Algorithmen II

Peter Sanders, Florian Kurpicz

Übungen:

Hans-Peter Lehmann, Daniel Seemaier

Institut für Theoretische Informatik

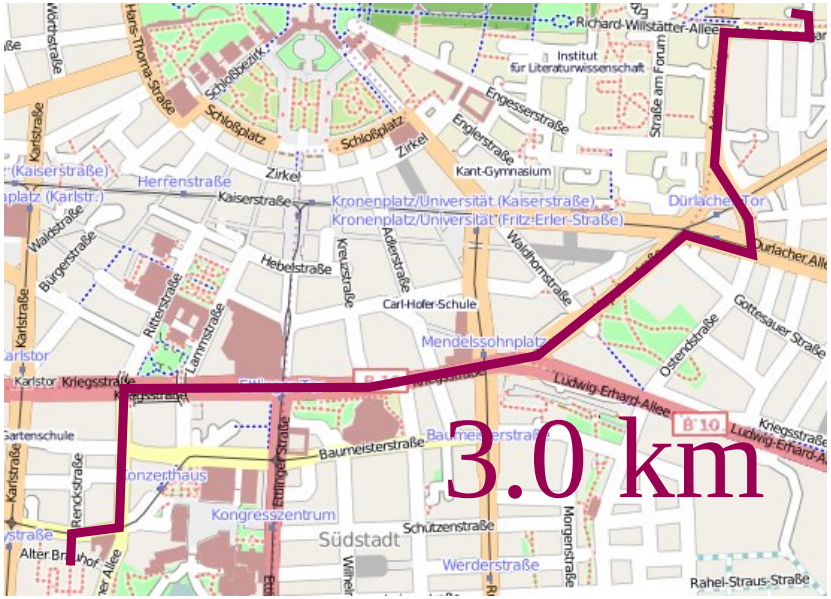
Web:

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS21.php`

Fortgeschrittene Graphenalgorithmen

3 Kürzeste Wege

Folien teilweise von Rob van Stee



Eingabe: Graph $G = (V, E)$

Kostenfunktion/Kantengewicht $c : E \to \mathbb{R}$

Anfangsknoten s.

Ausgabe: für alle $v \in V$

Länge $\mu(v)$ des kürzesten Pfades von s nach v,

$\mu(v) := \min\{c(p) : p \text{ ist Pfad von } s \text{ nach } v\}$

mit $c(\langle e_1, \ldots, e_k \rangle) := \sum_{i=1}^{k} c(e_i)$.

Oft wollen wir auch "‘geeignete"’ Repräsentation der kürzesten Pfade.

Allgemeine Definitionen

Wie bei BFS benutzen wir zwei Knotenarrays:

- $d[v]$ = aktuelle (vorläufige) Distanz von s nach v

  Invariante: $d[v] \geq \mu(v)$

- parent$[v]$ = Vorgänger von v

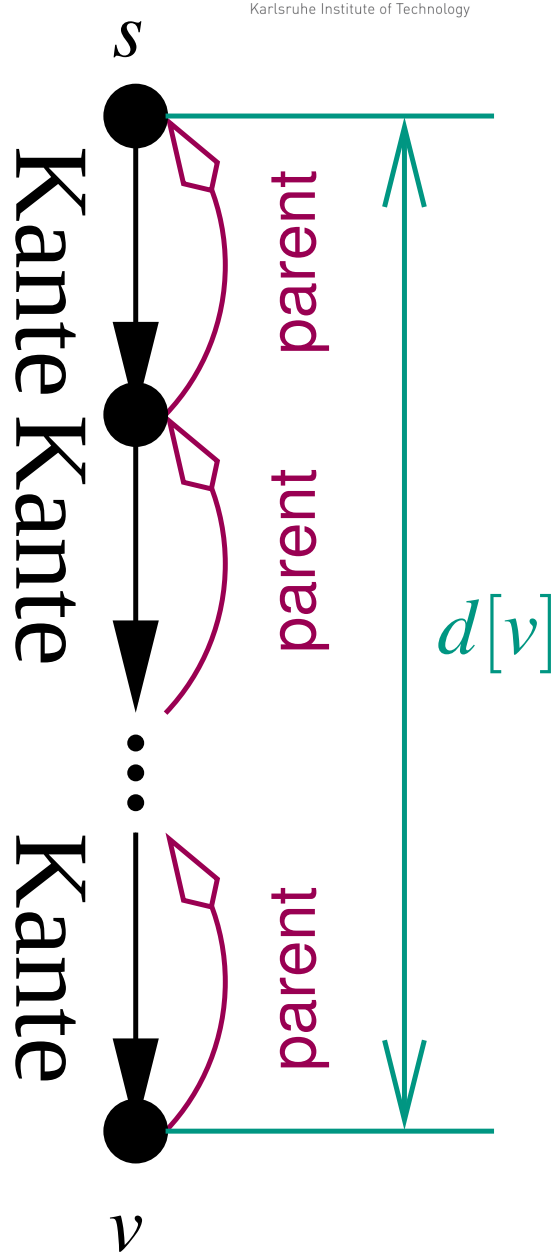
  auf dem (vorläufigen) kürzesten Pfad von s nach v

  Invariante: dieser Pfad bezeugt $d[v]$

Initialisierung:

