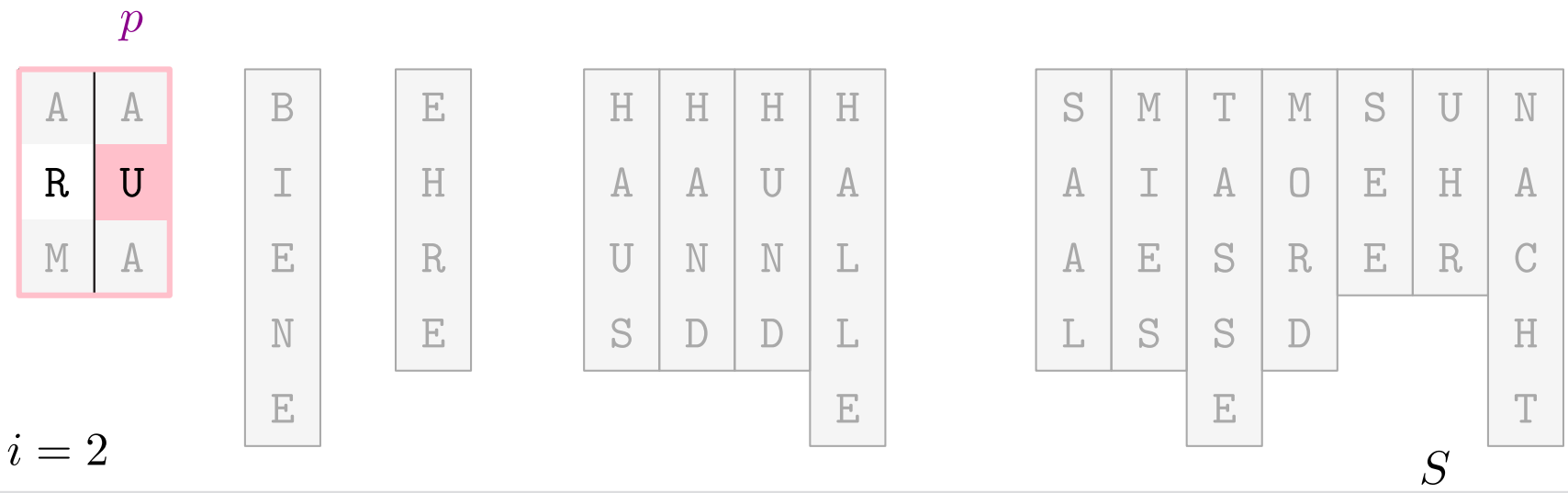
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

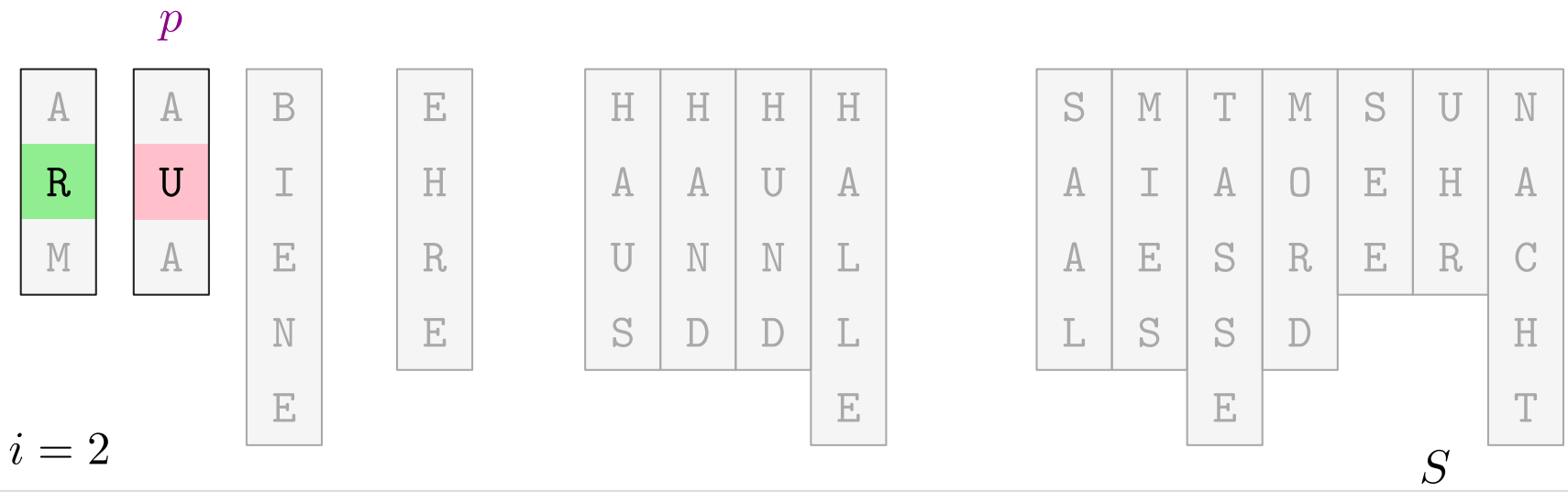
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

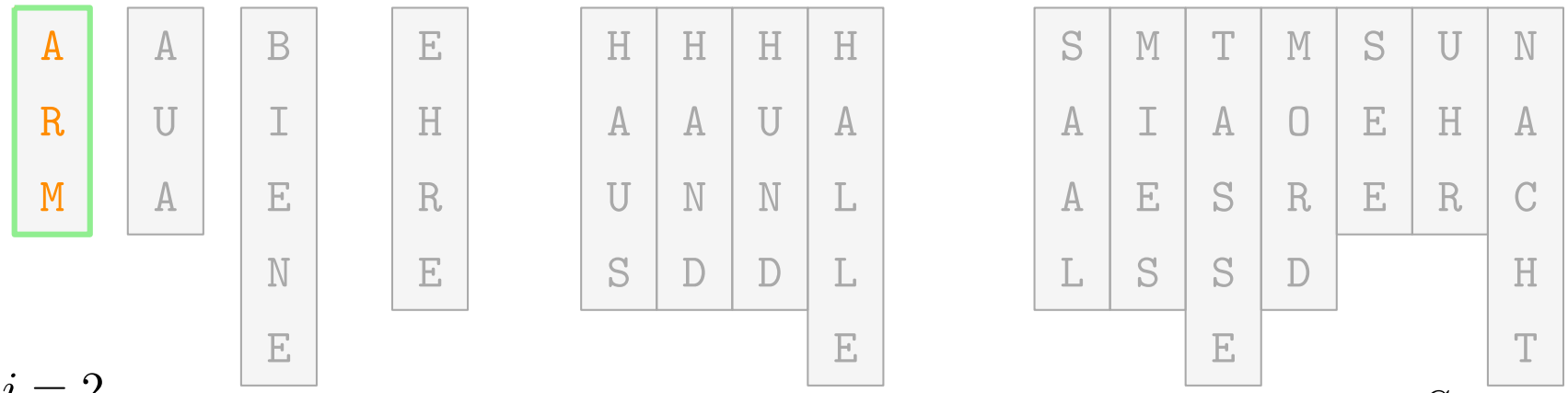
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

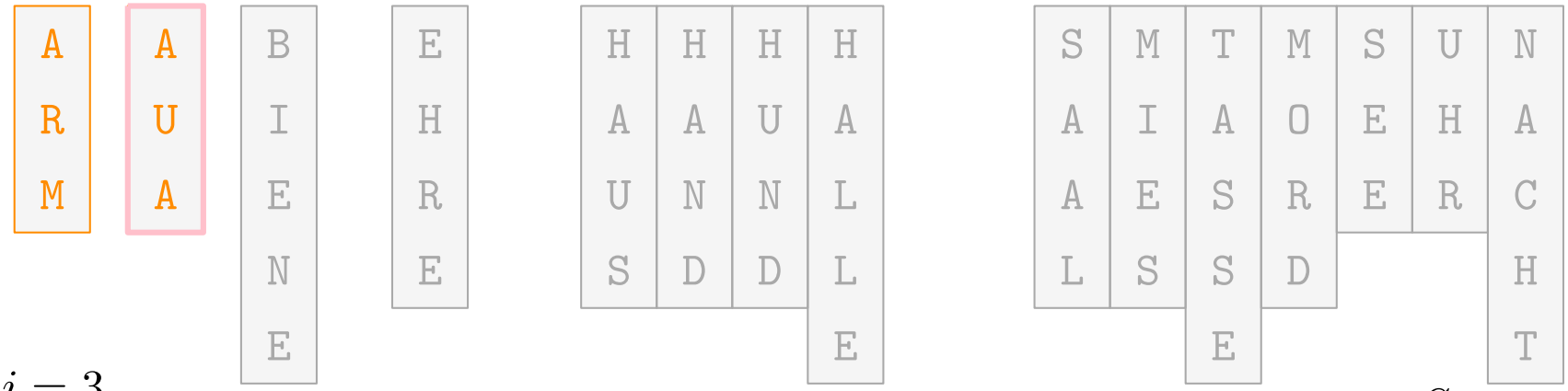
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

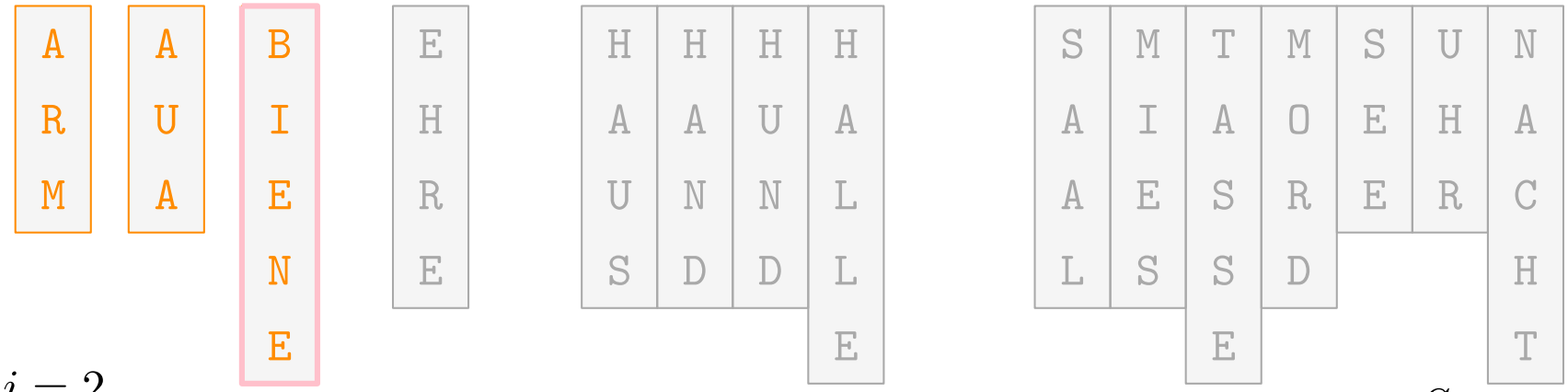
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

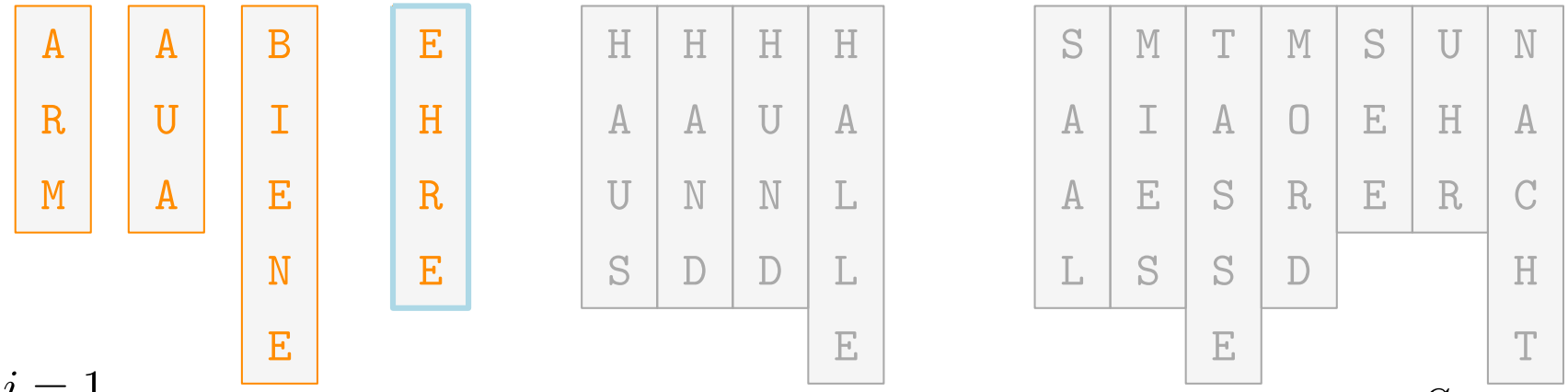
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

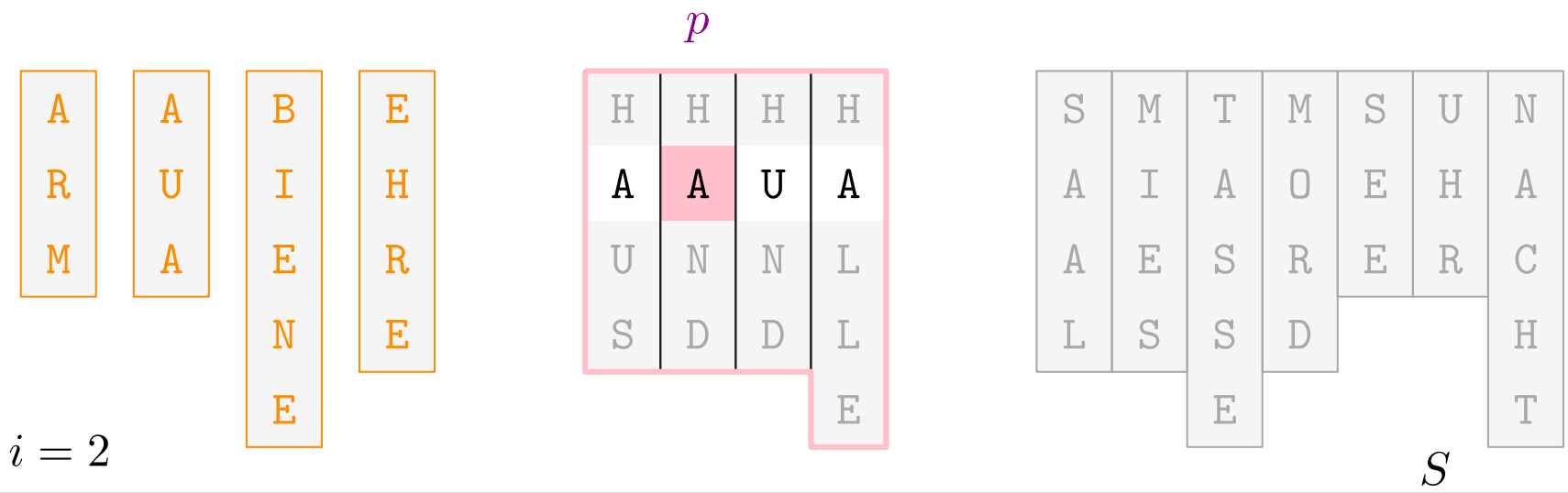
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

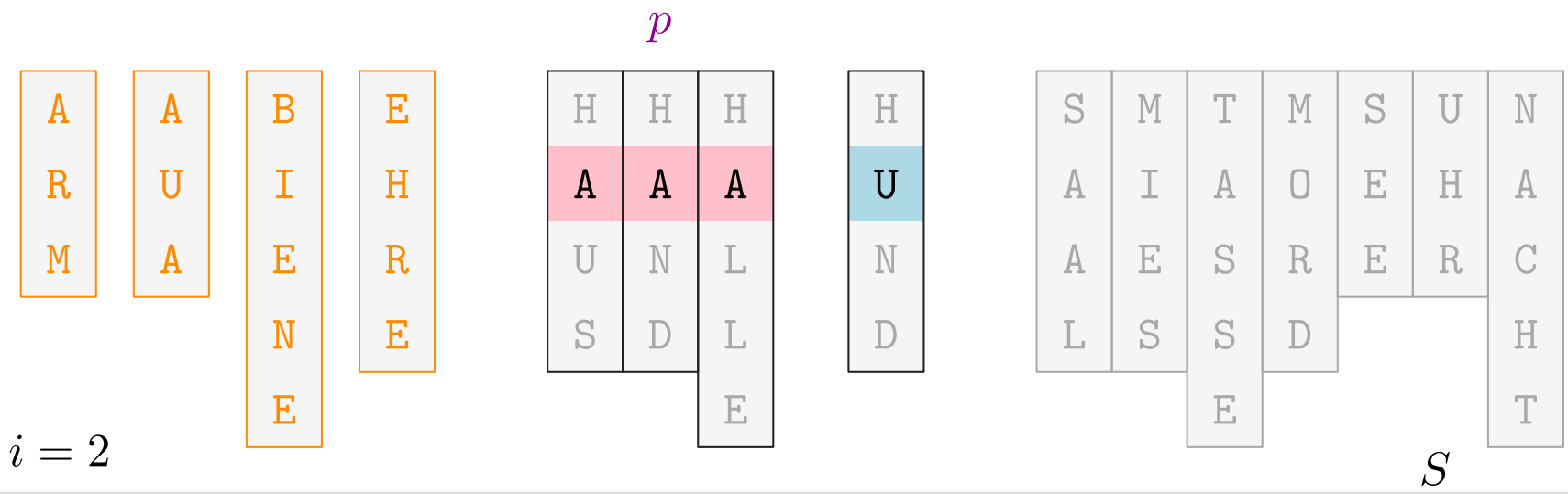
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

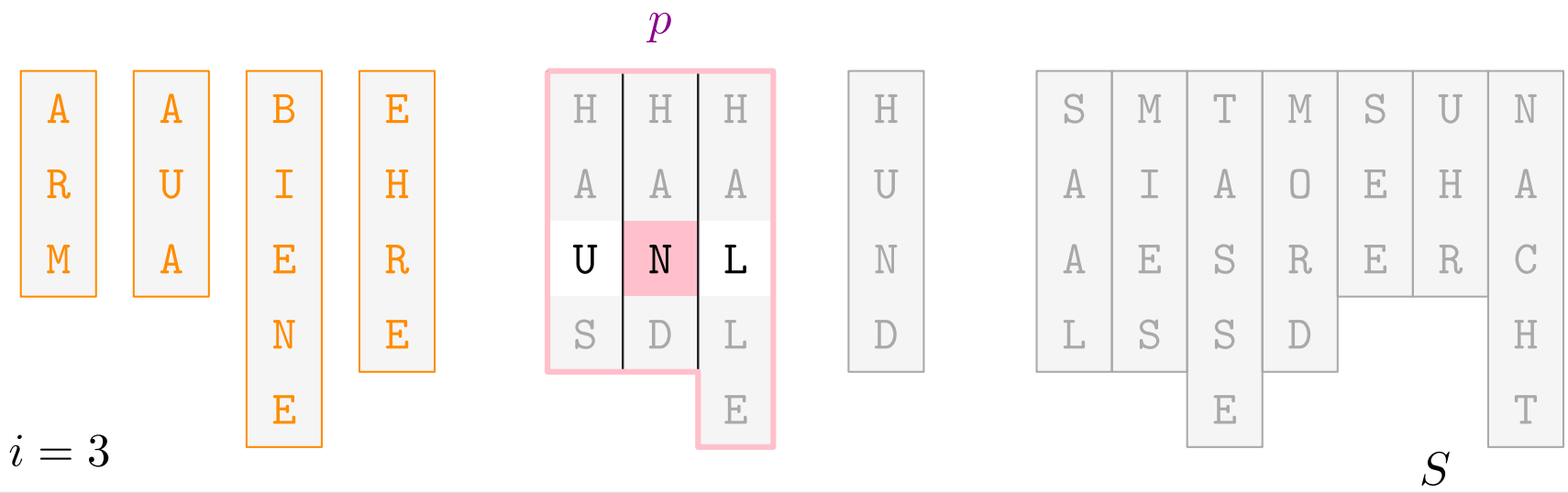
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

