Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
Hans-Peter Lehmann, Daniel Seemaier

6. Übungsblatt zu Algorithmen II im WS 2021/2022

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS21.php
{sanders, hans-peter.lehmann, daniel.seemaier}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Analyse+Rechnen: Vertex-Cover*)

Gegeben sei folgender Algorithmus zur Berechnung eines *vertex cover* C für einen Graph $G = (V, E)$:

1. Initialisiere die Ergebnismenge $C = \varnothing$ als leere Menge.
2. Wähle Kante $(u, v) \in E$ beliebig.
3. Füge u, v zu C hinzu.
4. Entferne u, v und alle inzidenten Kanten aus G.
5. Wiederhole solange G noch Kanten hat

Nach Abschluss des Algorithmus ist $C \subseteq V$ ein *vertex cover*, d.h. für jede Kante $(u, v) \in E$ ist einer ihrer beiden Knoten in C. Falls o.b.d.A. $u \in C$ sagt man auch Knoten u *überdeckt* Kante (u, v).

a) Zeigen Sie, dass der angegebene Algorithmus ein korrektes *vertex cover* berechnet.

b) Geben Sie ein Beispiel an, in dem der Algorithmus ein minimales *vertex cover* liefert.

c) Geben Sie ein Beispiel an, in dem der Algorithmus kein minimales *vertex cover* liefert.

d) Zeigen oder widerlegen Sie, dass der Algorithmus eine 2-Approximation für *vertex cover* berechnet, d.h. dass er höchstens doppelt soviele Knoten auswählt als minimal nötig.

Betrachten Sie abschließend diesen alternativen Algorithmus zur Bestimmung einer 2-Approximation von *vertex cover*:

1. Initialisiere die Ergebnismenge $C = \varnothing$ als leere Menge.
2. Wähle Knoten $u \in V$ mit minimalem Grad.
3. Füge u zu C hinzu.
4. Entferne u und alle inzidenten Kanten aus G
5. Wiederhole solange G noch Kanten hat

Der Algorithmus berechnet offenbar –mit ähnlichen Argumenten wie in Teilaufgabe (a)– ein *vertex cover*. Es bleibt folgende Frage zu beantworten:

e) Zeigen oder widerlegen Sie, dass der Algorithmus eine 2-Approximation für *vertex cover* berechnet, d.h. dass er höchstens doppelt soviele Knoten auswählt als minimal nötig.

Aufgabe 2 (*Kleinaufgaben: Laufzeiten*)

a) Sei $T(n, \varepsilon)$ die Laufzeit eines Approximationsalgorithmus und $g(n, \varepsilon)$ seine Approximationsgarantie. Geben Sie für die folgenden Fälle an, ob der Algorithmus ein PTAS, FPTAS oder keines von beiden ist. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

- $T_1(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot (4n^3 + n^2)$, $\quad g_1(n, \varepsilon) = (1 - \varepsilon)$
- $T_2(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot n^2$, $\quad g_2(n, \varepsilon) = (1 + 2\varepsilon)$
- $T_3(n, \varepsilon) = \sqrt{n} + n^{\frac{3}{2}}$, $\quad g_3(n, \varepsilon) = 2 + \frac{1}{n}$
- $T_4(n, \varepsilon) = n \cdot \log \frac{1}{\varepsilon}$, $\quad g_4(n, \varepsilon) = (1 - \varepsilon)$
- $T_5(n, \varepsilon) = \varepsilon + e^{\log n} + n^5$, $\quad g_5(n, \varepsilon) = (1 + \varepsilon)$
- $T_6(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}} + n^5$, $\quad g_6(n, \varepsilon) = (2 + \varepsilon)$

Anmerkung: Für $g_6(n, \epsilon)$ können Sie annehmen, dass der Approximationsalgorithmus mit beliebigem $\epsilon \in (-1, 0)$ spezifiziert werden kann.