$d[s] = 0$, parent[s] $= s$

$d[v] = \infty$, parent$[v] = \perp$



Kante (u,v) relaxieren

falls $d[u]+c(u,v)<d[v]$

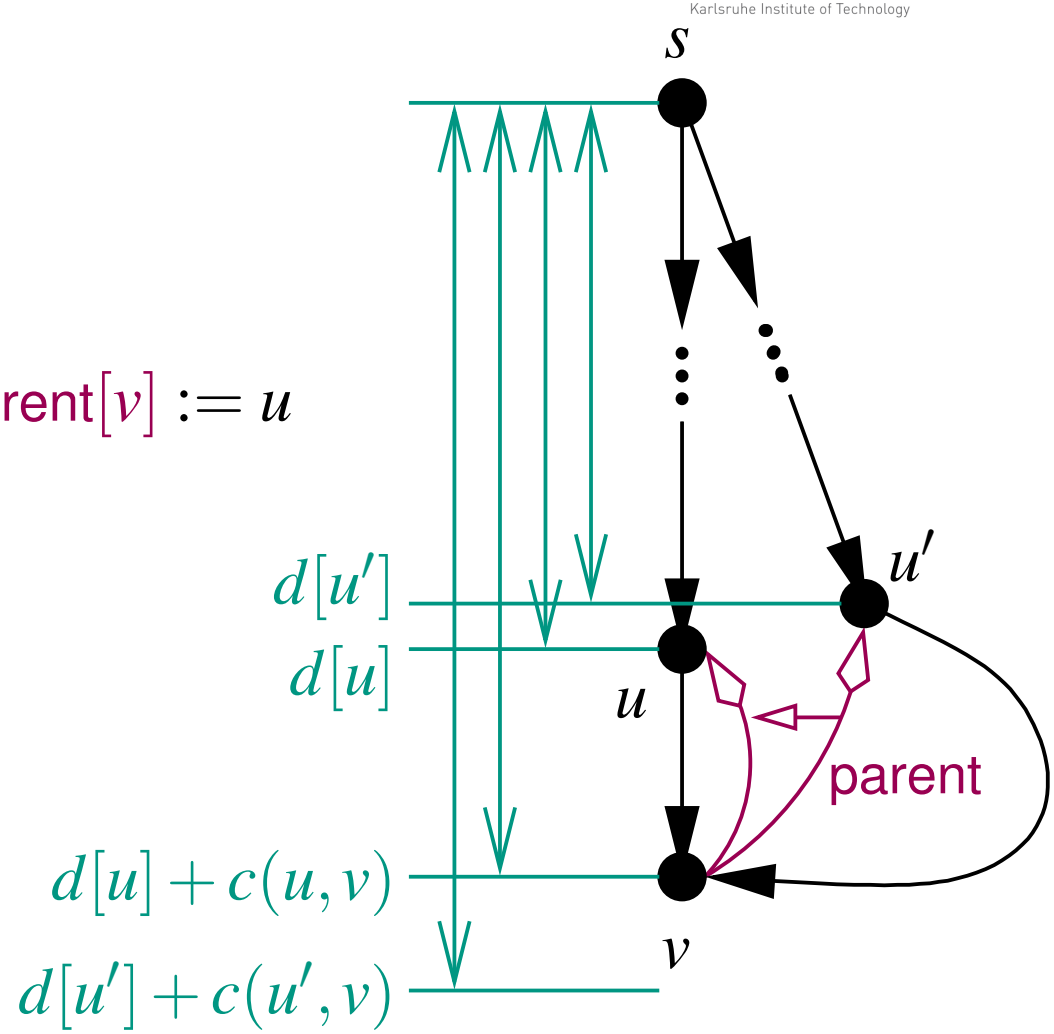
vielleicht $d[v]=\infty$

setze $d[v]:=d[u]+c(u,v)$ und parent$[v]:=u$

Invarianten bleiben erhalten!

Beobachtung:

$d[v]$ Kann sich mehrmals ändern!



Dijkstra's Algorithmus: Pseudocode

initialize d, parent

all nodes are non-scanned

while $\exists$ non-scanned node u with $d[u] < \infty$

  $u :=$ non-scanned node v with minimal $d[v]$

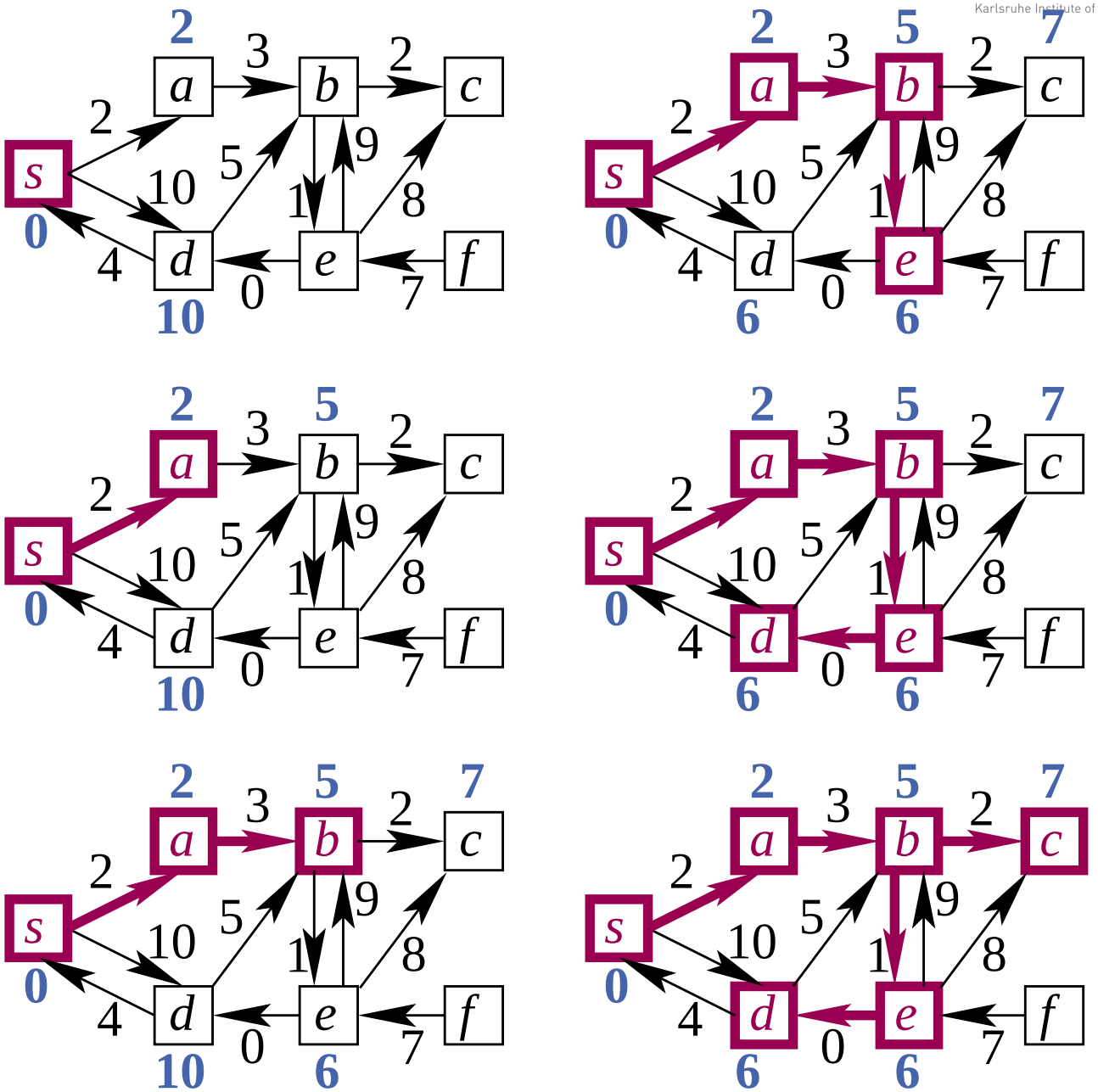
  relax all edges (u, v) out of u

  u is scanned now

Behauptung: Am Ende definiert d die optimalen Entfernungen und parent die zugehörigen Wege (siehe Algo I:)