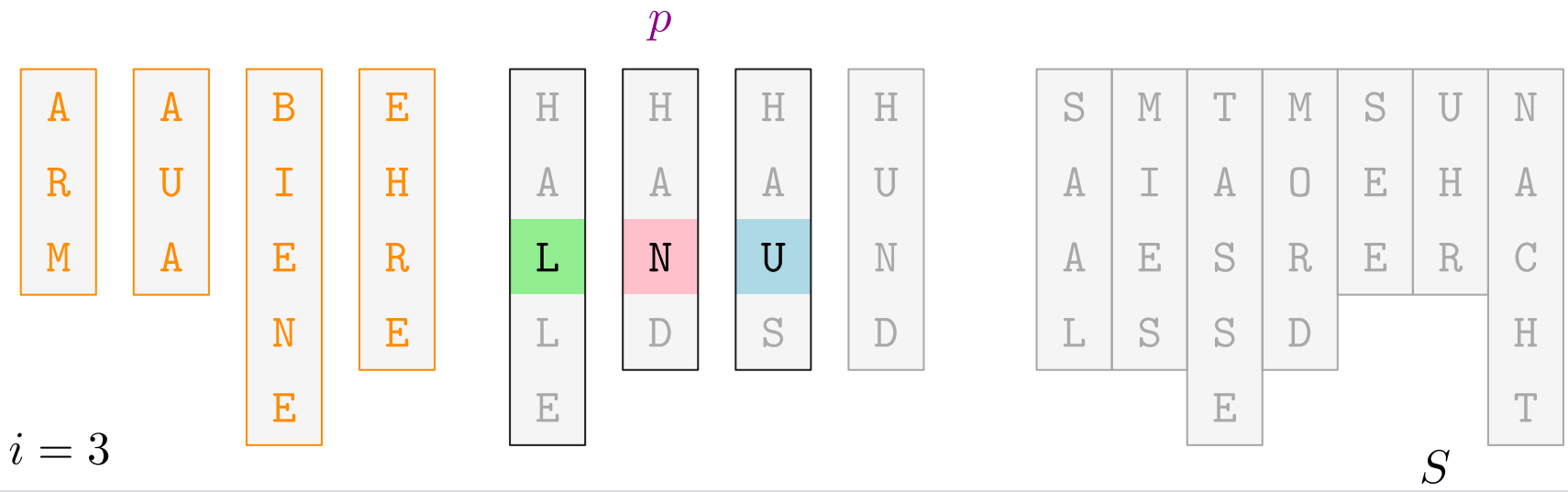
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

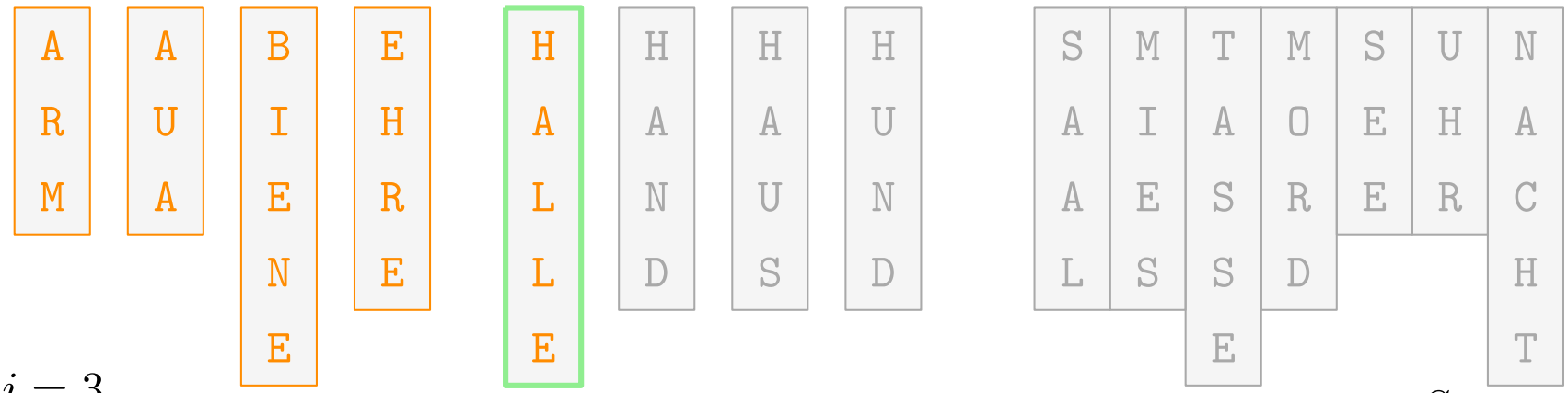
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

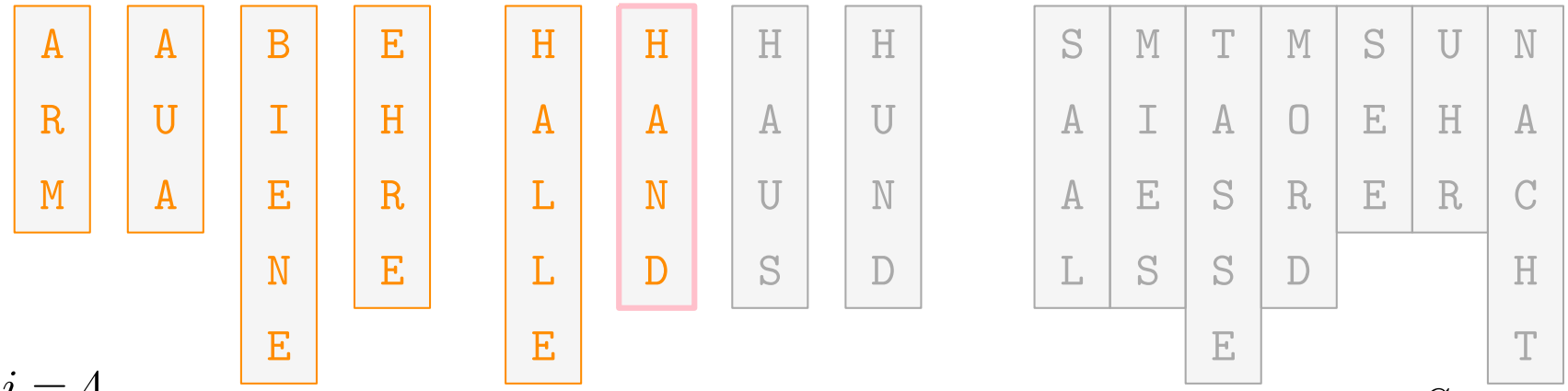
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

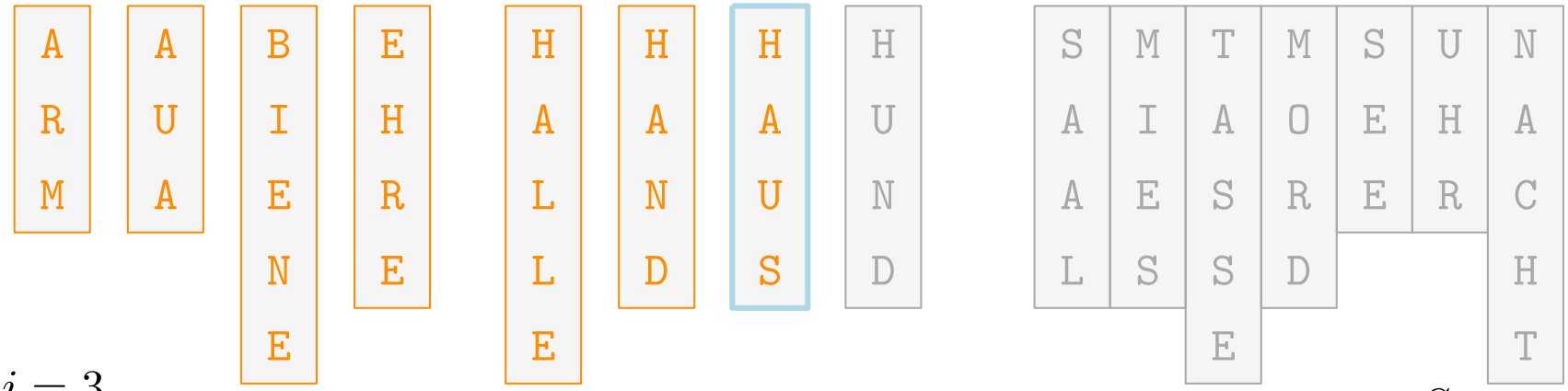
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

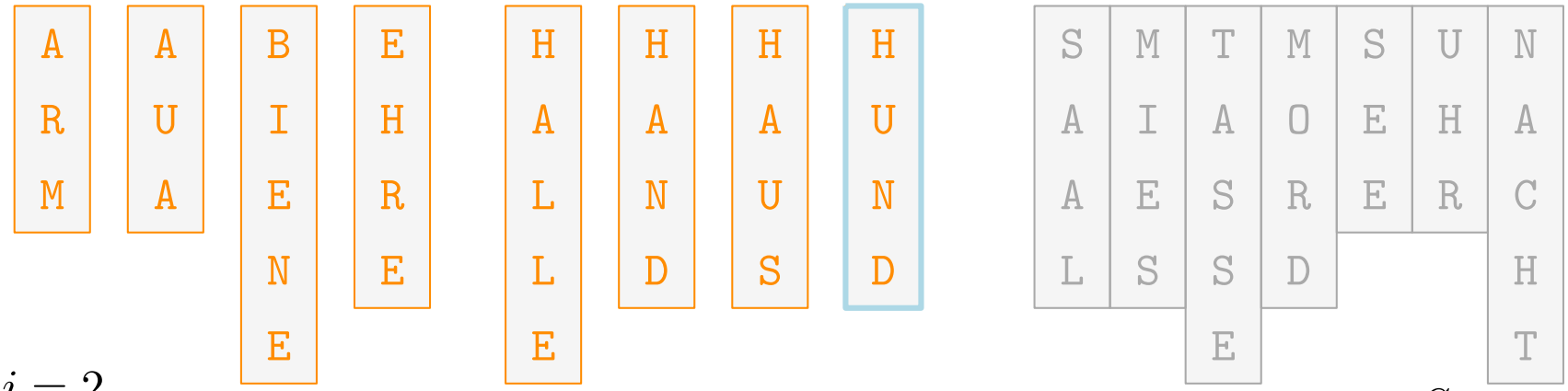
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

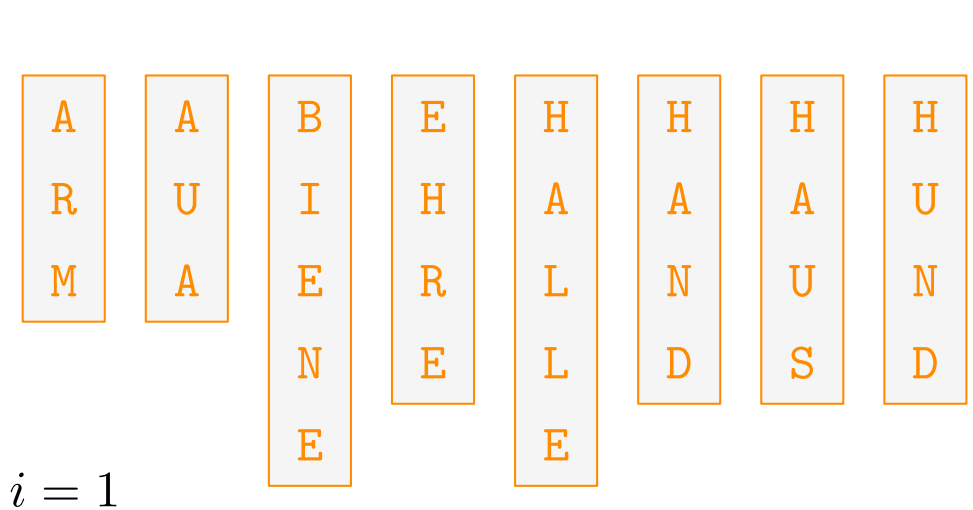
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)

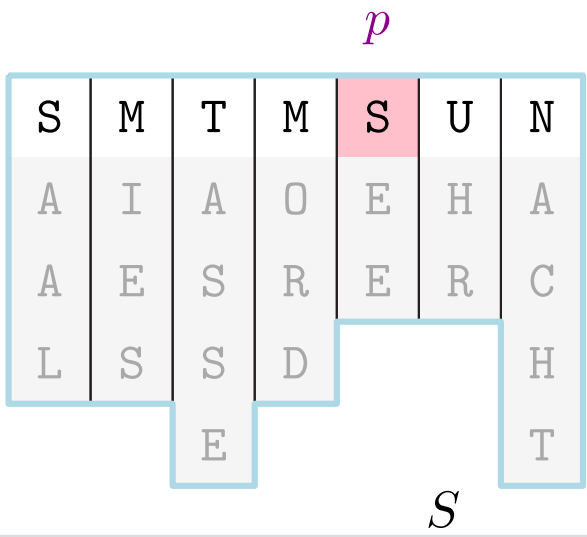


in-place Multikey Quicksort

Ablauf

Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)

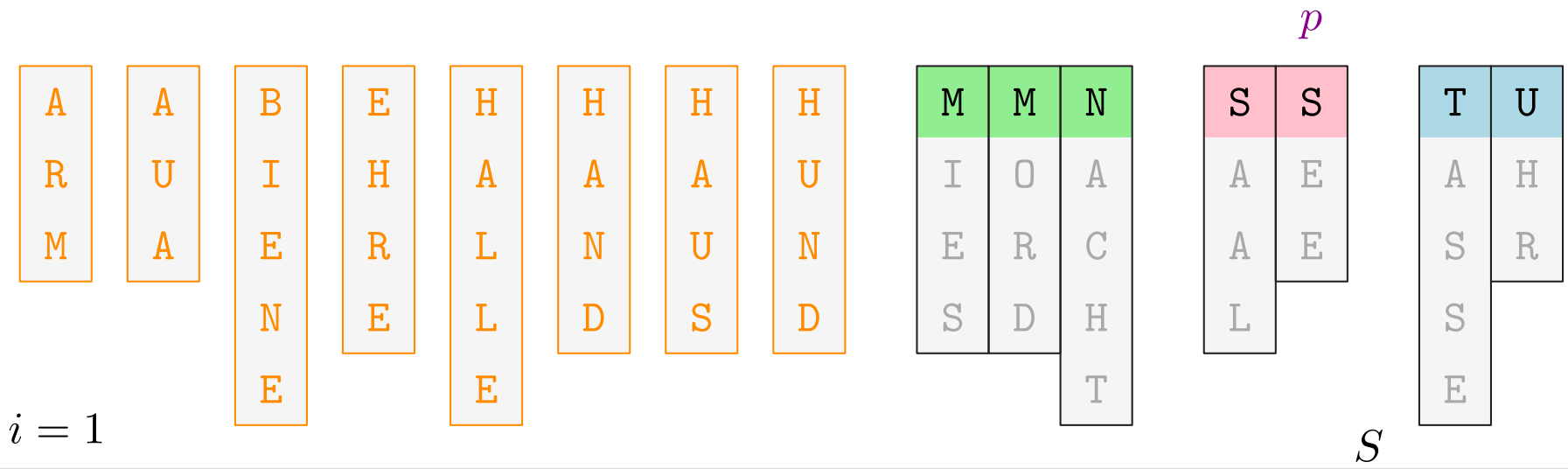




in-place Multikey Quicksort

Ablauf

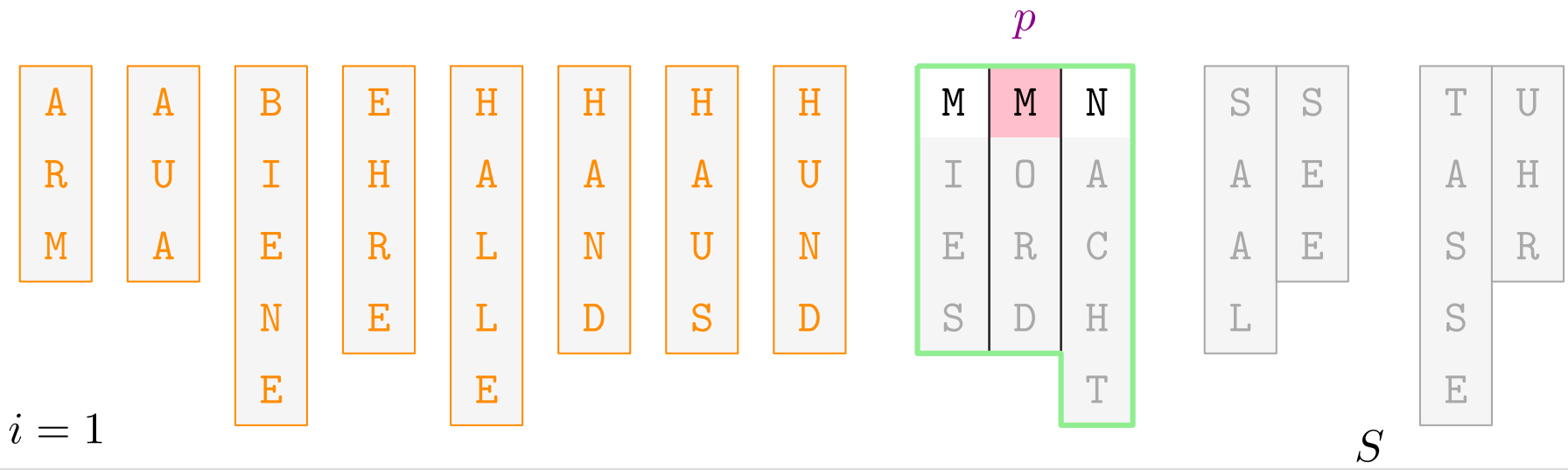
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

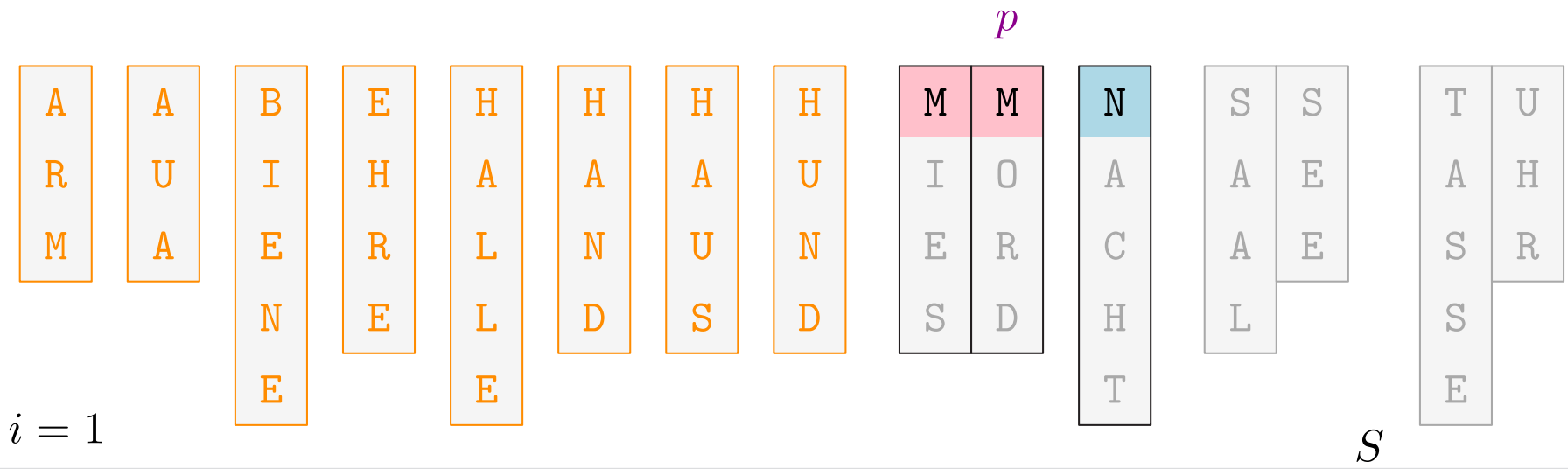
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i + 1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