b) Sei $f(n, k)$ die Laufzeit eines Algorithmus mit n der Eingabegröße des Problems und k ein beliebiger Parameter. Geben Sie an welche der folgenden Laufzeiten ein Problem *fixed-parameter-tractable* machen. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

- $f_1(n, k) = 3k^2n^2$
- $f_2(n, k) = n^k \cdot k^2 \cdot \sqrt{n^e}$
- $f_3(n, k) = 3n^2 + 2nk$
- $f_4(n, k) = e^k \cdot \sqrt{n}$
- $f_5(n, k) = e^n \cdot \sqrt{k}$
- $f_6(n, k) = k^3 \cdot \log n^2$

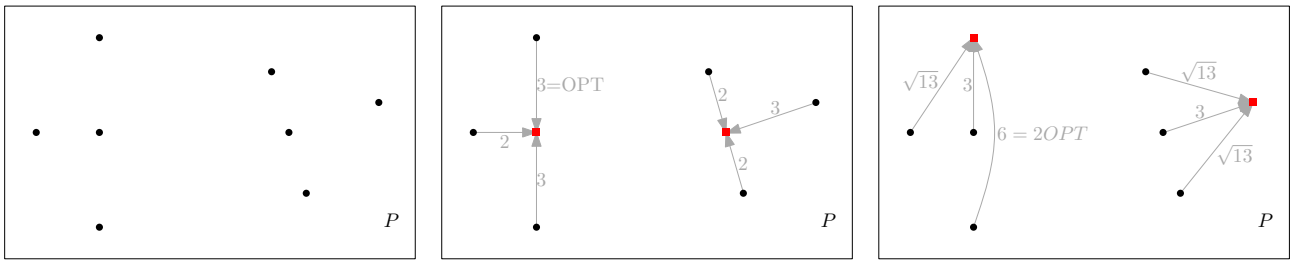
Aufgabe 3 (*Analyse: Metrisches k-Zentren Problem (*)*)

Gegeben sei eine Menge an Punkten $P \subset \mathbb{R}^2$ in der Ebene sowie eine Zahl $k > 0$. Gesucht ist eine k-elementige Teilmenge $K \subset P$ dieser Punkte, genannt Zentren, so dass für jeden Punkt $p \in P$ der maximale Abstand zu seinem nächstgelegenen Zentrum minimal ist.

Es existiert folgender *greedy* Algorithmus, der eine 2-Approximation des Problems berechnet:

1. Wähle beliebigen Punkt aus P als erstes Zentrum
2. Wähle Punkt aus P als nächstes Zentrum mit größter Entfernung zu allen bisherigen Zentren (d.h. der den maximalen kürzesten Abstand zu einem Zentrum besitzt)
3. Wiederhole bis k Zentren gewählt worden sind

Das folgende Beispiel veranschaulicht die Problemstellung für $k = 2$:



Links ist eine Punktmenge P abgebildet. In der Mitte ist eine optimale Lösung zu sehen. Die roten Quadrate sind die ausgewählten Zentren. Die Kanten geben das nächstgelegene Zentrum für jeden Knoten sowie den Abstand an. Rechts ist eine weitere aber suboptimale Lösung aufgezeigt.

Zunächst einige allgemeine Fragen zu diesem Algorithmus:

a) Beschreiben Sie in Worten, welche Bedeutung OPT sowie die Aussage eine Lösung sei eine 2-Approximation des metrischen k-Zentren Problems, haben.

b) Handelt es sich bei dem angegebenen Algorithmus um ein PTAS, ein FPTAS oder um keines von beiden? Begründen Sie kurz.

Im Folgenden soll gezeigt werdem, dass der Algorithmus tatsächlich eine 2-Approximation berechnet. Dafür sind zunächst einige Vorüberlegungen nötig.

c) Zeigen Sie, bei einer Auswahl von $k+1$ Punkten aus P existieren immer mindestens 2 Punkte, die das gleiche nächstgelegene Zentrum haben.

d) Gegeben eine optimale Lösung, wie groß kann der Abstand zwischen zwei Punkten maximal sein, wenn diese das gleiche nächstgelegene Zentrum besitzen?