- v erreichbar $\Longrightarrow$ v wird irgendwann gescannt
- v gescannt $\Longrightarrow$ $\mu(v) = d[v]$

Beispiel



Laufzeit

$$T_{\text{Dijkstra}} = \mathrm{O}(m \cdot T_{\text{decreaseKey}}(n) + n \cdot (T_{\text{deleteMin}}(n) + T_{\text{insert}}(n)))$$

Mit Fibonacci-Heapprioritätslisten:

- insert $\mathrm{O}(1)$
- decreaseKey $\mathrm{O}(1)$
- deleteMin $\mathrm{O}(\log n)$ (amortisiert)

$$\begin{aligned} T_{\text{DijkstraFib}} &= \mathrm{O}(m \cdot 1 + n \cdot (\log n + 1)) \\ &= \mathrm{O}(m + n \log n) \end{aligned}$$

Aber: konstante Faktoren in $\mathrm{O}(\cdot)$ sind hier größer als bei binären Heaps!

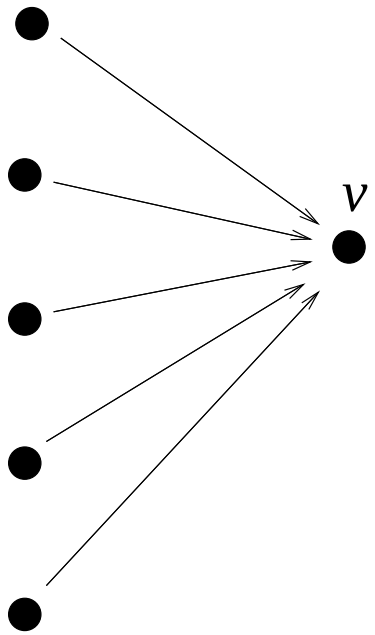
Laufzeit im Durchschnitt

Bis jetzt: $\leq m$ decreaseKeys ($\leq 1\times$ pro Kante)

Wieviel decreaseKeys im Durchschnitt?

Modell:

- Beliebiger Graph G
- Beliebiger Anfangsknoten s
- Beliebige Mengen $C(v)$ von Kantengewichten für eingehende Kanten von Knoten v



indegree(v)=5
C(v)={c_1,..., c_5}

Gemittelt wird über alle Zuteilungen

$C(v) \rightarrow$ eingehende Kanten von v

Beispiel: alle Kosten unabhängig identisch verteilt

Laufzeit im Durchschnitt

Probabilistische Sichtweise: Zufällige gleichverteilte Auswahl der zu mittelnden Eingaben.

$\Longrightarrow$

wir suchen den Erwartungswert der Laufzeit

Frage: Unterschied zu erwarteter Laufzeit bei randomisierten Algorithmen ?

Laufzeit im Durchschnitt

Theorem 1. $\mathbb{E}[\#\textit{decreaseKey-Operationen}] = \mathrm{O}\left(n \log \frac{m}{n}\right)$

Dann

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(T_{\text{DijkstraBHeap}}) &= \mathrm{O}\left(m + n \log \frac{m}{n} \cdot T_{\text{decreaseKey}}(n)\right. \\
&\quad \left. + n \cdot (T_{\text{deleteMin}}(n) + T_{\text{insert}}(n))\right) \\
&= \mathrm{O}\left(m + n \log \frac{m}{n} \log n + n \log n\right) \\
&= \mathrm{O}\left(m + n \log \frac{m}{n} \log n\right)
\end{aligned}
$$

(wir hatten vorher $T_{\text{DijkstraBHeap}} = \mathrm{O}((m+n)\log n)$)

($T_{\text{DijkstraFib}} = \mathrm{O}(m + n \log n)$ schlechtester Fall)

Lineare Laufzeit für dichte Graphen

$m = \Omega(n \log n \log\log n) \Rightarrow$ lineare Laufzeit.

(nachrechnen)

Also hier u. U. besser als Fibonacci heaps

Theorem 1. $\mathbb{E}[\#\mathit{decreaseKey\text{-}Operationen}] = \mathrm{O}\left(n \log \frac{m}{n}\right)$

Theorem 1. $\mathbb{E}[\#\textit{decreaseKey-Operationen}] = \mathrm{O}\left(n \log \frac{m}{n}\right)$

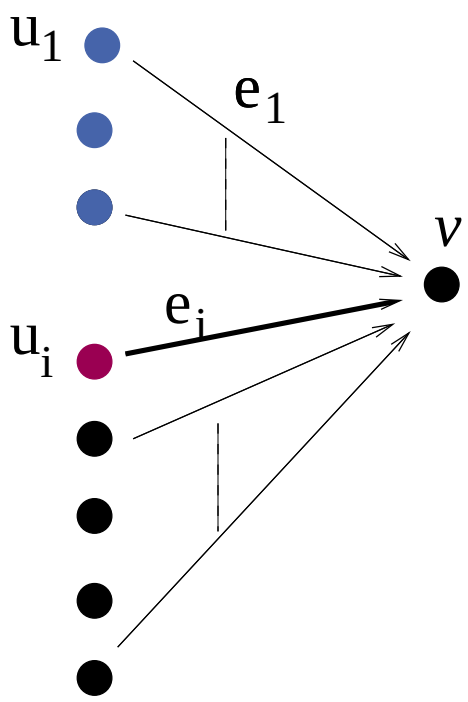
decreaseKey bei Bearbeitung von e_i nur wenn

$$\mu(u_i) + c(e_i) < \min_{j<i}(\mu(u_j) + c(e_j)).$$

Aber $\mu(u_i) \geq \mu(u_j)$ für $j < i$, also muss gelten:

$$c(e_i) < \min_{j<i} c(e_j).$$

Präfixminimum



Theorem 1. $\mathbb{E}[\#\mathit{decreaseKey\text{-}Operationen}] = \mathrm{O}\left(n \log \frac{m}{n}\right)$

Kosten in $C(v)$ erscheinen in zufälliger Reihenfolge

Wie oft findet man ein neues Minimum bei zufälliger Reihenfolge?

Harmonische Zahl H_k (Sect. 2.8, s.u.)

Erstes Minimum: führt zu insert(v).