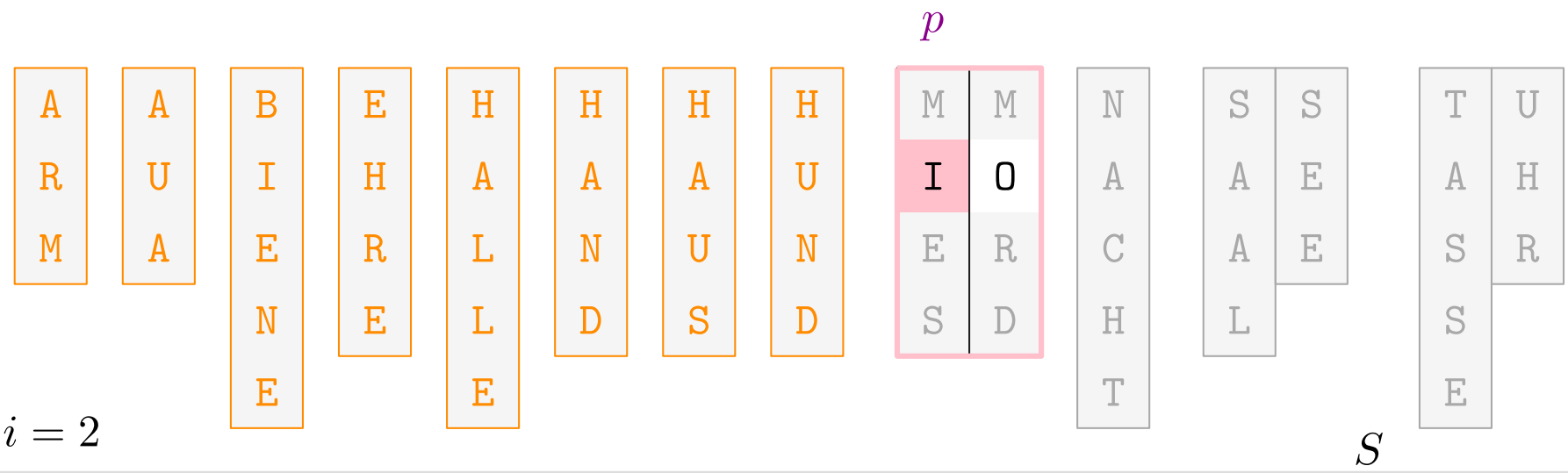
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

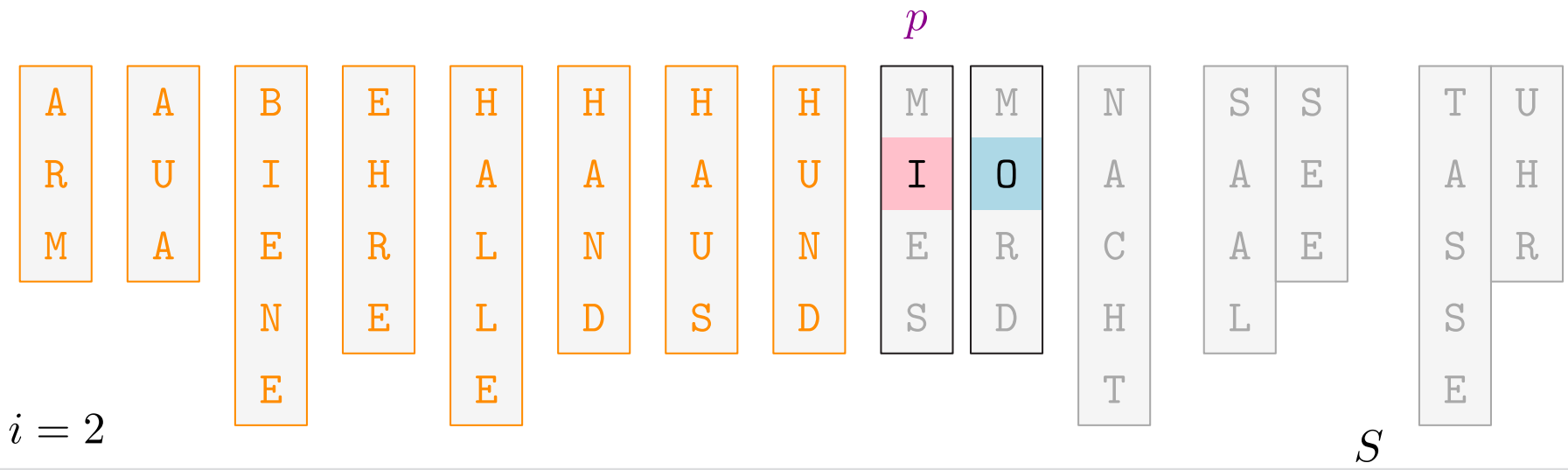
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

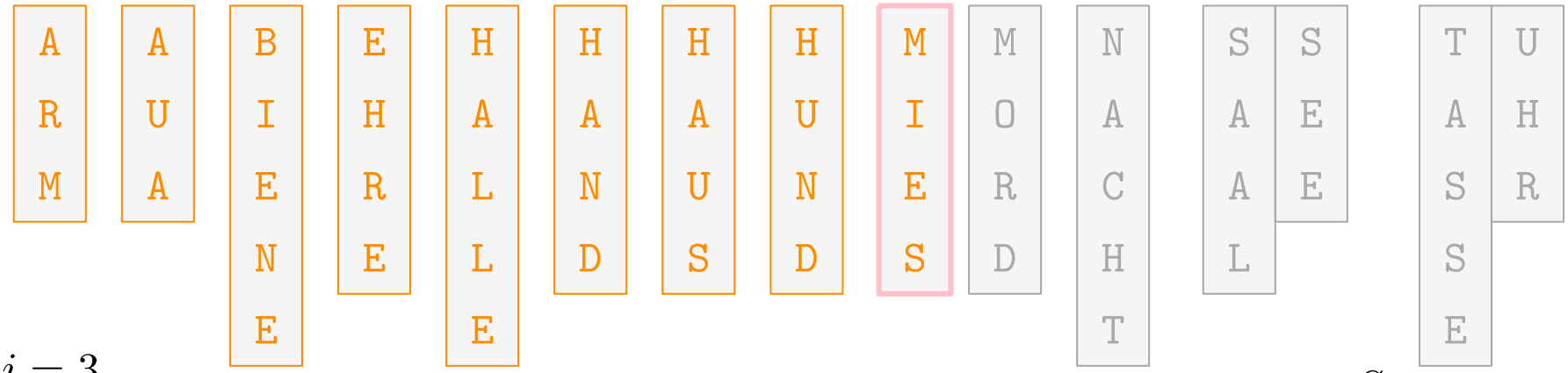
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

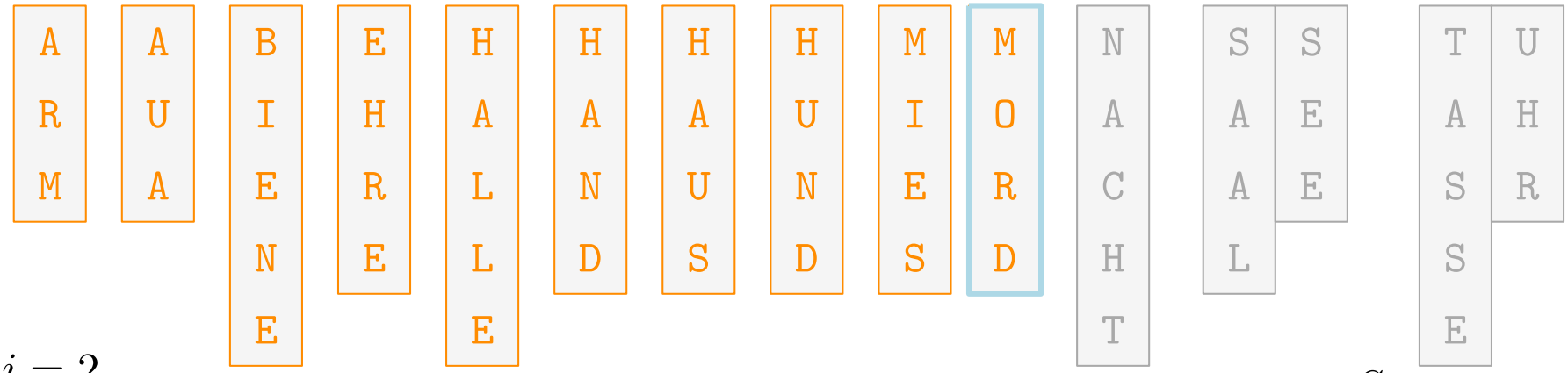
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

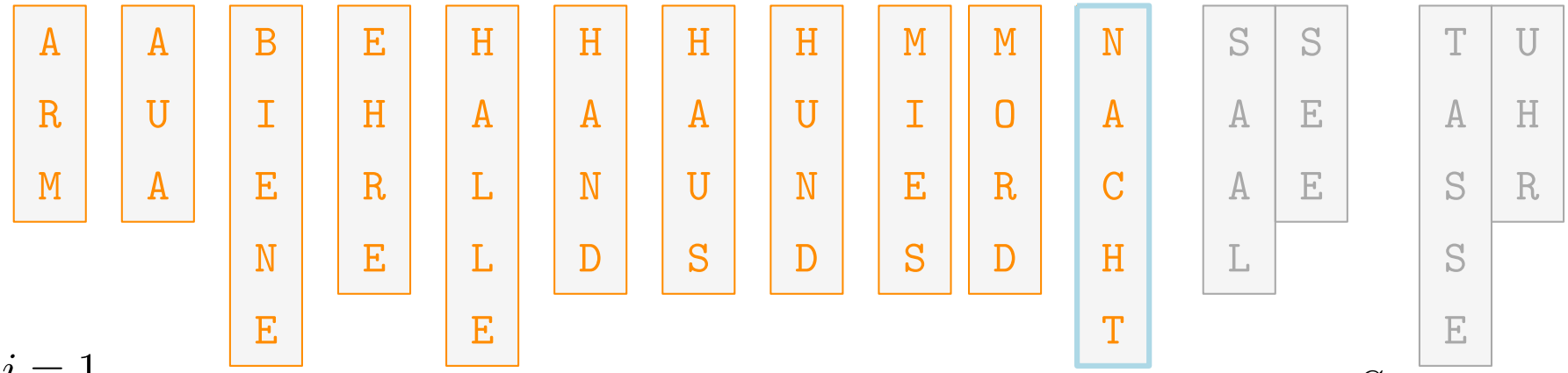
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

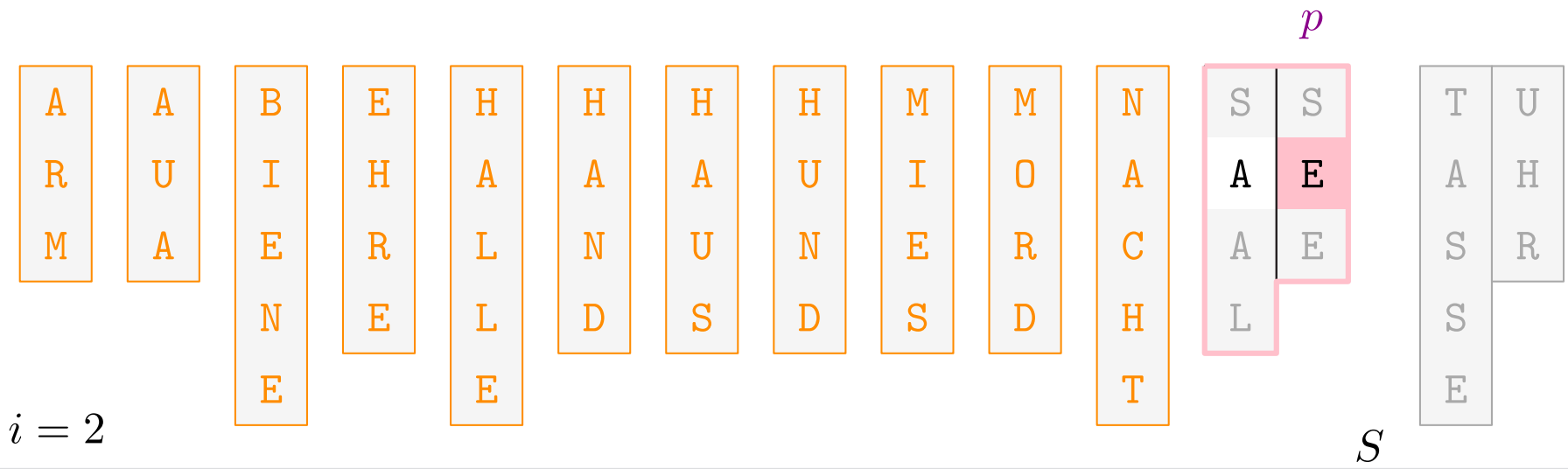
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

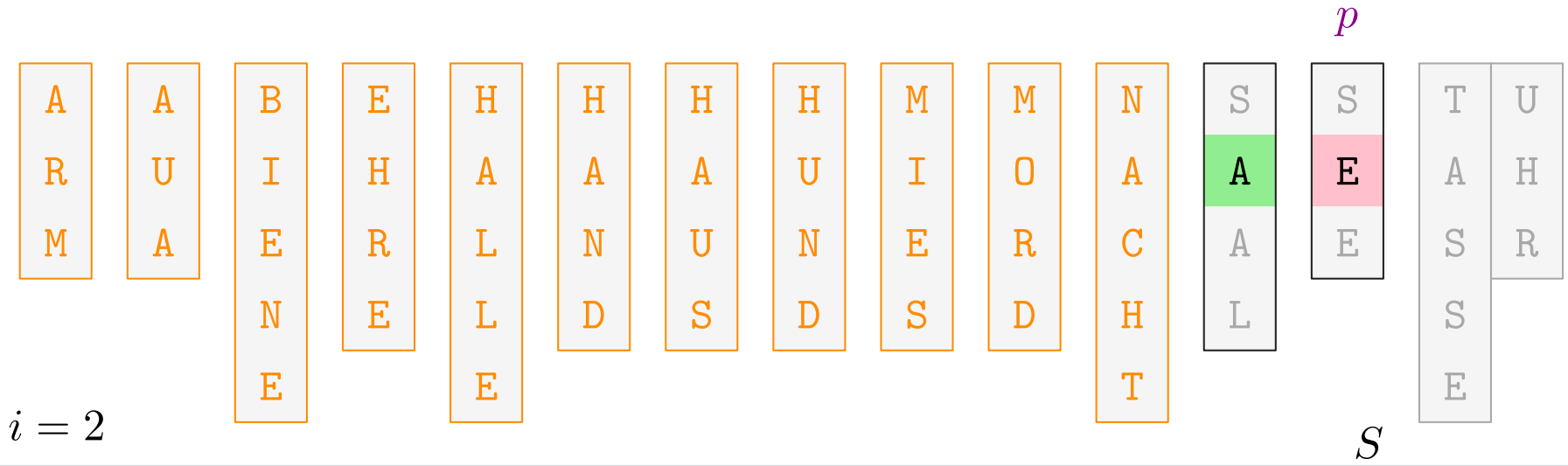
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i + 1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

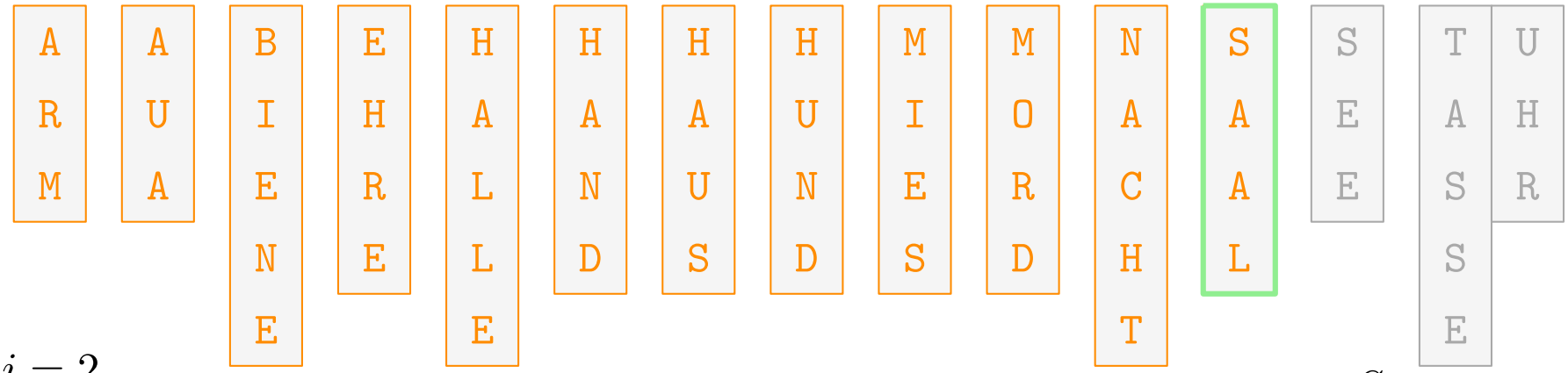
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

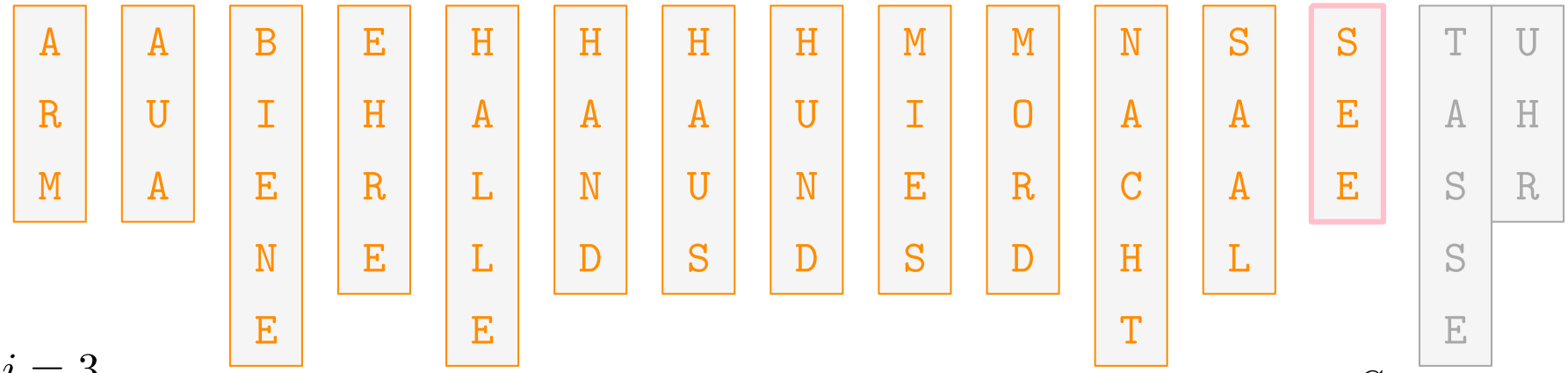
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