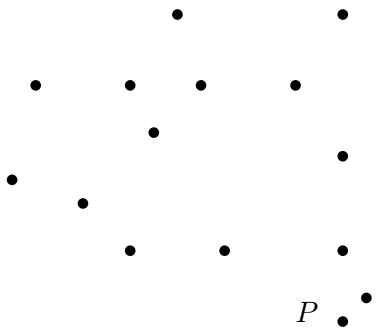
e) In einer Lösung des *greedy* Algorithmus sei der maximale Abstand eines Punktes $p \notin K$ zu seinem nächstgelegenen Zentrum $> l$. Zeigen Sie, dass l eine untere Schranke für den Abstand zwischen je zwei der Zentren $k_i,\ k_j \in K,\ i \neq j$ der Lösung darstellt.

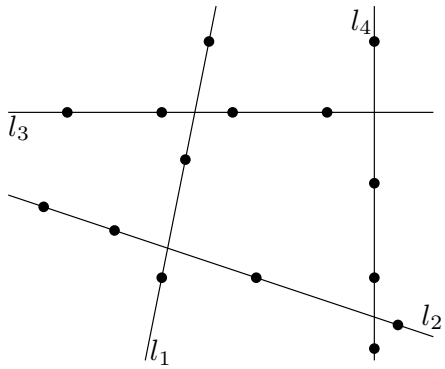
f) Zeigen Sie mit obigen Aussagen, dass der angegebene *greedy* Algorithmus eine 2-Approximation für das Problem berechnet. Nehmen Sie dazu an, in der Lösung des Algorithmus sei der maximale Abstand eines Punktes $p \notin K$ zu seinem nächstgelegenen Zentrum $> 2 \cdot OPT$, und führen Sie diese Aussage zum Widerspruch.

   Hinweis: Machen Sie zunächst eine Aussage über die paarweisen Abstände von $k+1$ speziell gewählten Punkten. Verwenden Sie anschließend einen Vergleich zu Abständen in der optimalen Lösung, um zum Widerspruch zu gelangen.

Aufgabe 4 (*Analyse:* line shooting *Problem*)

Gegeben seien n Punkte $P \subset \mathbb{R}^2$ in der Ebene sowie eine Zahl $k > 0$. Das *line shooting* Problem besteht darin zu bestimmen, ob es eine Menge L von k Geraden gibt, so dass jeder Punkt in P von mindestens einer dieser Geraden getroffen wird. Eine Probleminstanz wird durch das Tupel (P, k) charakterisiert.
In den Bildern sehen Sie links eine Punktmenge P und rechts eine mögliche Lösung für $(P, 4)$.





a) Begründen Sie kurz, warum eine Gerade l, die mehr als k Punkte trifft, Teil einer Lösung für die Probleminstanz (P, k) sein muss bei beliebigem P.

b) Begründen Sie kurz, warum die Instanz $(P, 3)$ des *line shooting* Problems keine Lösung besitzt mit P wie in obiger Abbildung.

c) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Instanz (P, k) des *line shooting* Problems exakt löst für beliebiges P. Bauen Sie dazu einen Suchbaum mit beschränkter Tiefe auf, der alle Kombination von k Geraden, die jeweils mindestens zwei Punkte treffen, generiert. Die Suchbaumtiefe und der Verzweigungsgrad sollen dabei polynomiell in k, der Aufwand pro Knoten polynomiell in $n = |P|$ sein.

   Hinweise: Verwalten Sie in jedem Knoten des Suchbaumes k Einträge, die jeweils bis zu zwei Punkte halten können (und damit eine Gerade definieren). Ein Suchbaum der Höhe $O(k)$ genügt.

d) Zeigen Sie, dass das *line shooting* Problem *fixed parameter tractable* bezüglich k ist. Geben Sie dazu die asymptotische Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von n und k an.

Ausgabe: 10.01.2022
Abgabe: keine Abgabe, keine Korrektur