Also $\leq H_k - 1 \leq (\ln k + 1) - 1 = \ln k$ erwartete decreaseKeys

Theorem 1. $\mathbb{E}[\#\mathit{decreaseKey\text{-}Operationen}] = \mathrm{O}\left(n \log \frac{m}{n}\right)$

Für Knoten $v \leq H_k - 1 \leq \ln k$ decreaseKeys (erwartet) mit $k = \text{indegree}(v)$.

Insgesamt

$$\sum_{v \in V} \ln \text{indegree}(v) \leq n \ln \frac{m}{n}$$

(wegen Konkavität von $\ln x$)

Präfixminima einer Zufallsfolge

Definiere Zufallsvariable M_n als Anzahl Präfixminima einer Folge von n verschiedenen Zahlen (in Abhängigkeit von einer Zufallspermutation)

Definiere Indikatorzufallsvariable $I_i := 1$ gdw. die i-te Zahl ein Präfixminimum ist.

$$\mathrm{E}[M_n] = \mathrm{E}[\sum_{i=1}^{n} I_i] \overset{\text{Lin. } \mathrm{E}[\cdot]}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[I_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = H_n \text{ wegen } \mathbb{P}[I_i = 1] = \frac{1}{i}$$

$$\underbrace{x_1, \ldots, x_{i-1}}_{<x_i?}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

Monotone ganzzahlige Prioritätslisten

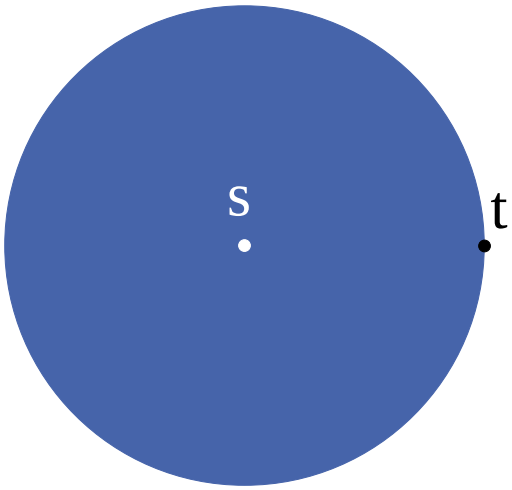
Grundidee: Datenstruktur auf Anwendung zuschneiden

Dijkstra's Algorithmus benutzt die Prioritätsliste monoton:

Operationen insert und decreaseKey benutzen Distanzen der Form

$d[u] + c(e)$

Dieser Wert nimmt ständig zu



Monotone ganzzahlige Prioritätslisten

Annahme: Alle Kantengewichte sind ganzzahlig und im Interval $[0, C]$

$\Longrightarrow \forall v \in V : d[v] \leq (n-1)C$

Es gilt sogar:

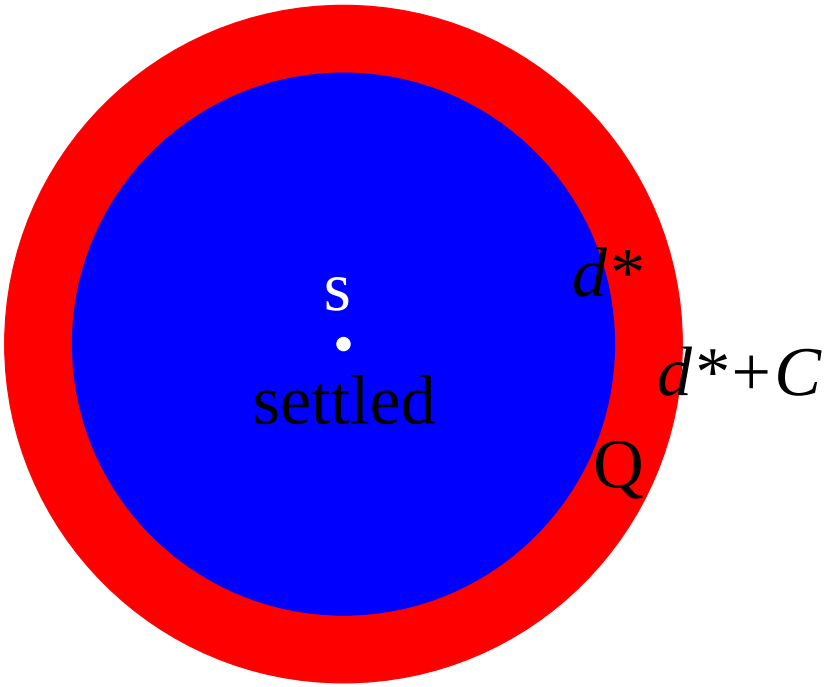
Sei d^* der letzte Wert,

der aus Q entfernt wurde.

In Q sind immer

nur Knoten mit Distanzen im

Interval $[d^*, d^* + C]$.

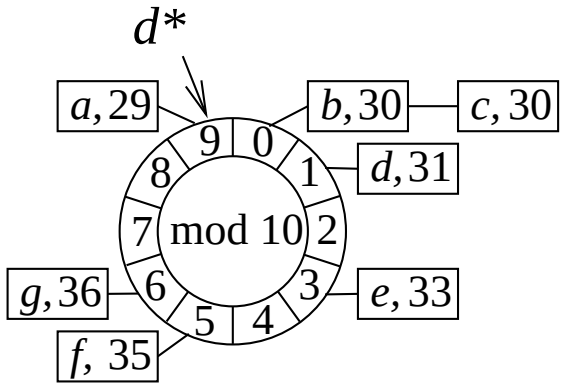


Bucket-Queue

Zyklisches Array B von $C+1$ doppelt verketteten Listen

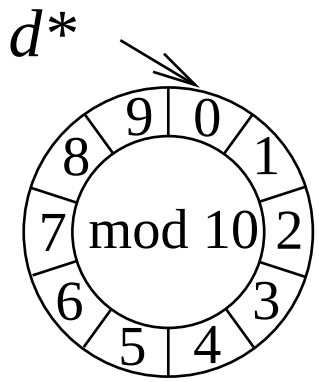
Knoten mit Distanz $d[v]$ wird in $B[d[v] \mod (C+1)]$ gespeichert.