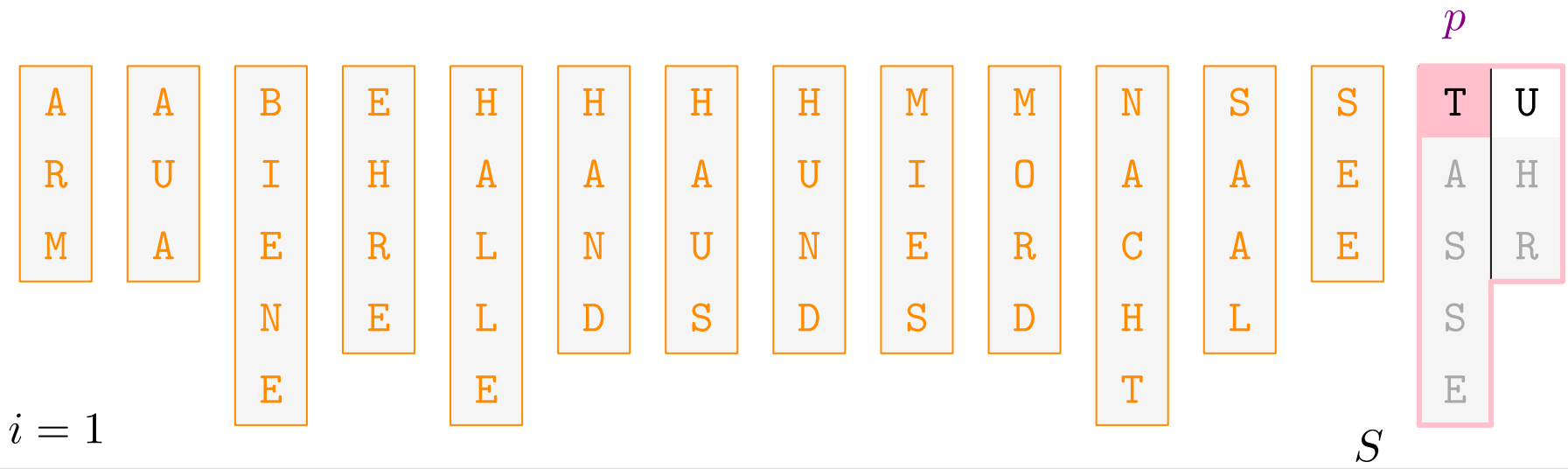
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

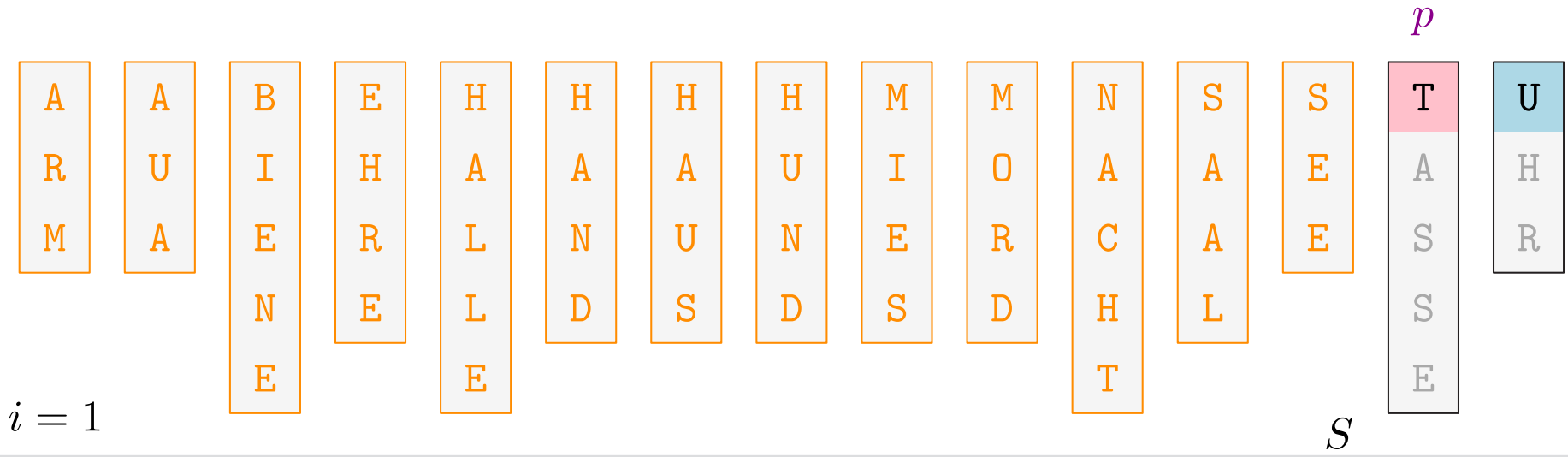
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

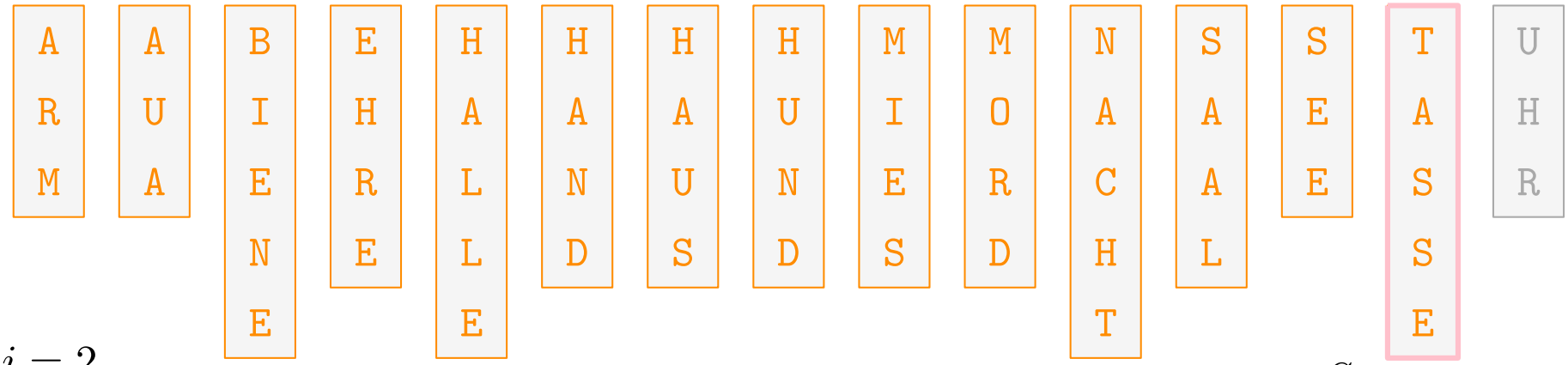
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

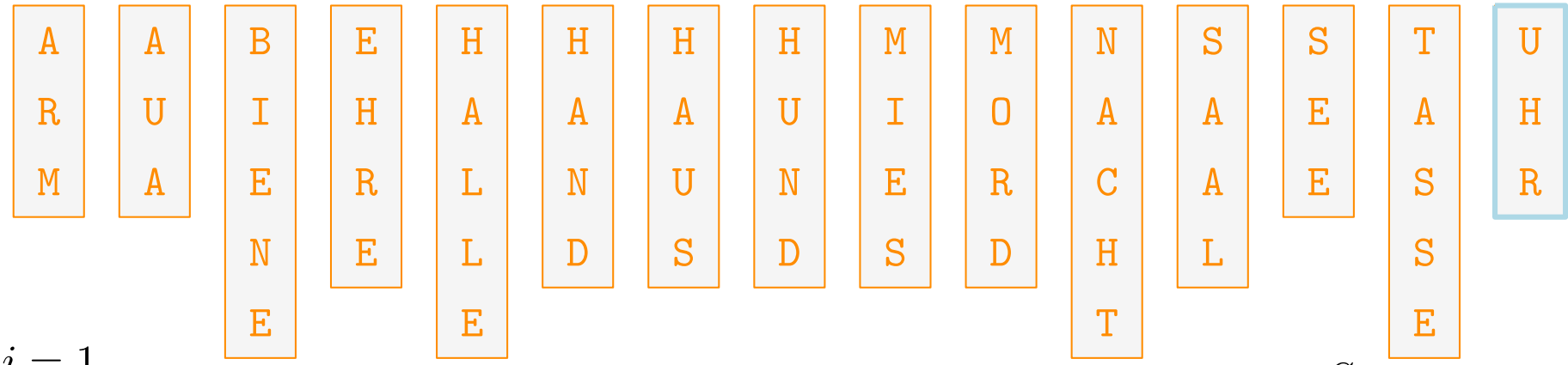
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

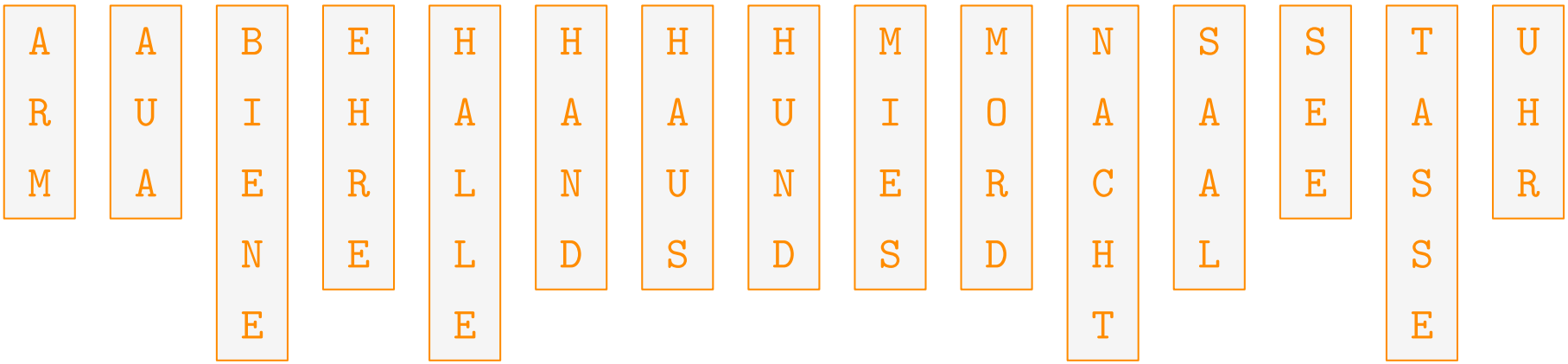
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

Ablauf

Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S (Basisfall)
  choose $p \in S$ uniformly at random (Pivotelement)
  return concatenation of (Rekursion)
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)

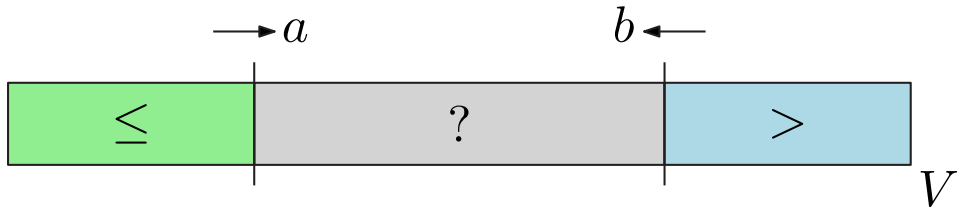


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

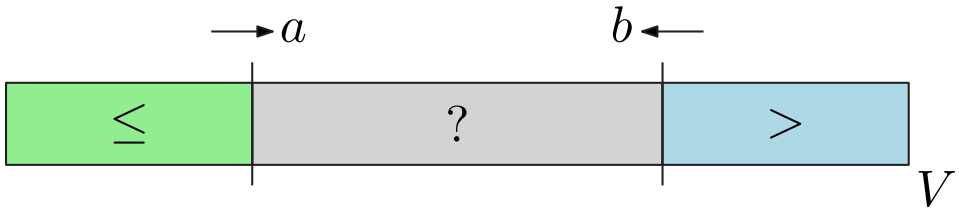


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

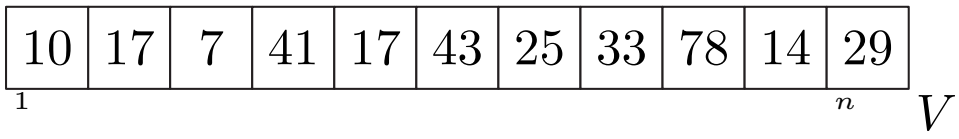


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

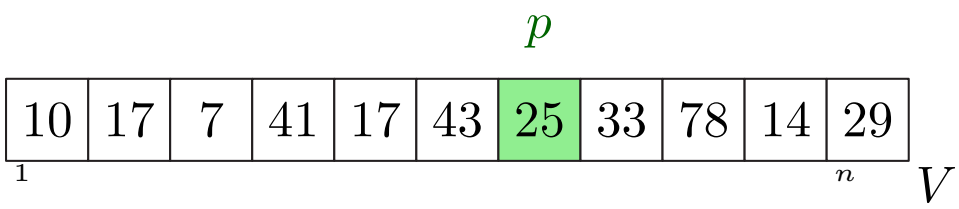


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

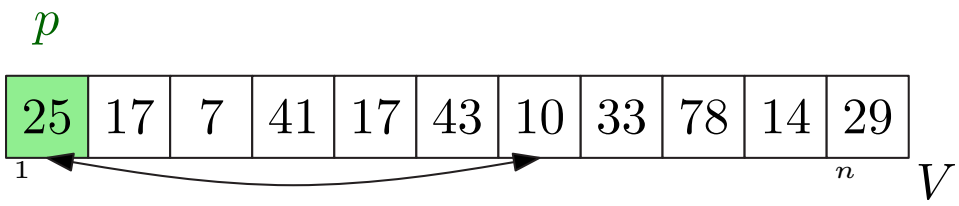


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

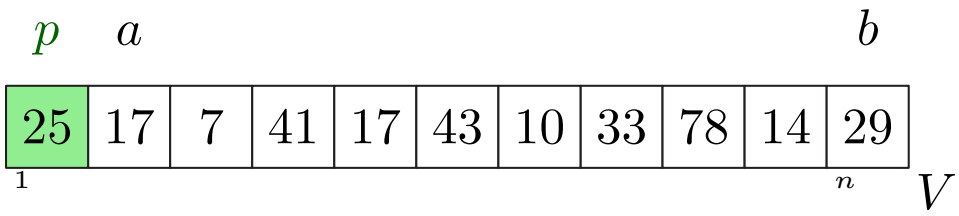


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

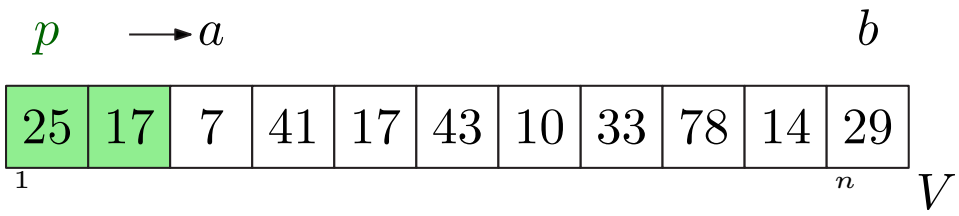


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

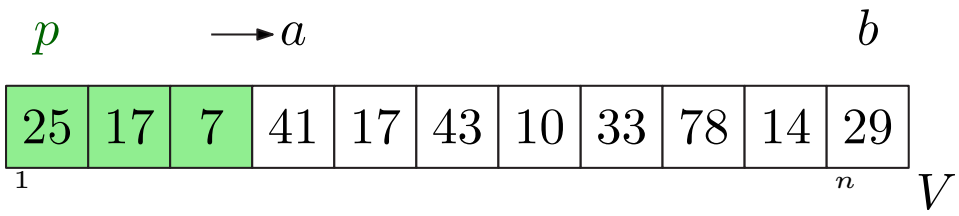


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

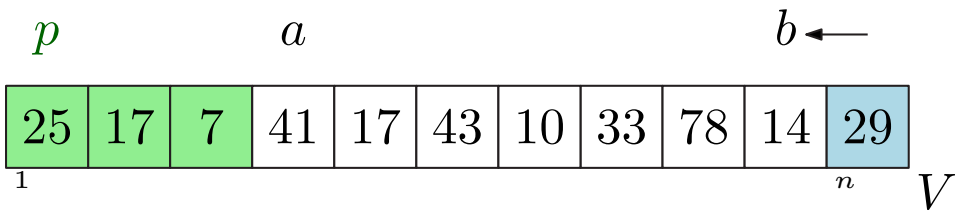


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen "in die Mitte"
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$



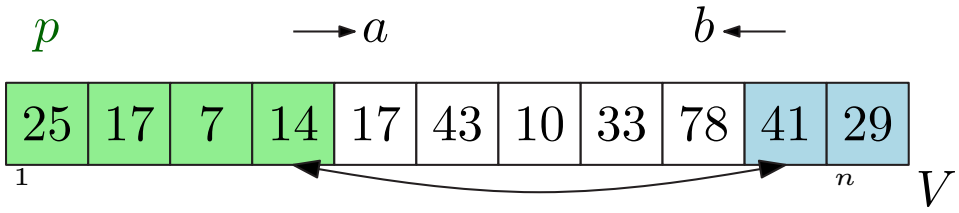
in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$

  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

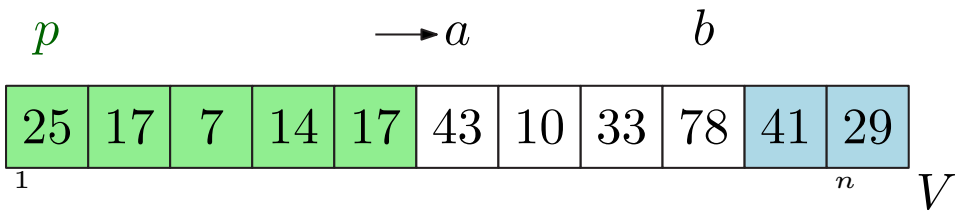


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

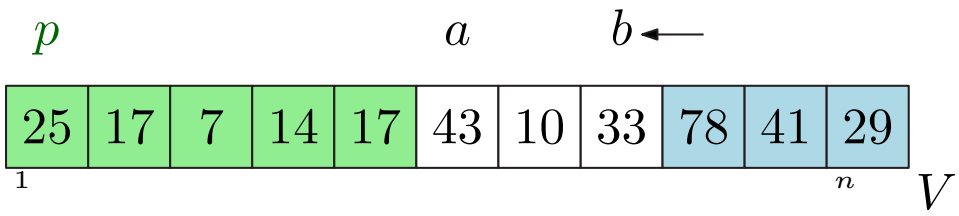


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

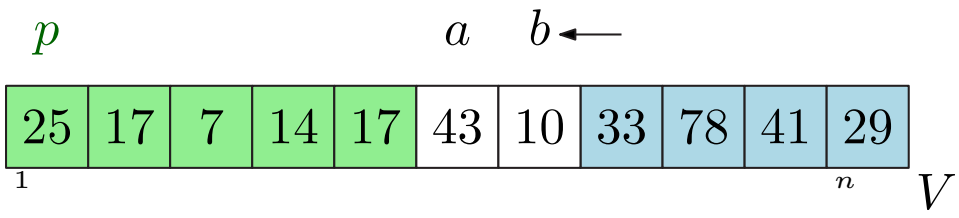


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

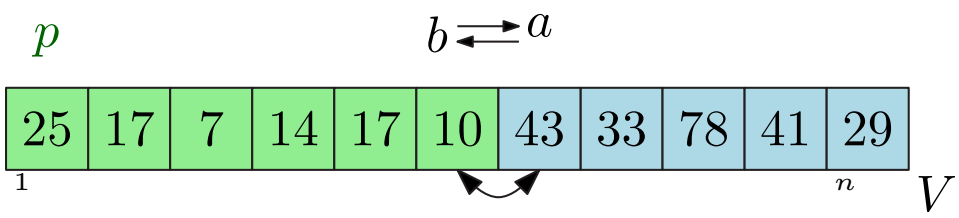


in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$



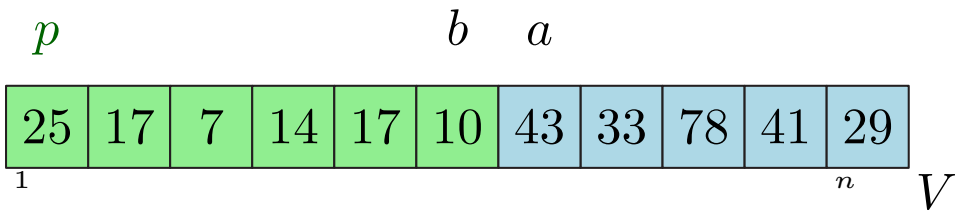
in-place Multikey Quicksort

Wiederholung: Partitionierung

in-place bei Quicksort (für Integer)