Bucket queue with C = 9



Content=
<(a,29), (b,30), (c,30), (d,31)
(e,33), (f,35), (g,36)>

Operationen



Initialisierung: $C+1$ leere Listen, $d^* = 0$

insert(v): fügt v in $B[d[v] \mod (C+1)]$ ein $\mathrm{O}(1)$

decreaseKey(v): entfernt v aus seiner Liste und fügt es ein in $B[d[v] \mod (C+1)]$ $\mathrm{O}(1)$

deleteMin: fängt an bei Bucket $B[d^* \mod (C+1)]$. Falls der leer ist, $d^* := d^* + 1$, wiederhole. erfordert Monotonizität!

d^* nimmt höchstens nC mal zu, höchstens n Elemente werden insgesamt aus Q entfernt $\Rightarrow$

Gesamtkosten deleteMin-Operationen $= \mathrm{O}(n + nC) =$ $\mathrm{O}(nC)$.

Genauer: $\mathrm{O}(n + \text{maxPathLength})$

Laufzeit Dijkstra mit Bucket-Queues

$$
\begin{aligned}
T_{\text{Dijkstra}} &= \mathrm{O}(m \cdot T_{\text{decreaseKey}}(n) \\
&\quad + \text{Kosten deleteMin-Operationen} \\
&\quad + n \cdot T_{\text{insert}}(n))) \\
T_{\text{DijkstraBQ}} &= \mathrm{O}(m \cdot 1 + nC + n \cdot 1)) \\
&= \mathrm{O}(m + nC) \text{ oder auch} \\
&= \mathrm{O}(m + \text{maxPathLength})
\end{aligned}
$$

Mit Radix-Heaps finden wir sogar $T_{\text{DijkstraRadix}} = \mathrm{O}(m + n \cdot \log C)$

Idee: nicht alle Buckets gleich groß machen

Radix-Heaps

Wir verwenden die Buckets -1 bis K, für $K = 1 + \lfloor \log C \rfloor$

$d^* =$ die zuletzt aus Q entfernte Distanz

Für jeden Knoten $v \in Q$ gilt $d[v] \in [d^*, \ldots, d^* + C]$.

Betrachte binäre Repräsentation der möglichen Distanzen in Q.

Nehme zum Beispiel $C = 9$, binär 1001. Dann $K = 4$.

Beispiel 1: $d^* = 10000$, dann $\forall v \in Q : d[v] \in [10000, 11001]$

Beispiel 2: $d^* = 11101$, dann $\forall v \in Q : d[v] \in [11101, 100110]$

Speichere v in Bucket $B[i]$ falls $d[v]$ und d^* sich zuerst an der $i$ten Stelle unterscheiden, (in $B[K]$ falls $i > K$, in $B[-1]$ falls sie sich nicht unterscheiden)

Definition $msd(a,b)$

Die Position der höchstwertigen Binärziffer wo a und b sich unterscheiden

a	11001010	1010100	1110110
b	11000101	1010110	1110110
msd(a,b)	3	1	-1

$msd(a,b)$ können wir mit Maschinenbefehlen sehr schnell berechnen

Radix-Heap-Invariante

v ist gespeichert in Bucket $B[i]$ wo $i = \min(msd(d^*, d[v]), K)$.

Beispiel 1: $d^* = 10000$, $C = 9$, $K = 4$

Bucket	$d[v]$ binär	$d[v]$
-1	10000	16
0	10001	17
1	1001*	18,19
2	101**	20–23
3	11***	24–25
4	-	-

(In Bucket 4 wird nichts gespeichert)

Radix-Heap-Invariante

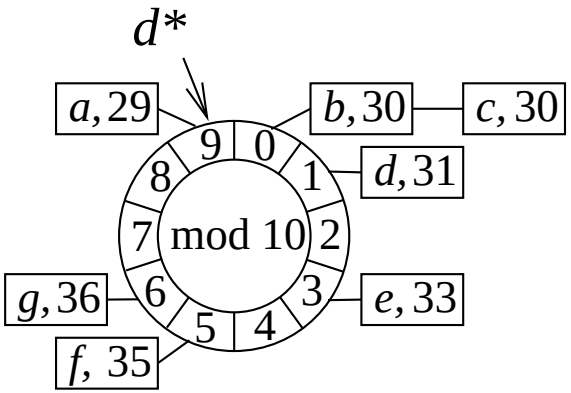
v ist gespeichert in Bucket $B[i]$ wo $i = \min(msd(d^*, d[v]), K)$.

Beispiel 2: $d^* = 11101$, $C = 9$, dann $K = 4$

Bucket	$d[v]$ binär	$d[v]$
-1	11101	29
0	-	-
1	1111*	30,31
2	-	-
3	-	-
4	100000 und höher	32 und höher

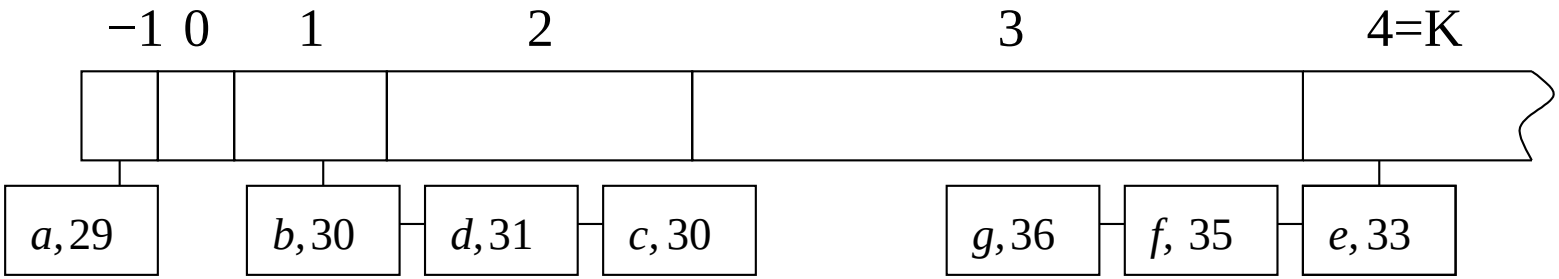
Falls $d[v] \geq 32$, dann $msd(d^*, d[v]) > 4$!

Bucket-Queues und Radix-Heaps



Bucket queue with C = 9

Content=
<(a,29), (b,30), (c,30), (d,31), (e,33), (f,35), (g,36)>



Binary Radix Heap

Radix Heap: deleteMin

Function deleteMin: Element

  if $B[-1] = \emptyset$

    i:= $\min\{j \in 0..K : B[j] \neq \emptyset\}$

    move $\min B[i]$ to $B[-1]$ and to d^*

    foreach $e \in B[i]$ **do** // exactly here invariant is violated !

      move e to $B[\min(msd(d^*, d[e]), K)]$

  result:= $B[-1]$.popFront

  return result

$B[0], \ldots, B[i-1]$: leer, also nichts zu tun.

$B[i+1], \ldots, B[K]$: msd bleibt erhalten, weil altes und neues d^* **gleich** für alle Bits $j > i$

Buckets $j > i$ bei Änderung von d^*

Beispiel: $d^* = 10000$, $C = 9$, $K = 4$.

Neues $d^* = 10010$, war in Bucket 1

	$d^* = 10000$		$d^* = 10010$	
Bucket	$d[v]$ binär	$d[v]$	$d[v]$ binär	$d[v]$
-1	10000	16	10010	18
0	10001	17	10011	19
1	1001*	18,19	-	-
2	101**	20–23	101**	20-23
3	11***	24–25	11***	24-27
4	-	-	-	-

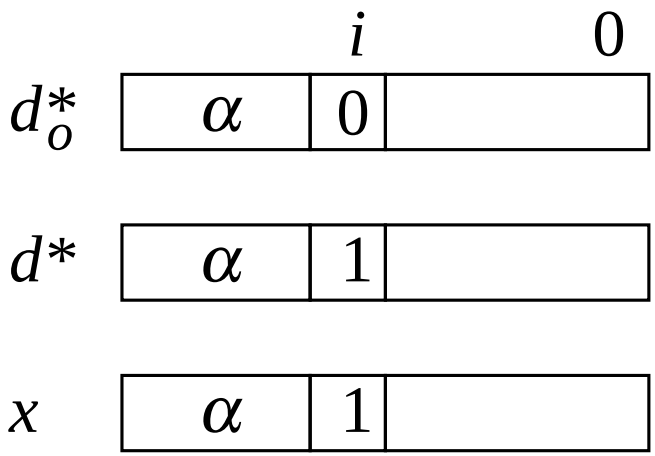
Bucket $B[i]$ bei Änderung von d^*

Lemma: Elemente x aus $B[i]$ gehen zu Buckets mit kleineren Indices

Wir zeigen nur den Fall $i < K$.

Sei d_o^* der alte Wert von d^*.

Case $i<K$



Kosten der deleteMin-Operationen

Bucket $B[i]$ finden: $\mathrm{O}(i)$

Elemente aus $B[i]$ verschieben: $\mathrm{O}(|B[i]|)$

Insgesamt $\mathrm{O}(K + |B[i]|)$ falls $i \geq 0$, $\mathrm{O}(1)$ falls $i = -1$

Verschiebung erfolgt immer nach kleineren Indices

Wir zahlen dafür schon beim insert (amortisierte Analyse):

es gibt höchstens K Verschiebungen eines Elements

Laufzeit Dijkstra mit Radix-Heaps

Insgesamt finden wir amortisiert

- $T_{\text{insert}}(n) = \mathrm{O}(K)$
- $T_{\text{deleteMin}}(n) = \mathrm{O}(K)$
- $T_{\text{decreaseKey}}(n) = \mathrm{O}(1)$

$$\begin{aligned} T_{\text{Dijkstra}} &= \mathrm{O}(m \cdot T_{\text{decreaseKey}}(n) + n \cdot (T_{\text{deleteMin}}(n) + T_{\text{insert}}(n))) \\ T_{\text{DijkstraRadix}} &= \mathrm{O}(m + n \cdot (K + K)) = \mathrm{O}(m + n \cdot \log C) \end{aligned}$$

Lineare Laufzeit für zufällige Kantengewichte

Vorher gesehen: Dijkstra mit binary heaps hat lineare Laufzeit für dichte Graphen ($m > n \log n \log\log n$)

Letzte Folie: $T_{\text{DijkstraRadix}} = \mathrm{O}(m + n \cdot \log C)$

Jetzt: Dijkstra mit Radix-Heaps hat lineare Laufzeit ($\mathrm{O}(m+n)$) falls Kantenkosten identisch uniform verteilt in $0..C$

– wir brauchen nur eine kleine Änderung im Algorithmus

Änderung im Algorithmus für zufällige Kantengewichte

Vorberechnung von $c^{in}_{\min}(v) := \min\{c((u,v) : (u,v) \in E\}$ leichtestes eingehendes Kantengewicht.

Beobachtung: $d[v] \leq d^* + c^{in}_{\min}(v)$
$\Longrightarrow d[v] = \mu(v)$.
$\Longrightarrow$ schiebe v in Menge F ungescannter Knoten mit korrekter Distanz

Knoten in F werden bei nächster Gelegenheit gescannt.
($\approx F$ als Erweiterung von $B[-1]$.)

Analyse

Ein Knoten v kommt nie in einem Bucket i mit $i < \log c^{in}_{\min}(v)$

Also wird v höchstens $K + 1 - \log c^{in}_{\min}(v)$ mal verschoben

Kosten von Verschiebungen sind dann insgesamt höchstens

$$\sum_v (K - \log c^{\text{in}}_{\min}(v) + 1) = n + \sum_v (K - \log c^{\text{in}}_{\min}(v)) \leq n + \sum_e (K - \log c(e)).$$

$K - \log c(e) =$ Anzahl Nullen am Anfang der binären Repräsentation von $c(e)$ als K-Bit-Zahl.

$\mathbb{P}(K - \log c(e) = i) = 2^{-i} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(K - \log c(e)) = \sum_{i \geq 0} i 2^{-i} \leq 2$

Laufzeit $= \mathrm{O}(m + n)$

All-Pairs Shortest Paths

Bis jetzt gab es immer einen bestimmten Anfangsknoten s

Wie können wir kürzeste Pfade für alle Paare (u,v) in G bestimmen?

Annahme: negative Kosten erlaubt, aber keine negativen Kreise

Lösung 1: n mal Bellman-Ford ausführen

…Laufzeit $\mathrm{O}\left(n^2 m\right)$

Lösung 2: Knotenpotentiale

…Laufzeit $\mathrm{O}\left(nm + n^2 \log n\right)$, deutlich schneller

Knotenpotentiale

Jeder Knoten bekommt ein Potential $\text{pot}(v)$

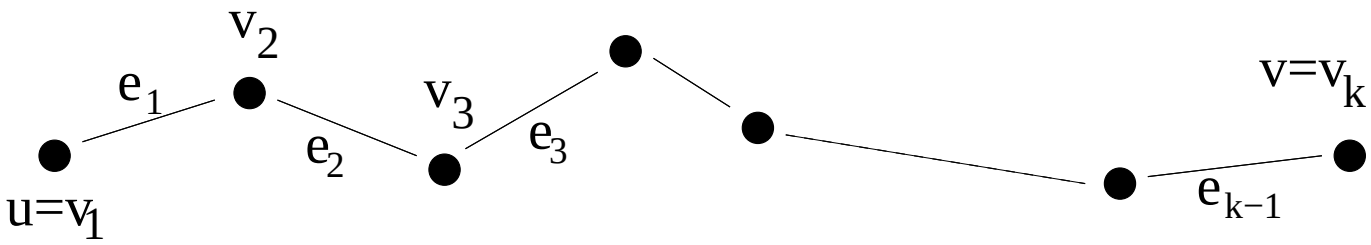
Mit Hilfe der Potentiale definieren wir reduzierte Kosten $\bar{c}(e)$ für Kante $e = (u, v)$ als

$$\bar{c}(e) = \text{pot}(u) + c(e) - \text{pot}(v).$$

Mit diesen Kosten finden wir die gleichen kürzesten Pfade wie vorher!