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$

  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$



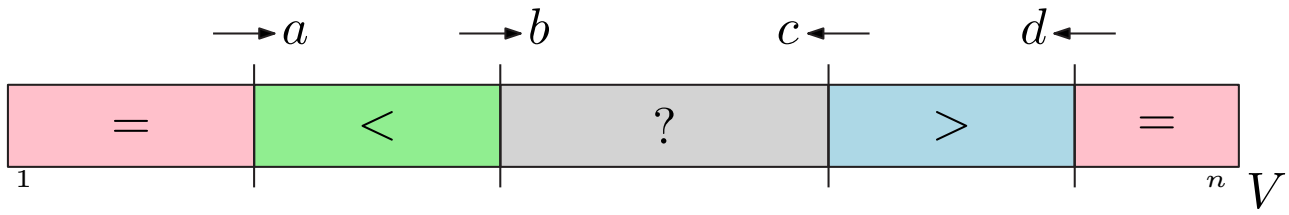
in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort

- teilt Elemente in kleiner, gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger b, c wandern von außen “in die Mitte”
- gleiche Elemente werden mit Zeiger a, d “außen” gesammelt

  $\rightarrow$ Invariante: $V[i \in [a,b) \; a \neq b] \leq p$, $V[i < a \vee i > d] = p$, $V[i \in (c,d] \; c \neq d] > p$

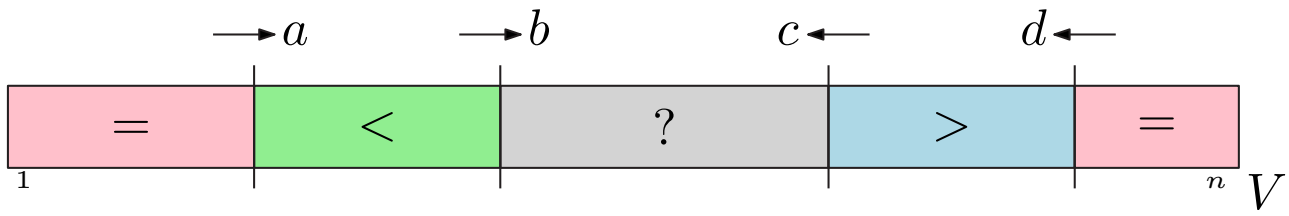


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort

- teilt Elemente in kleiner, gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger b, c wandern von außen “in die Mitte”
- gleiche Elemente werden mit Zeiger a, d “außen” gesammelt
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i \in [a, b)\ a{\neq}b] \leq p$, $V[i < a \vee i > d] = p$, $V[i \in (c, d]\ c{\neq}d] > p$

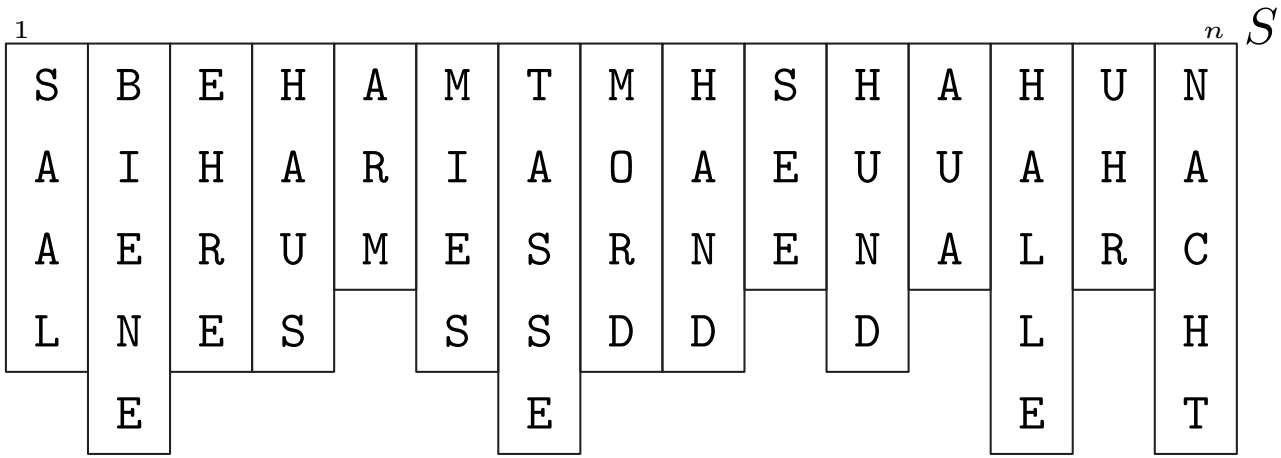


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort

- teilt Elemente in kleiner, gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger b, c wandern von außen “in die Mitte”
- gleiche Elemente werden mit Zeiger a, d “außen” gesammelt
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i \in [a, b) \; a \neq b] \leq p$, $V[i < a \vee i > d] = p$, $V[i \in (c, d] \; c \neq d] > p$

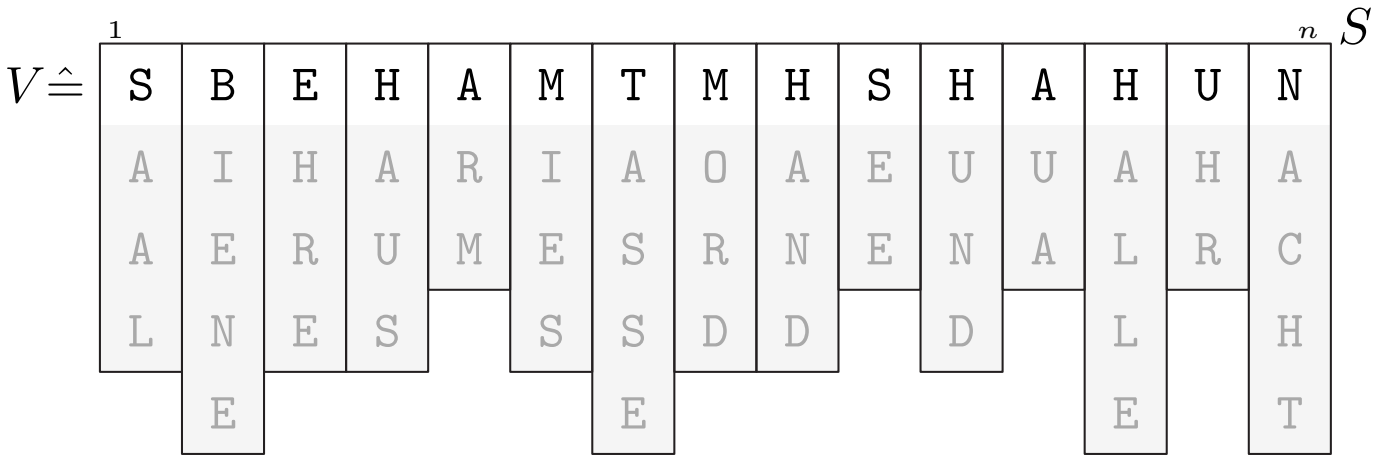


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort

- teilt Elemente in kleiner, gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger b, c wandern von außen “in die Mitte”
- gleiche Elemente werden mit Zeiger a, d “außen” gesammelt
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i \in [a, b) \; {}_{a \neq b}] \leq p$, $V[i < a \vee i > d] = p$, $V[i \in (c, d] \; {}_{c \neq d}] > p$