Gilt für alle möglichen Potentiale – wir können sie also frei definieren

Knotenpotentiale



Sei p ein Pfad von u nach v mit Kosten $c(p)$. Dann

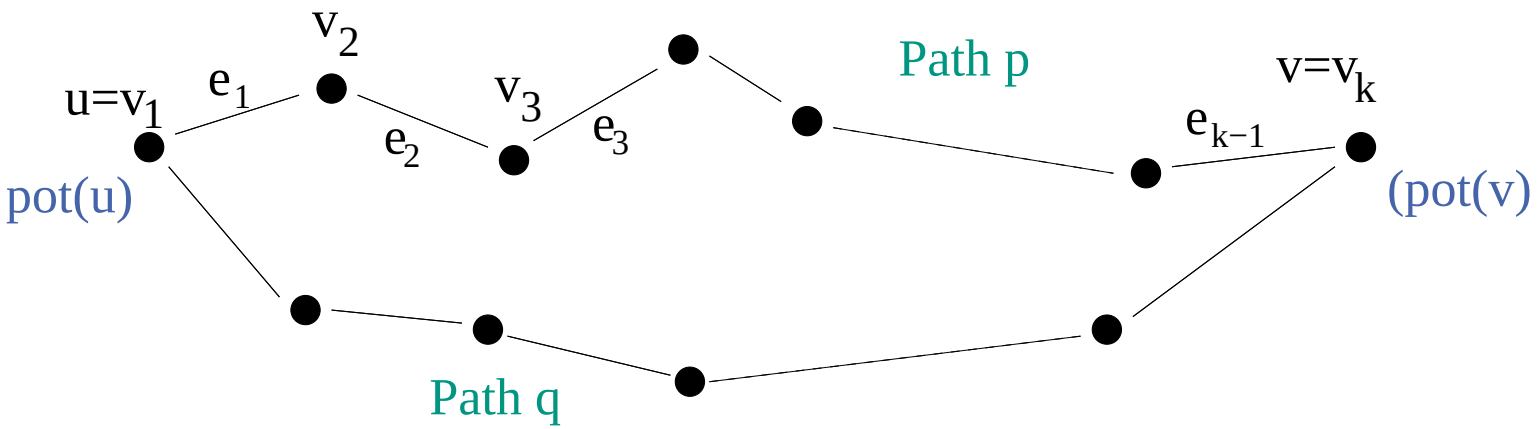
$$\begin{aligned}
\bar{c}(p) &= \sum_{i=1}^{k-1} \bar{c}(e_i) = \sum_{i=1}^{k-1} (\mathrm{pot}(v_i) + c(e_i) - \mathrm{pot}(v_{i+1})) \\
&= \mathrm{pot}(v_1) + \sum_{i=1}^{k-1} c(e_i) - \mathrm{pot}(v_k) \\
&= \mathrm{pot}(v_1) + c(p) - \mathrm{pot}(v_k).
\end{aligned}$$

Knotenpotentiale

Sei p ein Pfad von u nach v mit Kosten $c(p)$. Dann

$$\bar{c}(p) = \text{pot}(v_1) + c(p) - \text{pot}(v_k).$$

Sei q ein anderer u-v-Pfad, dann $c(p) \leq c(q) \Leftrightarrow \bar{c}(p) \leq \bar{c}(q)$.



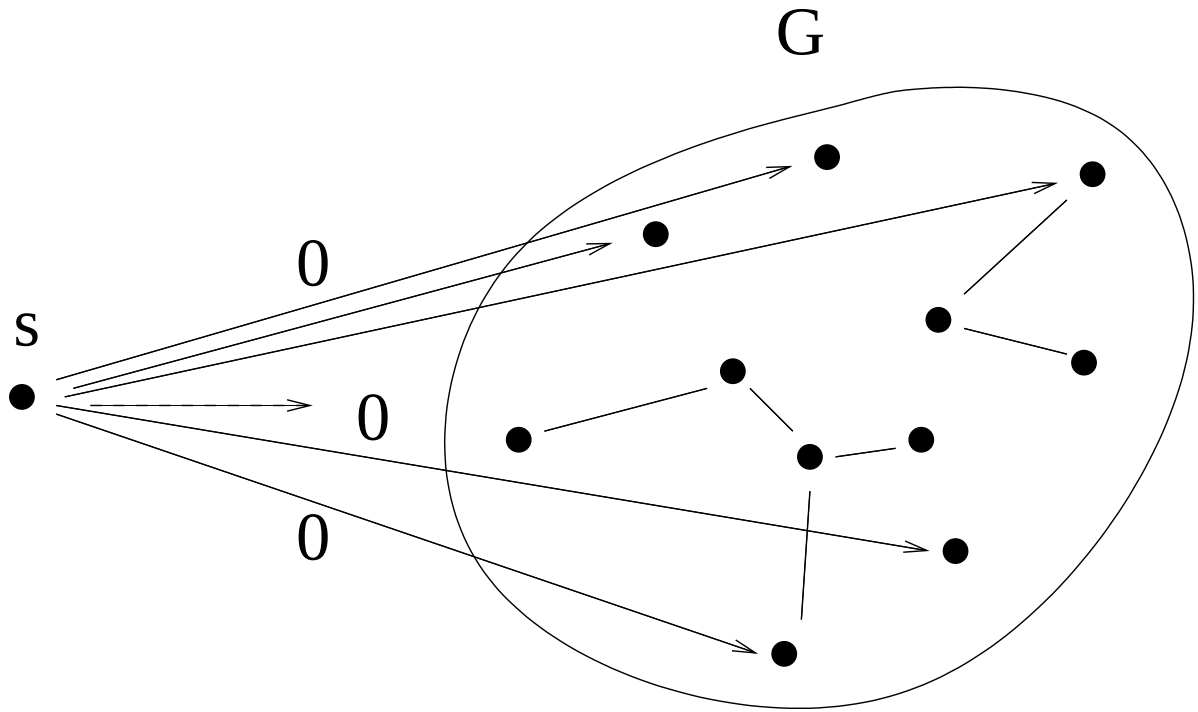
Definition: $\mu(u,v) =$ kürzeste Distanz von u nach v

Hilfsknoten

Wir fügen einen Hilfsknoten s an G hinzu

Für alle $v \in V$ fügen wir eine Kante (s, v) hinzu mit Kosten 0

Berechne kürzeste Pfade von s aus mit Bellman-Ford



Definition der Potentiale

Definiere $\text{pot}(v) := \mu(v)$ für alle $v \in V$

Jetzt sind die reduzierten Kosten alle nicht negativ: also können wir Dijkstra benutzen! (Evtl. s wieder entfernen...)