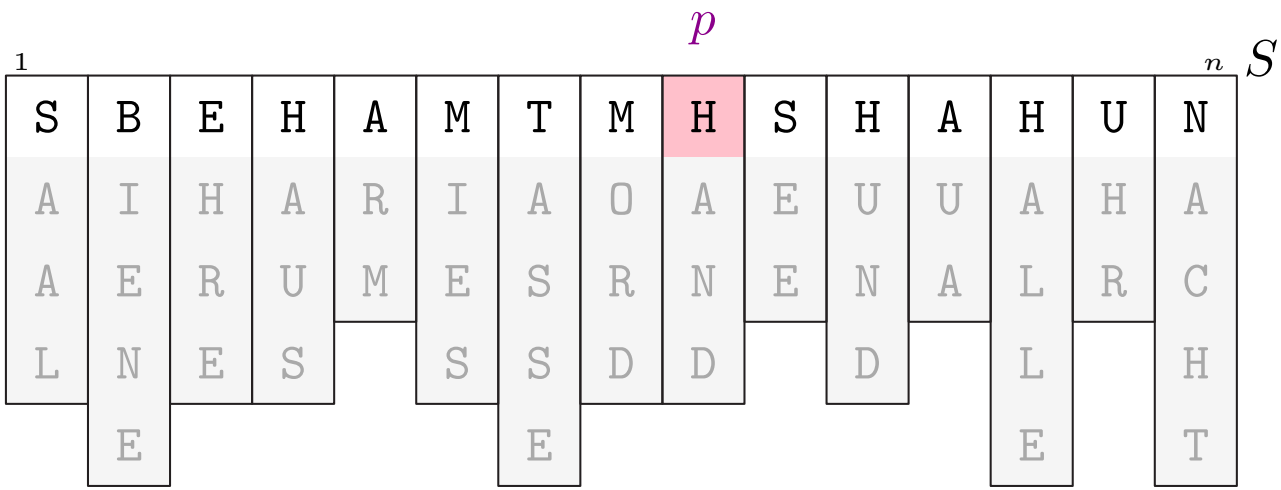


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

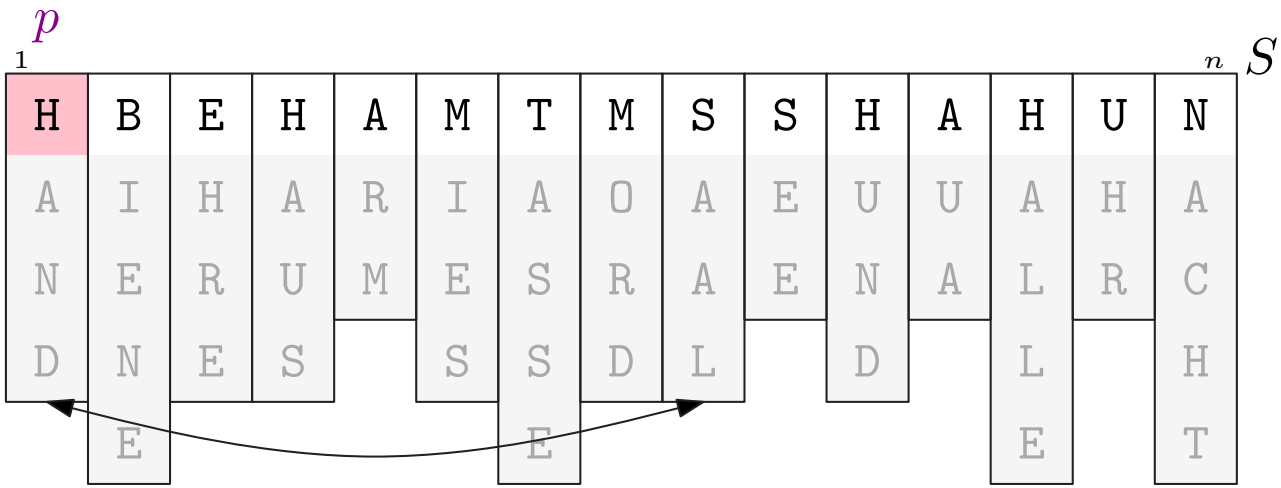


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

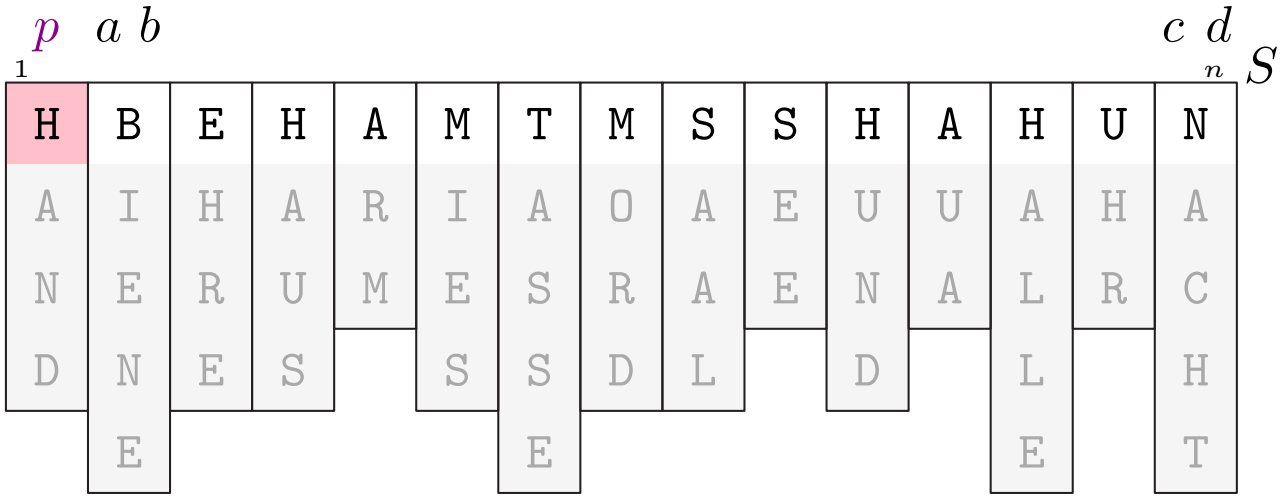


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

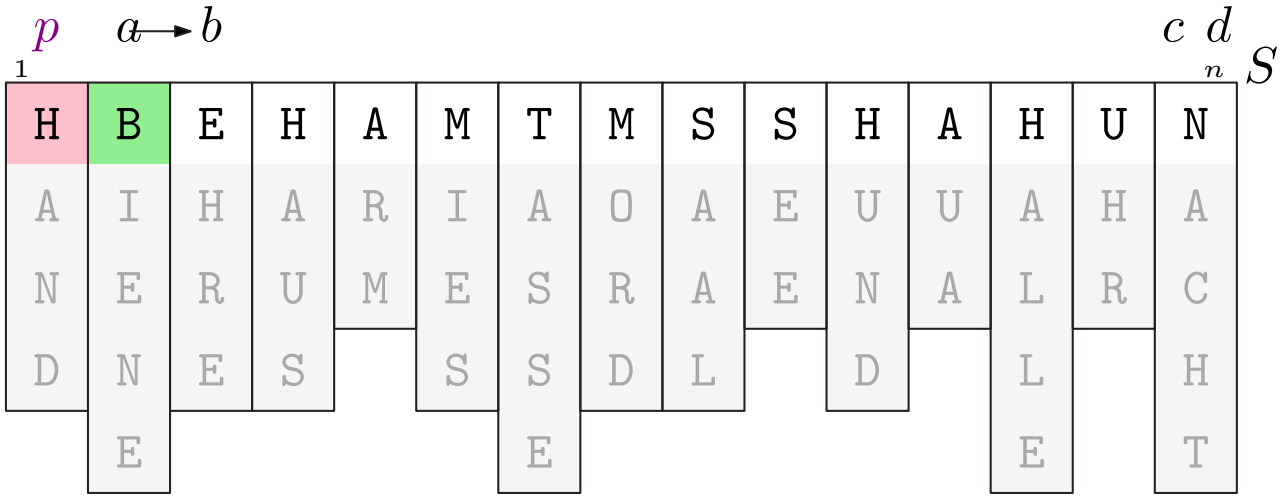


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

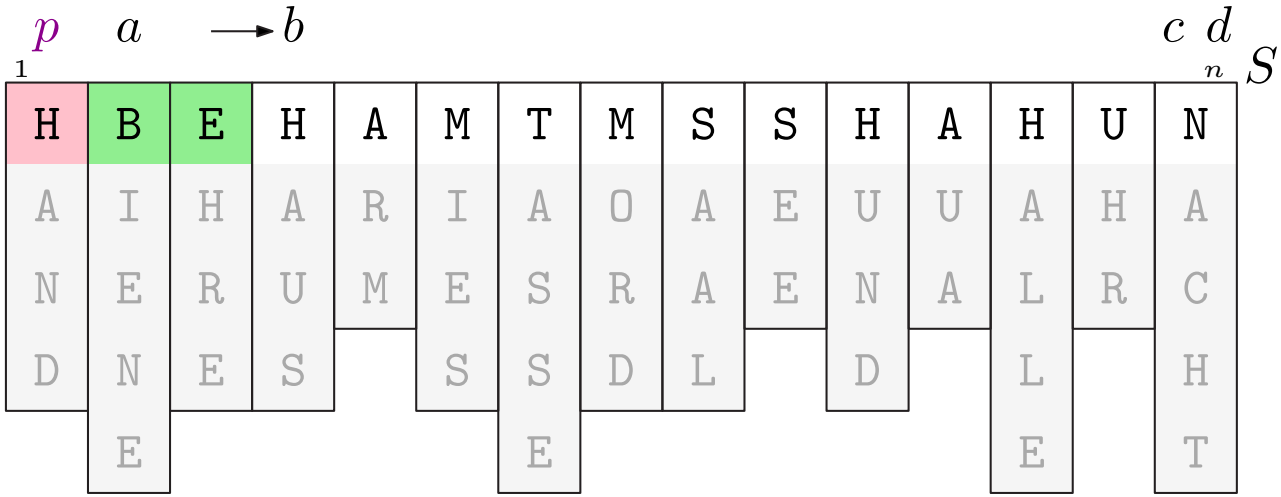


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

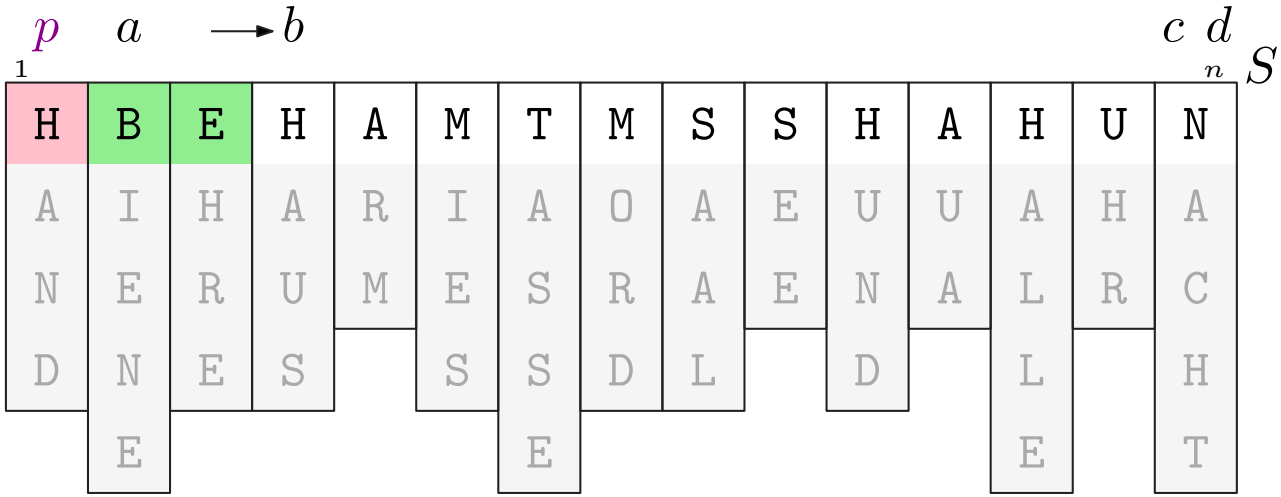


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

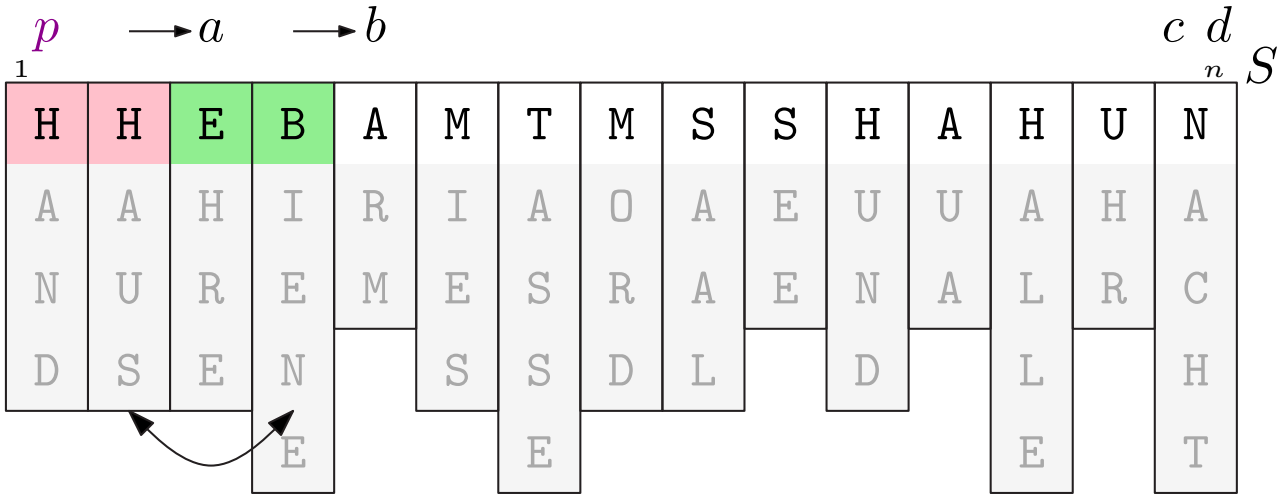


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

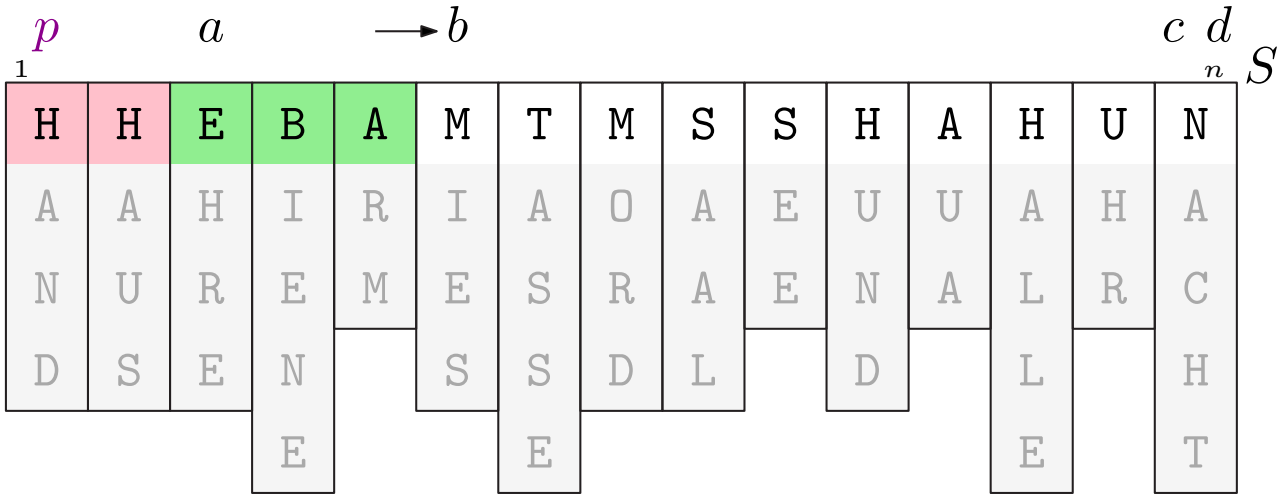


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

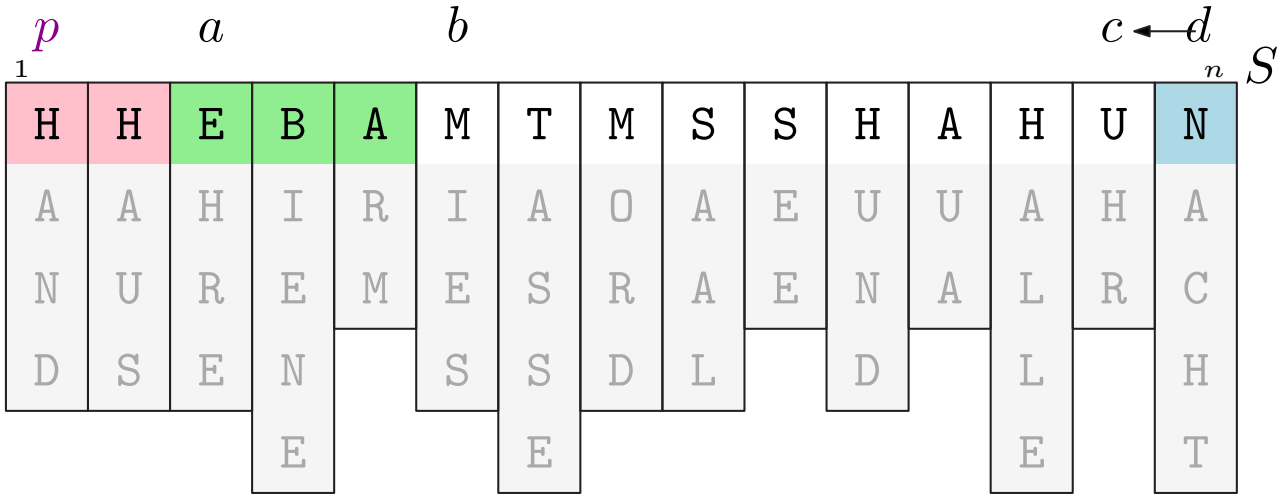


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

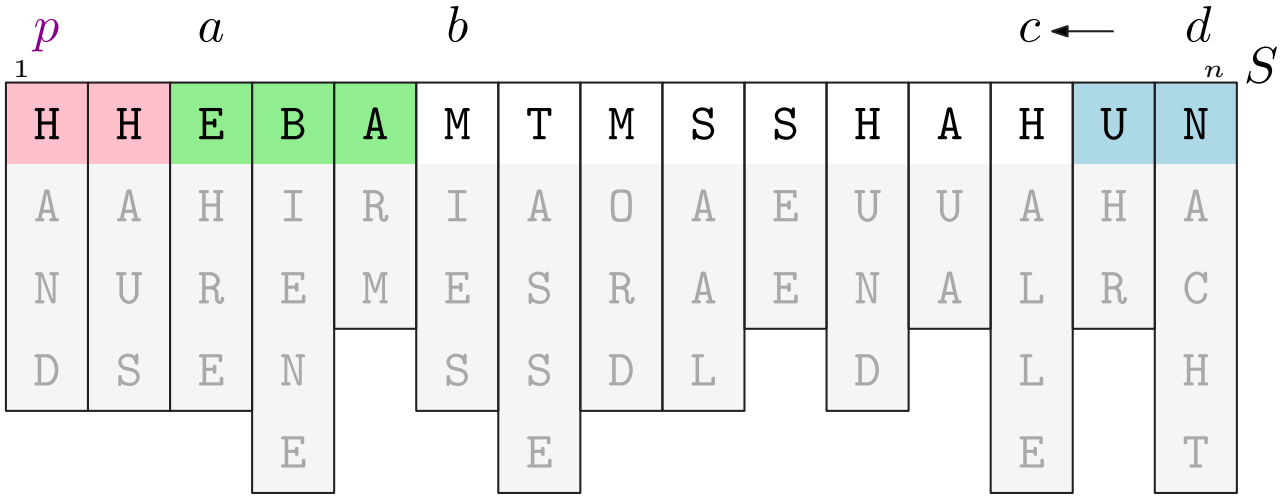


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

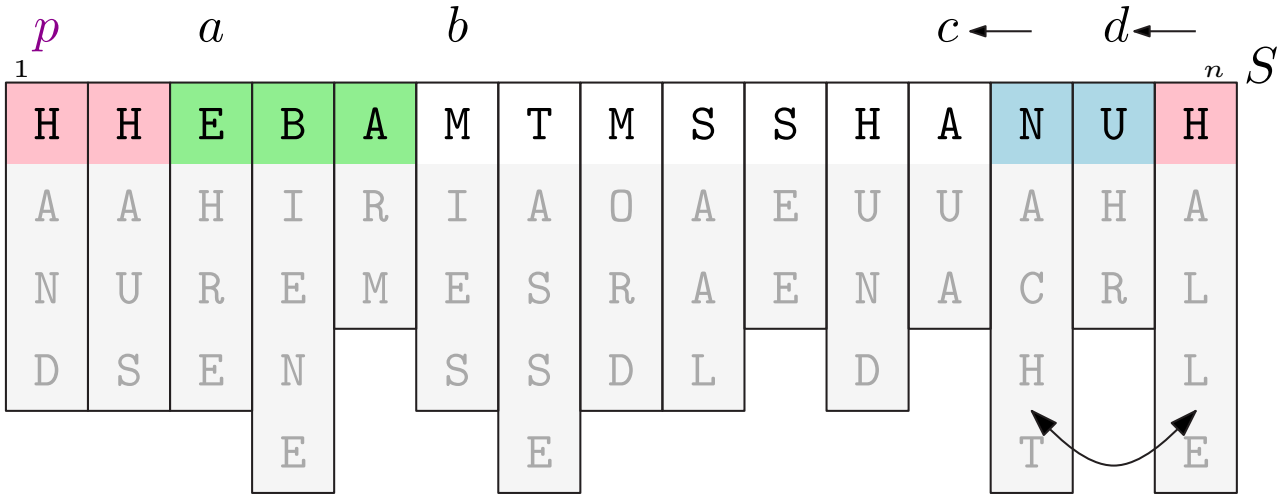


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

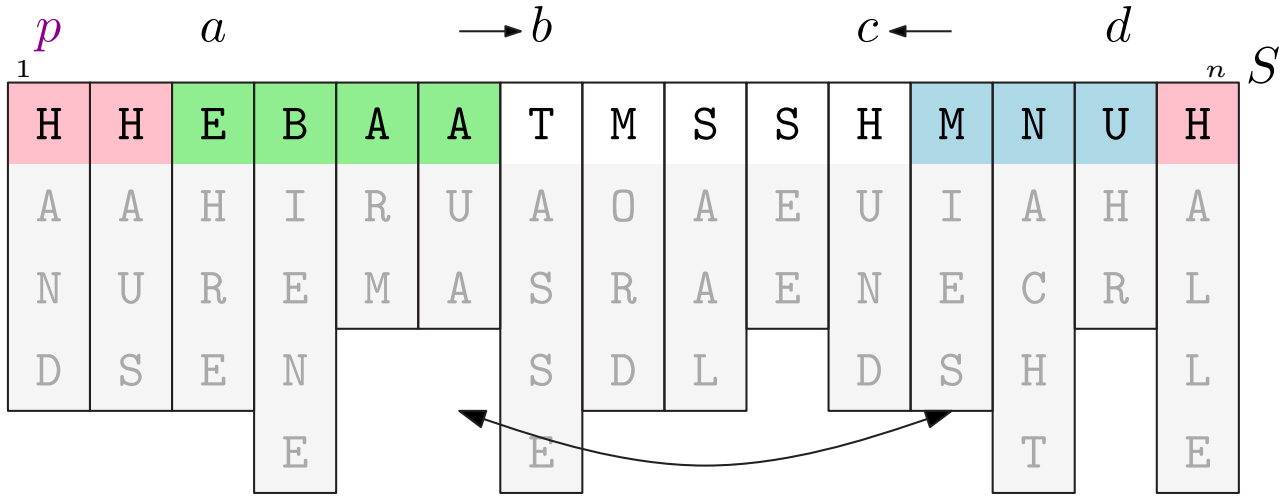


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

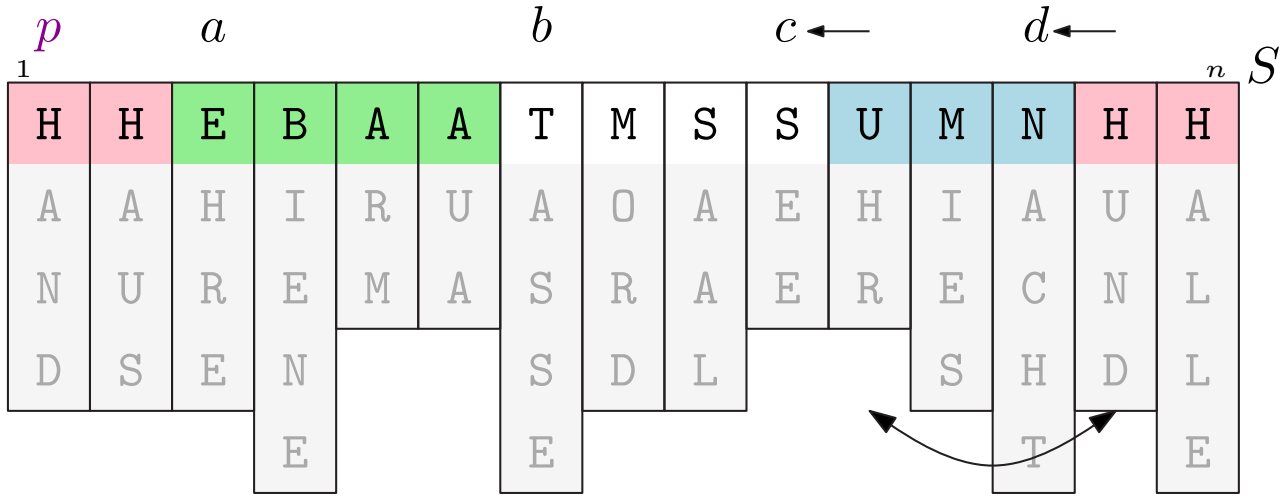


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

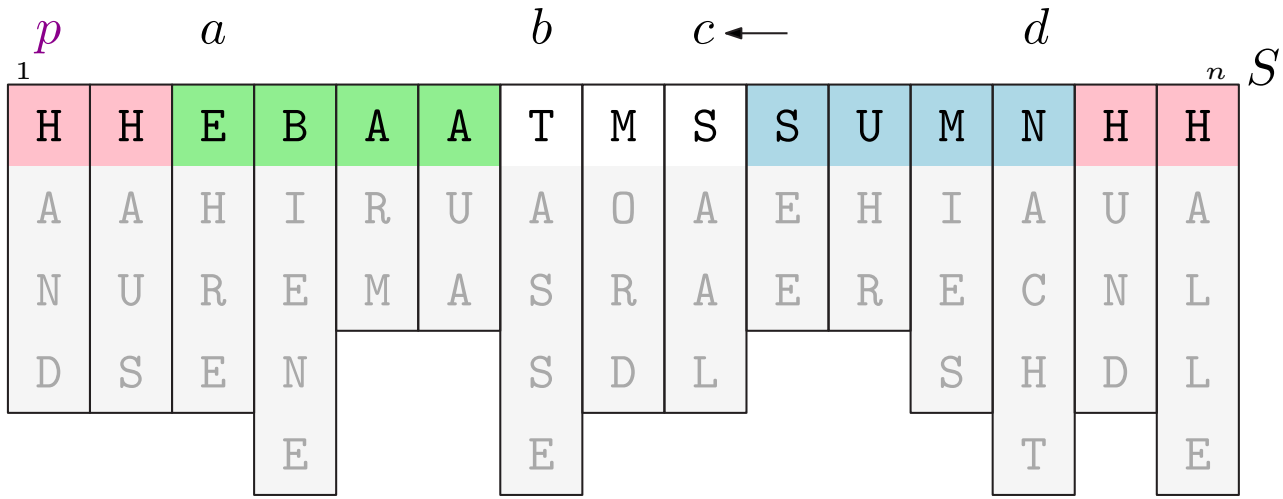


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

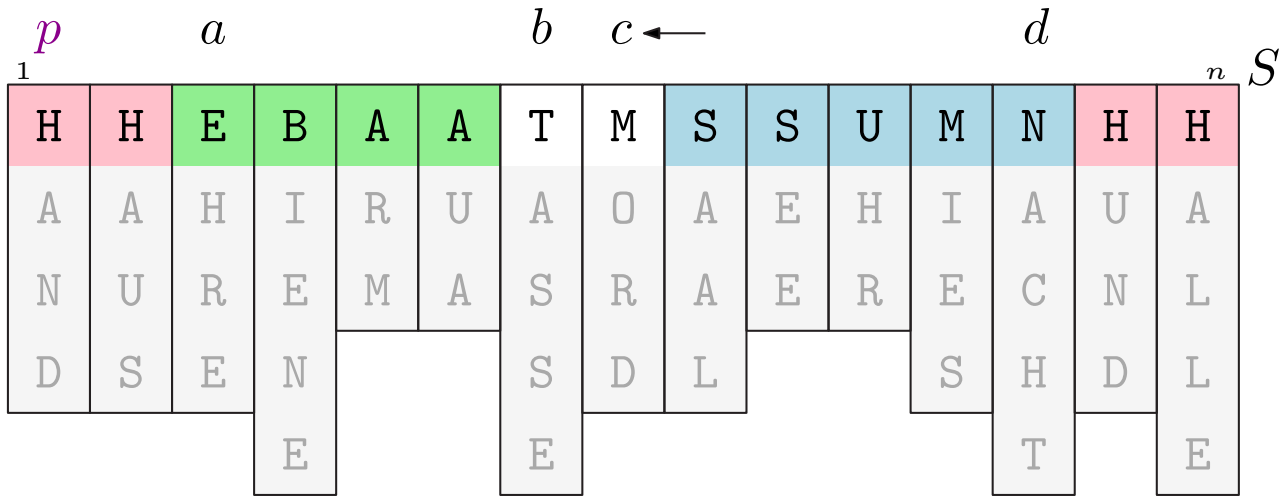


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

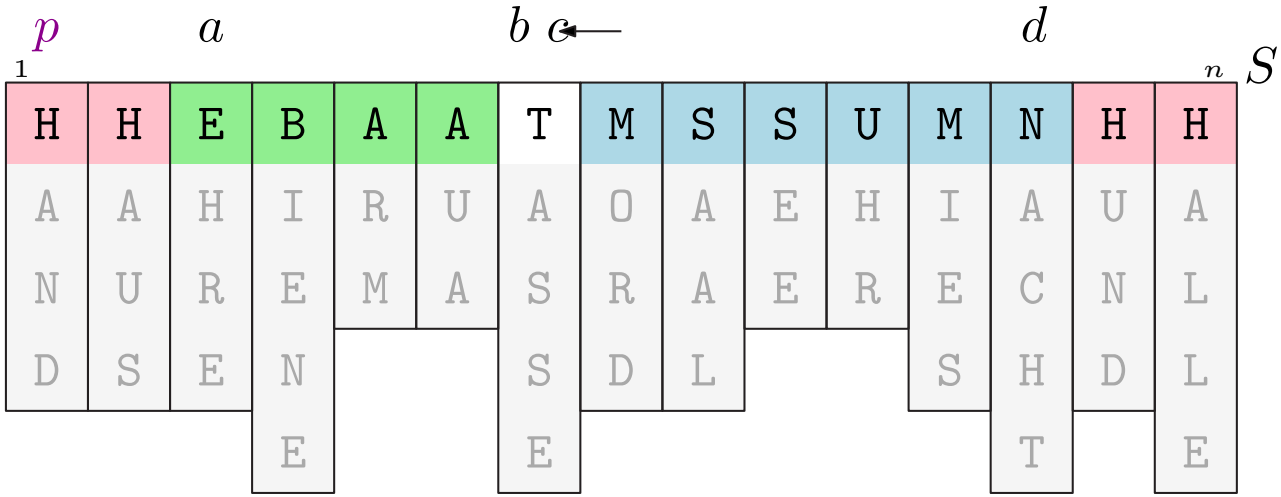


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

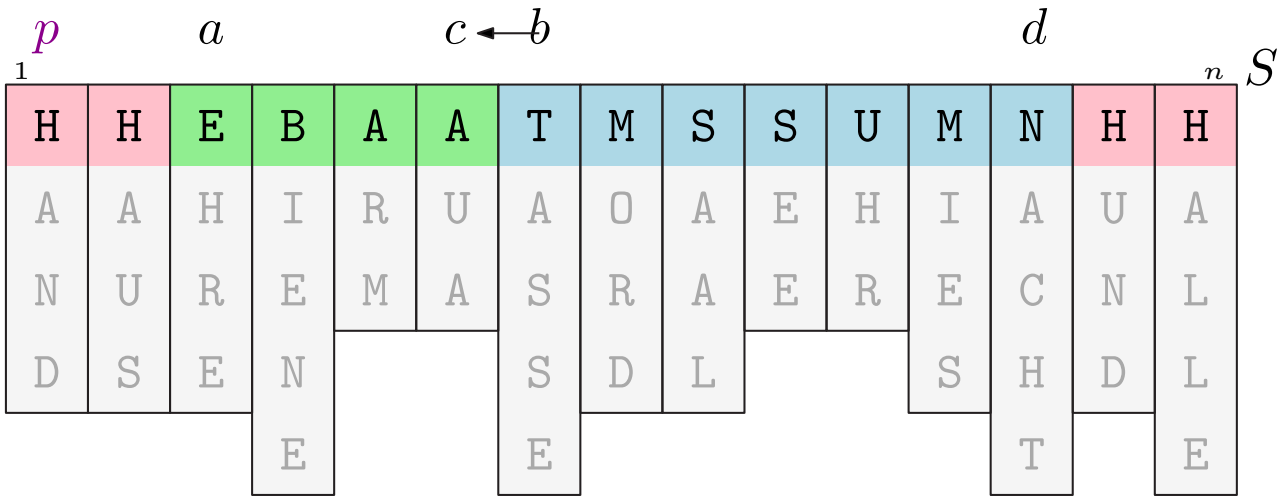


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Algorithmus)

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

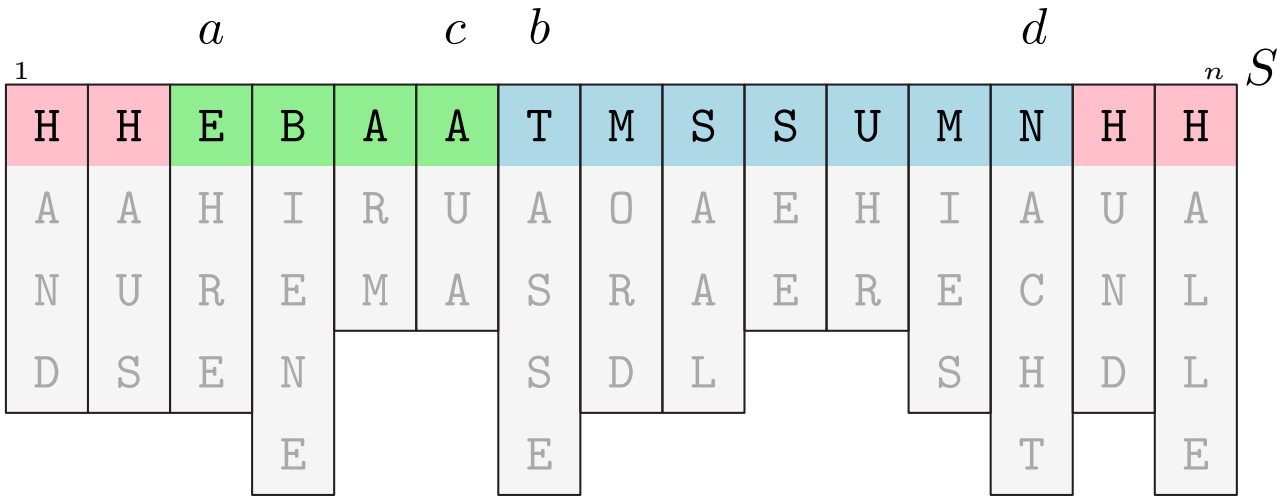


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Umgruppierung)

- $r = \min(a-1, b-a)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[1, r)$ und $[b-r, b)$
- $r = \min(d-c, n-d)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[c+1, c+r)$ und $[n-r+1, n+1)$

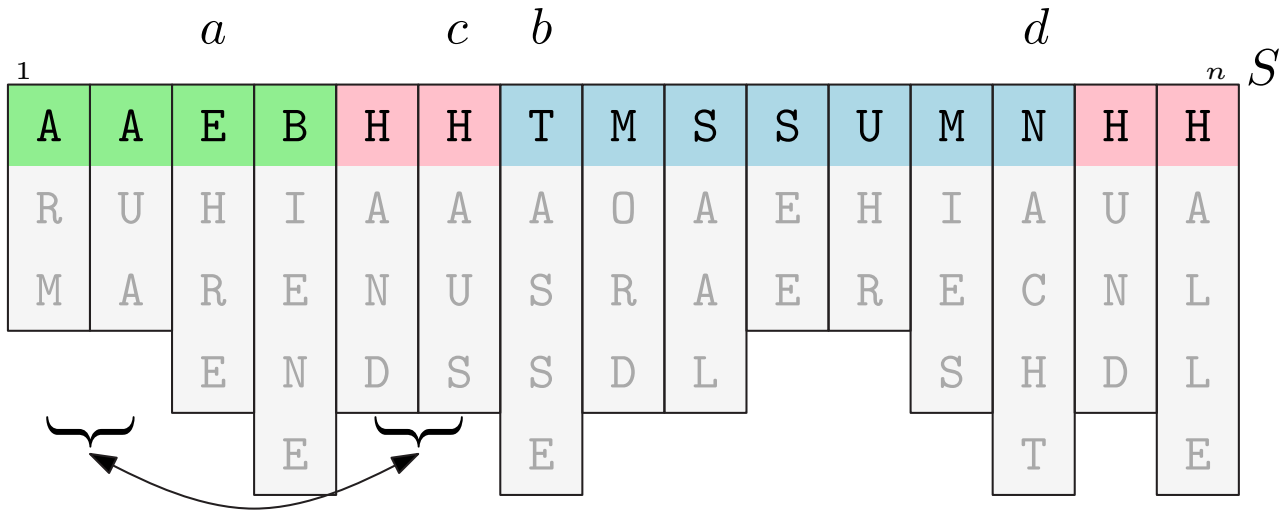


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Umgruppierung)

- $r = \min(a-1, b-a)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[1, r)$ und $[b-r, b)$
- $r = \min(d-c, n-d)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[c+1, c+r)$ und $[n-r+1, n+1)$

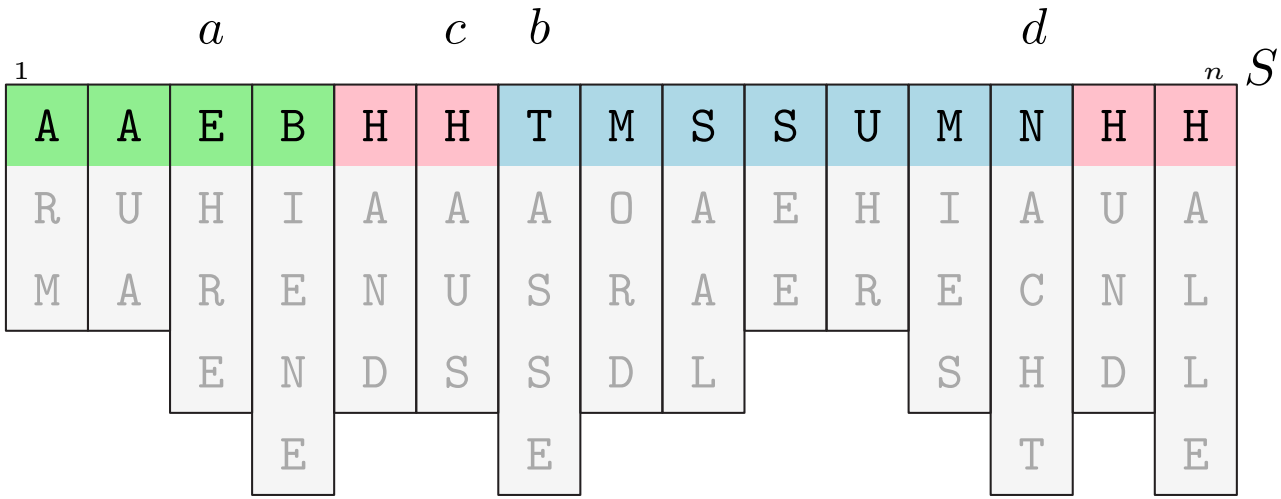


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Umgruppierung)

- $r = \min(a-1, b-a)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[1, r)$ und $[b-r, b)$
- $r = \min(d-c, n-d)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[c+1, c+r)$ und $[n-r+1, n+1)$

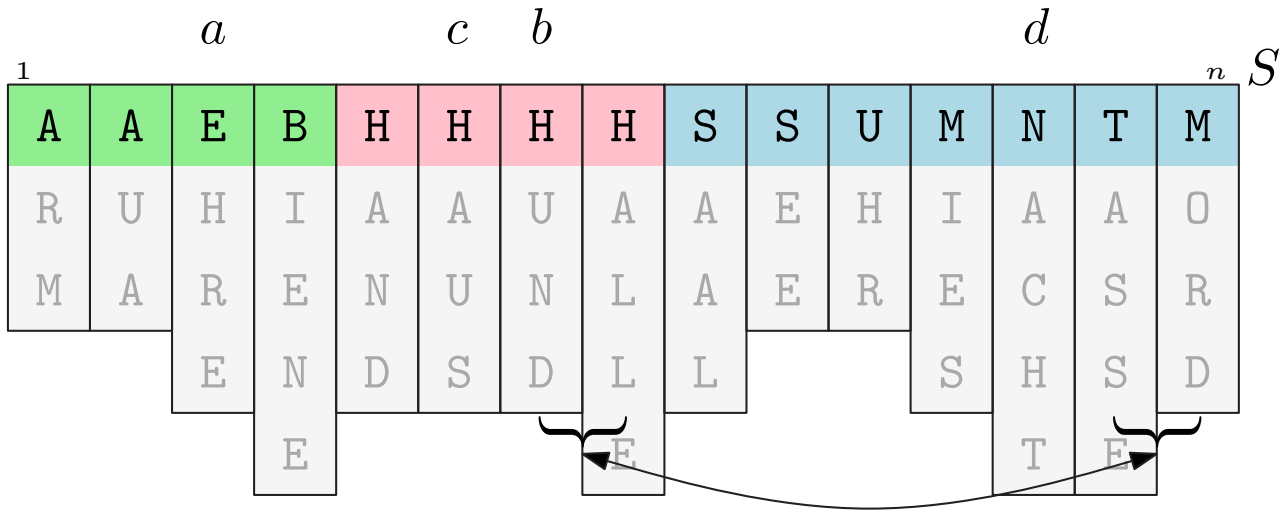


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Umgruppierung)

- $r = \min(a-1, b-a)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[1, r)$ und $[b-r, b)$
- $r = \min(d-c, n-d)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[c+1, c+r)$ und $[n-r+1, n+1)$

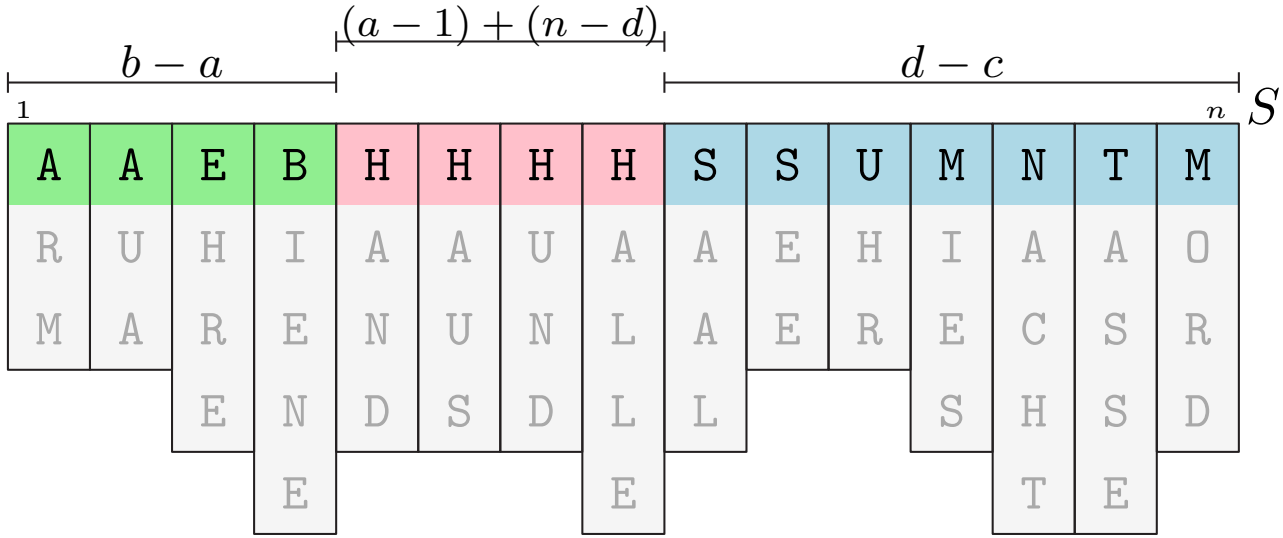


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort (Umgruppierung)

- $r = \min(a-1, b-a)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[1, r)$ und $[b-r, b)$
- $r = \min(d-c, n-d)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[c+1, c+r)$ und $[n-r+1, n+1)$



in-place Multikey Quicksort

Zusammenfassung

- *Three-way Radix Quicksort*
  (Partitionierung in kleiner, gleich, größer über alle Stellen analog zu msd-*Radixsort*)
- effizient $\mathcal{O}(|S| \log |S| + d)$
  ($d \mathrel{\hat{=}}$ Summe der Länge der unterscheidenden Präfixe)
- *in-place* Partitionierung möglich
  (durch geschicktes Speichern und Verschieben der gleichen Elemente)
- sehr einfache Implementierung
  (nur 40 Zeilen Quellcode, siehe Anhang)

Suche mit Suffix-Arrays

Wiederholung

gesucht

- Anzahl / Position aller Vorkommen von Muster P in Text T
  (*counting query* / *reporting query*)

Ansatz

- Suffix-Array SA von T indiziert alle Suffixe in sortierter Reihenfolge
  - $\rightarrow$ binäre Suche in SA für erstes, letztes Vorkommen von P in T
  - $\rightarrow$ über Indizes s, t alle Vorkommen bestimmt

Laufzeit

- $\mathcal{O}(m \log n)$ bzw. $\mathcal{O}(m \log n + occ(p))$
  (mit $|P| = m, |T| = n, occ(p) =$ Anzahl Vorkommen von P in T)

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

Suche: $P =$ `bar`

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende
- Ergebnis

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P =$ bar

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende
- Ergebnis

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

i															
1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
8	a	b	a	r	b	e	r	$							
9	b	a	r	b	e	r	$								
10	a	r	b	e	r	$									
11	r	b	e	r	$										
12	b	e	r	$											
13	e	r	$												
14	r	$													
15	$														

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P =$ bar

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende
- Ergebnis

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
i	SA[i]															
1	15	$														
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$							
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
4	10	a	r	b	e	r	$									
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
7	9	b	a	r	b	e	r	$								
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
9	12	b	e	r	$											
10	13	e	r	$												
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
12	14	r	$													
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
14	11	r	b	e	r	$										
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start (binäre Suche)

  $l = 1, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

    if $(P > T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q + 1$

      else $r = q$

  $s = l$

  if $(P \neq T_{SA[s]..SA[s]+m-1})$

    then break

- finde Ende
- Ergebnis

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

	i	SA[i]	
	1	15	$
	2	8	a b a r b e r $
	3	2	a r b a r h a b a r b e r $
	4	10	a r b e r $
	5	5	a r h a b a r b e r $
	6	1	b a r b a r h a b a r b e r $
	7	9	b a r b e r $
$q =$	8	4	b a r h a b a r b e r $
	9	12	b e r $
	10	13	e r $
	11	7	h a b a r b e r $
	12	14	r $
	13	3	r b a r h a b a r b e r $
	14	11	r b e r $
	15	6	r h a b a r b e r $

$l = 1, r = 16$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start (binäre Suche)

  $l = 1, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

    if $(P > T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q + 1$

      else $r = q$

  $s = l$

  if $(P \neq T_{SA[s]..SA[s]+m-1})$

    then break

- finde Ende
- Ergebnis

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

	i	SA[i]														
	1	15	$													
	2	8	a	b	a	r	b	e	r	$						
	3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
$q =$	4	10	a	r	b	e	r	$								
	5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
	6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	7	9	b	a	r	b	e	r	$							
	8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
	9	12	b	e	r	$										
	10	13	e	r	$											
	11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
	12	14	r	$												
	13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
	14	11	r	b	e	r	$									
	15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				

$l = 1, r = 8$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start (binäre Suche)

  $l = 1, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

    if $(P > T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q + 1$

      else $r = q$

  $s = l$

  if $(P \neq T_{SA[s]..SA[s]+m-1})$

    then break

- finde Ende
- Ergebnis

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

i	SA[i]															
1	15	$														
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$							
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
4	10	a	r	b	e	r	$									
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
$q =$ 6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
7	9	b	a	r	b	e	r	$								
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
9	12	b	e	r	$											
10	13	e	r	$												
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
12	14	r	$													
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
14	11	r	b	e	r	$										
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					

$l = 5, r = 8$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start (binäre Suche)

  $l = 1, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

    if $(P > T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q + 1$

      else $r = q$

  $s = l$

  if $(P \neq T_{SA[s]..SA[s]+m-1})$

    then break

- finde Ende
- Ergebnis

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

	i	SA[i]														
	1	15	$													
	2	8	a	b	a	r	b	e	r	$						
	3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	4	10	a	r	b	e	r	$								
$q =$	5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
	6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	7	9	b	a	r	b	e	r	$							
	8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
	9	12	b	e	r	$										
	10	13	e	r	$											
	11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
	12	14	r	$												
	13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
	14	11	r	b	e	r	$									
	15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				

$l = 5, r = 6$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start (binäre Suche)

  $l = 1, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

    if $(P > T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q + 1$

      else $r = q$

  $s = l$

  if $(P \neq T_{SA[s]..SA[s]+m-1})$

    then break

- finde Ende
- Ergebnis

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

i	SA[i]	
1	15	$
2	8	a b a r b e r $
3	2	a r b a r h a b a r b e r $
4	10	a r b e r $
5	5	a r h a b a r b e r $
6	1	b a r b a r h a b a r b e r $
7	9	b a r b e r $
8	4	b a r h a b a r b e r $
9	12	b e r $
10	13	e r $
11	7	h a b a r b e r $
12	14	r $
13	3	r b a r h a b a r b e r $
14	11	r b e r $
15	6	r h a b a r b e r $

$l = 6, r = 6$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P =$ `bar`

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende (binäre Suche)

  $l = s, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lceil \frac{l+r}{2} \rceil$

    if $(P = T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q$

      else $r = q - 1$

  $t = l$
- Ergebnis

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

	i	SA[i]														
	1	15	$													
	2	8	a	b	a	r	b	e	r	$						
	3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	4	10	a	r	b	e	r	$								
	5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
	6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	7	9	b	a	r	b	e	r	$							
	8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
	9	12	b	e	r	$										
$q =$	10	13	e	r	$											
	11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
	12	14	r	$												
	13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
	14	11	r	b	e	r	$									
	15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				

$l = 5, r = 15$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende (binäre Suche)

  $l = s, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lceil \frac{l+r}{2} \rceil$

    if $(P = T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q$

      else $r = q - 1$

  $t = l$
- Ergebnis

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
i	SA[i]															
1	15	$														
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$							
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
4	10	a	r	b	e	r	$									
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
$q =$ 7	9	b	a	r	b	e	r	$								
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
9	12	b	e	r	$											
10	13	e	r	$												
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
12	14	r	$													
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
14	11	r	b	e	r	$										
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					

$l = 5, r = 9$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende (binäre Suche)

  $l = s, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lceil \frac{l+r}{2} \rceil$

    if $(P = T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$ $q =$
      then $l = q$
      else $r = q - 1$

  $t = l$

- Ergebnis

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

i	SA[i]														
1	15	$													
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$						
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
4	10	a	r	b	e	r	$								
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
7	9	b	a	r	b	e	r	$							
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
9	12	b	e	r	$										
10	13	e	r	$											
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
12	14	r	$												
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
14	11	r	b	e	r	$									
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				

$l = 7, r = 9$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende (binäre Suche)

  $l = s, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lceil \frac{l+r}{2} \rceil$

    if $(P = T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q$

      else $r = q - 1$

  $t = l$
- Ergebnis

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	i	SA[i]														
	1	15	$													
	2	8	a	b	a	r	b	e	r	$						
	3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	4	10	a	r	b	e	r	$								
	5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
	6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	7	9	b	a	r	b	e	r	$							
	8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
$q =$	9	12	b	e	r	$										
	10	13	e	r	$											
	11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
	12	14	r	$												
	13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
	14	11	r	b	e	r	$									
	15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				

$l = 8, r = 9$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende (binäre Suche)

  $l = s, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lceil \frac{l+r}{2} \rceil$

    if $(P = T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q$

      else $r = q - 1$

  $t = l$
- Ergebnis

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
i	SA[i]															
1	15	$														
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$							
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
4	10	a	r	b	e	r	$									
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
7	9	b	a	r	b	e	r	$								
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
9	12	b	e	r	$											
10	13	e	r	$												
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
12	14	r	$													
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
14	11	r	b	e	r	$										
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					

$l = 8, r = 8$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P =$ `bar`

- (SA bestimmen)
- finde Start
- finde Ende
- Ergebnis
  - $t - s + 1$ (counting query)
  - $\{SA[s], \ldots, SA[t]\}$ (reporting query)

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	i	SA[i]														
	1	15	$													
	2	8	a	b	a	r	b	e	r	$						
	3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	4	10	a	r	b	e	r	$								
	5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
	6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
	7	9	b	a	r	b	e	r	$							
$q =$	8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
	9	12	b	e	r	$										
	10	13	e	r	$											
	11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
	12	14	r	$												
	13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
	14	11	r	b	e	r	$									
	15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				

$s = 6, t = 8$

Suche mit Suffix-Arrays

Zusammenfassung

- Verlagerung des Aufwands von Anfrage in Vorverarbeitung
  - $\rightarrow$ einmal Suffix-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ danach Anfragen in $\mathcal{O}(m \log n)$ möglich, statt in $\mathcal{O}(mn)$
    (beides auch in $\mathcal{O}(m + \log n)$ bzw. $\mathcal{O}(m + n)$ möglich)

  (gut, wenn auf einem Text viele Anfragen stattfinden)

- Ausnutzung der Eigenschaften des Suffix-Arrays
  - $\rightarrow$ jeder Substring ist Präfix eines Suffix
  - $\rightarrow$ alle Substrings liegen "sortiert" vor
    (mögliche Ausnahme: Substring ist Präfix von Substring)

  (das Suffix-Array indiziert alle Suffixe in sortierter Reihenfolge)

LCP-Array

Längster gemeinsamer Präfix

Definition:

- LCP$[i]$: Länge des längsten gemeinsamen Präfixes von je zwei lexikographisch benachbarten Suffixen $A[\mathrm{SA}[i-1]\ldots n]$ und $A[\mathrm{SA}[i]\ldots n]$

Erweiterung auf beliebige Suffixe

- LCP$[i][j]$: Länge des längsten gemeinsamen Präfix beliebiger lexikographischer Suffixe $A[\mathrm{SA}[i]\ldots n]$ und $A[\mathrm{SA}[j]\ldots n]$
- Konstruktion: $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit und Platz
- Zugriff: $\mathcal{O}(1)$

Schnelle Suche mit Suffix-Arrays

Erster Ansatz

Suche: $P =$ `bar`

- Ziel: kein wiederholtes Vergleichen von Zeichen aus P
- Nutze LCP-Array um Suche zu beschleunigen
- Starte Suche bei *mlr*
  - $l := \text{LCP}(L, P)$
  - $r := \text{LCP}(R, P)$
  - $mlr := \min(l, r)$
  - Update von l, r, keine Neuberechnung
- Oft $\mathcal{O}(m + \log n)$
- Worst case $\mathcal{O}(m \log n)$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
i	SA[i]															
1	15	$														
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$							
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
4	10	a	r	b	e	r	$									
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
$L =$ 6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
$q =$ 7	9	b	a	r	b	e	r	$								
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
$R =$ 9	12	b	e	r	$											
10	13	e	r	$												
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
12	14	r	$													
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
14	11	r	b	e	r	$										
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					

$L = 6, R = 9$

$l = 3, r = 1$

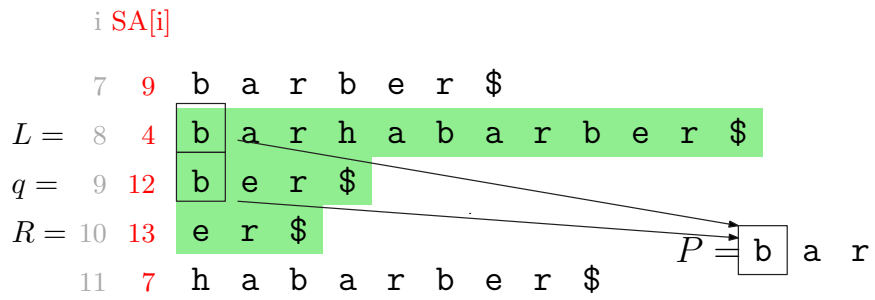
$mlr := 1 = \min(l, r)$

Schnelle Suche mit Suffix-Arrays

Redundante Vergleiche

Problem

- Falls $l \neq r \rightarrow$ wiederholtes Vergleichen



Definition

- Vergleich eines Zeichens aus P ist redundant, falls das Zeichen vorher schon einmal überprüft wurde.

Ziel

- Beschränke rendundante Vergleiche auf $\mathcal{O}(1)$ pro Iteration
- Vergleiche bei $\max(l, r)$ beginnen

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Ansatz

- **if** $(l = r)$
  start at mlr
  Update l, r, L, R
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] > l)$
  $L := q + 1$
  Update l
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] < l)$
  $R := q$
  $r := \mathrm{LCP}[L, q]$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] = l)$
  start at l

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P =$ `barberac`

- **if** $(l = r)$
  start at mlr
  Update l, r, L, R
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] < l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] = l)$

b a r b a r h a b a r b e r ...

b a r b e r a b a ...

b a r b e r a b c ...

b a r b e r a c c ...

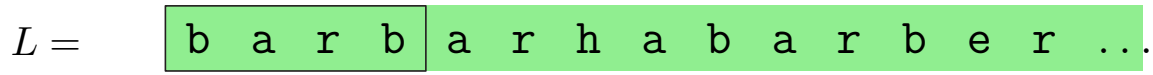
b a r b e r c b c $

b a r b i

$l = 4, r = 4$

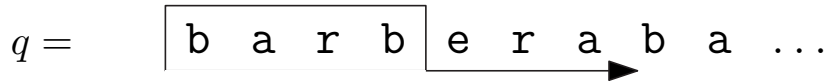
Suche mit Suffix-Arrays

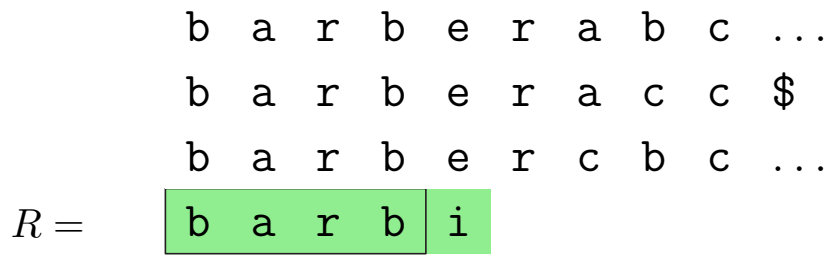
Ablauf



Suche: $P =$ `barberac`

- **if** $(l = r)$
  start at mlr
  Update l, r, L, R
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] < l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] = l)$





$\text{LCP}[L, q] = 4$

$l = 4, r = 4$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

b a r b a r h a b a r b e r ...

Suche: $P =$ barberac

- **if** $(l = r)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] < l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] = l)$

$L =$

b a r b e r a b a ...
b a r b e r a b b ...

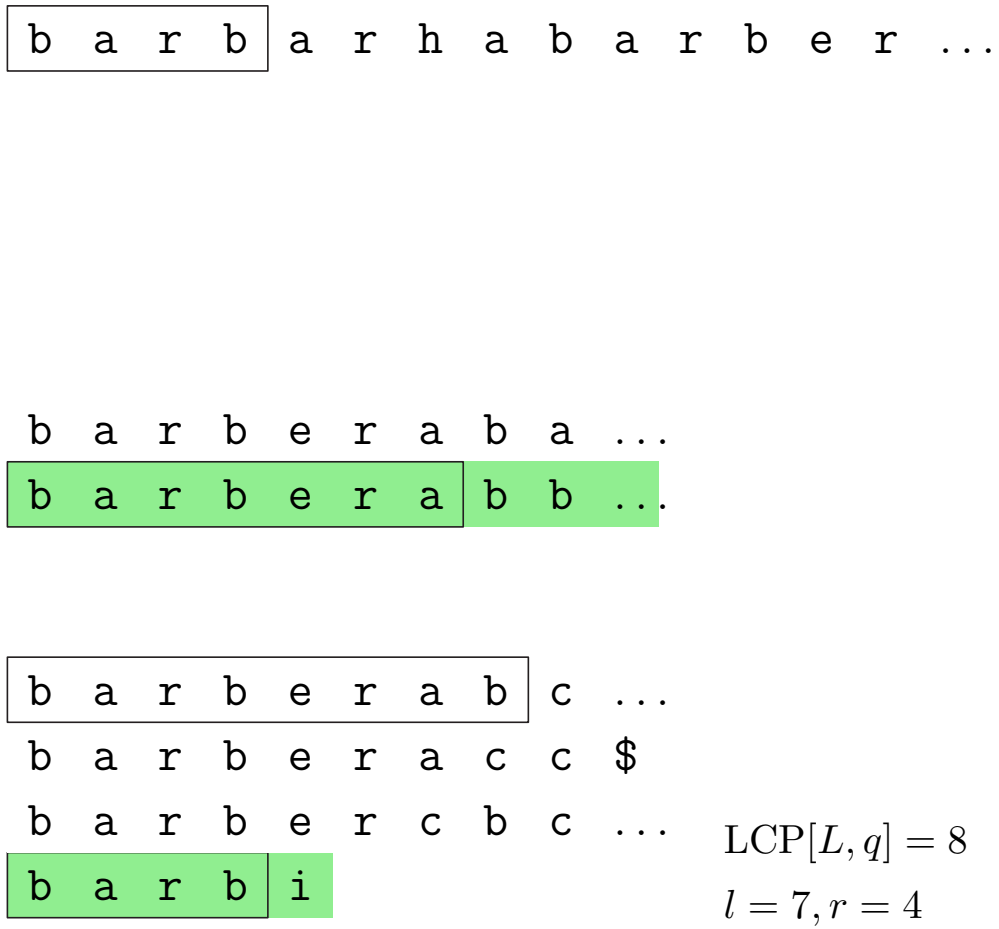
$R =$

b a r b e r a b c ...
b a r b e r a c c $
b a r b e r c b c ...
b a r b i

$l = 7, r = 4$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf



Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	...

Suche: $P =$ `barberac`

- **if** $(l = r)$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] < l)$
  $R := q$
  $r := \mathrm{LCP}[L, q]$

b	a	r	b	e	r	a	b	a	...
b	a	r	b	e	r	a	b	b	...

- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] = l)$

	b	a	r	b	e	r	a	b	c	...
$L =$	b	a	r	b	e	r	a	c	c	$
$q =$	b	a	r	b	e	r	c	b	c	...
$R =$	b	a	r	b	i					

$\mathrm{LCP}[L, q] = 6$

$l = 8, r = 4$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	...

Suche: $P =$ `barberac`

- **if** $(l = r)$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] < l)$
  $R := q$
  $r := \mathrm{LCP}[L, q]$

b	a	r	b	e	r	a	b	a	...
b	a	r	b	e	r	a	b	b	...

- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] = l)$

	b	a	r	b	e	r	a	b	c	...
$L =$	b	a	r	b	e	r	a	c	c	$
$R =$	b	a	r	b	e	r	c	b	c	...
	b	a	r	b	i					

$l = 8, r = 6$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	...

Suche: $P =$ `barberac`

- **if** $(l = r)$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] < l)$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] = l)$

b	a	r	b	e	r	a	b	a	...
b	a	r	b	e	r	a	b	b	...

	b	a	r	b	e	r	a	b	c	...
$L = q =$	b	a	r	b	e	r	a	c	c	$
$R =$	b	a	r	b	e	r	c	b	c	...
	b	a	r	b	i					

$\mathrm{LCP}[L, q] = 10$

$l = 8, r = 6$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

b a r b a r h a b a r b e r ...

Suche: $P =$ barberac

- **if** $(l = r)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] < l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] = l)$
  start at l

b a r b e r a b a ...
b a r b e r a b b ...

b a r b e r a b c ...
$L = R =$ b a r b e r a c c $
b a r b e r c b c ...
b a r b i

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{barberac}$

- **if** $(l = r)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] > l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] < l)$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] = l)$

Laufzeit

- LCP + SA: $\mathcal{O}(m + \log n)$ Vergleiche
- Beweisidee
  - l, r werden nur größer
  - Anzahl an redundanten Vergleichen pro Rekursion konstant

Suche mit Suffix-Arrays

Zusammenfassung

- Verlagerung des Aufwands von Anfrage in Vorverarbeitung
  - $\rightarrow$ einmal Suffix-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ danach Anfragen in $\mathcal{O}(m \log n)$ möglich, statt in $\mathcal{O}(m+n)$

  (gut, wenn auf einem Text viele Anfragen stattfinden)

- Verhindern redundanter Vergleiche
  - $\rightarrow$ einmal Suffix-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ einmal LCP-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ einmal erweitertes LCP-Array generieren in $\mathcal{O}(n \log n)$,
  - $\rightarrow$ danach Anfrage in $\mathcal{O}(m + \log n)$

- Ausnutzung der Eigenschaften des Suffix-Arrays
  - $\rightarrow$ jeder Substring ist Präfix eines Suffix
  - $\rightarrow$ alle Substrings liegen “sortiert” vor

    (mögliche Ausnahme: Substring ist Präfix von Substring)

  (das Suffix-Array indiziert alle Suffixe in sortierter Reihenfolge)

Ende!

Feierabend!

in-place Multikey Quicksort

Definitionen

- nach C-Standard ist ein `string` ist Zeiger auf char
  (die Daten werden als `char` Array mit *Sentinel* '\0' gespeichert)

```
void swap(int a, int b, char *x[]){                    //Dreieckstausch
 char *t=x[a];
 x[a]=x[b];
 x[b]=t;
}
```

```
#define i2c(i) x[i][depth]                             //Buchstabe an Stelle 'depth' aus i-tem String
```

```
void vecswap(int i, int j, int n, char *x[]) {         //Tausch der Sub-Arrays [i:i+n] und [j:j+n]
 while(n--> 0) {
  swap(i,j);
  i++; j++;
 }
}
```

in-place Multikey Quicksort

Algorithmus

```
void mkqsort( char *x[], int n, int depth){
 if(n <= 1) return;                                    //Weniger als zwei Strings zu sortieren?
 a = rand() % n;                                       //Wahl des Pivot-Elements
 swap(0,a,x);                                          //Pivot an den Anfang des Arrays verschieben
 v=i2c(0);                                             //Wert der aktuellen Stelle im Pivot
 a = b = 1;                                            //Anfang des zu sortierenden (Sub-)Arrays
 c = d = n-1;                                          //Ende des zu sortierenden (Sub-)Arrays
 while(true) {
  while(b <= c && (r = i2c(b) -v) <= 0) {              //Von links Elemente scannen, bis Char > Pivot
   if(r == 0) { swap(a,b,x); a++ }                     //Char == Pivot? Dann nach links kopieren
   b++;                                                //Grenze der gleichen Elemente eins nach rechts
  }
  while (b <= c && (r= i2c(c) -v) >= 0) {              //Von rechts Elemente scannen, bis Char < Pivot
   if(r == 0) { swap(c,d,x); d--; }                    //Char == Pivot? Dann nach rechts kopieren
   c--;                                                //Grenze der gleichen Elemente eins nach links
  }
  if(b>c) break;                                       //Zeiger aneinander vorbei? Dann Abbruch
  swap(b,c,x); b++; c--;                               //Inversion gefunden, tauschen, Zeiger je 1 weiter
 }
 r = min(a, b-a);     vecswap(0, b-r, r, x);          //"gleiche" Elemente von links zur Mitte kopieren
 r = min(d-c, n-d-1); vecswap(b, n-r, r, x);          //"gleiche" Elemente von recht zur Mitte kopieren
 r = b-a; mkqsort(x, r, depth);                       //"linke" Rekursion
 if(i2c(r) != 0) { mkqsort(x+r, a+n-d-1, depth+1); } //"mittlere" Rekursion, falls notwendig
 r = d-c; mkqsort(x+n-r, r, depth);                   //"rechte" Rekursion
}
```

[Bentley&Sedgewick1997]