- Keine negativen Kreise, also $\text{pot}(v)$ wohldefiniert
- Für beliebige Kante $e = (u, v)$ gilt

$$\mu(u) + c(e) \geq \mu(v)$$

deshalb

$$\bar{c}(e) = \underbrace{\mu(u) + c(e)}_{\geq \mu(v)} - \mu(v) \geq 0$$

Algorithmus

All-Pairs Shortest Paths in the Absence of Negative Cycles

neuer Knoten s

foreach $v \in V$ **do** füge Kante (s,v) ein (Kosten 0) // $\mathrm{O}(n)$

pot:= μ:= BellmanFordSSSP(s,c) // $\mathrm{O}(nm)$

foreach Knoten $x \in V$ **do** // $\mathrm{O}(n(m+n\log n))$

$\bar{\mu}(x,\cdot)$:= DijkstraSSSP$(x,\bar{c})$

// zurück zur ursprünglichen Kostenfunktion

foreach $e=(v,w) \in V \times V$ **do** // $\mathrm{O}(n^2)$

$\mu(v,w)$:= $\bar{\mu}(v,w) + \mathrm{pot}(w) - \mathrm{pot}(v)$

Laufzeit

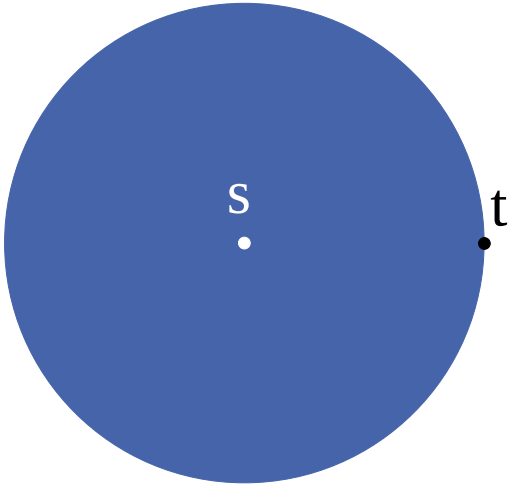
- s hinzufügen: $\mathrm{O}(n)$
- Postprocessing: $\mathrm{O}\left(n^2\right)$ (zurück zu den ursprünglichen Kosten)
- n mal Dijkstra dominiert

Laufzeit $\mathrm{O}(n(m+n\log n)) = \mathrm{O}\left(nm+n^2\log n\right)$

Auch parallelisierbar: par. Bellman–Ford $+$ unabhängige SSSP-Suchen. Speicherplatz?

Distanz zu einem Zielknoten t

Was machen wir, wenn wir nur die Distanz von s zu einem bestimmten Knoten t wissen wollen?



Trick 0:

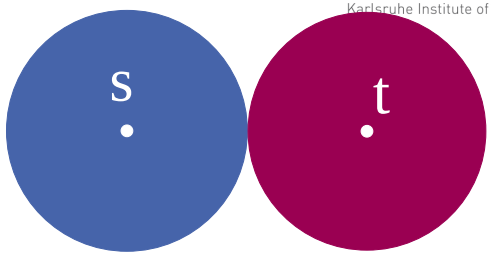
Dijkstra hört auf, wenn t aus Q entfernt wird

Spart “im Durchschnitt” Hälfte der Scans

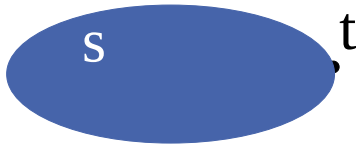
Frage: Wieviel spart es (meist) beim Europa-Navi?

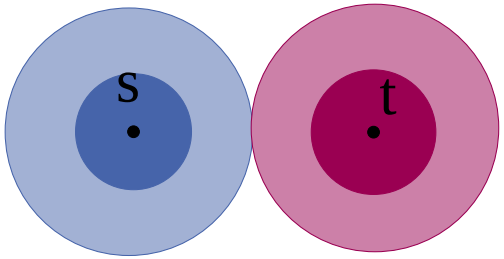
Ideen für Routenplanung

- ☐ Vorwärts + Rückwärtssuche

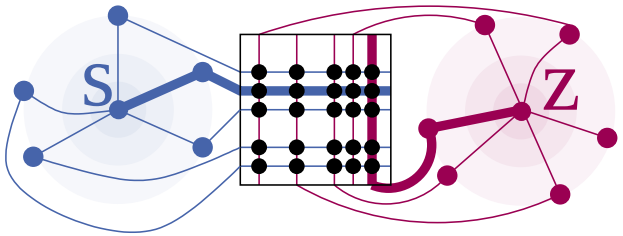


- ☐ **Zielgerichtete Suche**



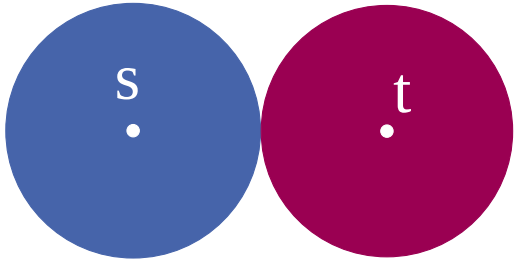


- ☐ Hierarchien ausnutzen



- ☐ Teilabschnitte tabellieren

Bidirektionale Suche



Idee: Suche abwechselnd s und t

Vorwärtssuche auf normalem Graph $G = (V, E)$

Rückwärtssuche auf Rückwärtsgraph $G^r = (V, E^r)$

(Suchrichtungen wechseln in jedem Schritt)

Vorläufige kürzeste Distanz wird in jedem Schritt gespeichert:

$$d[s,t] = \min(d[s,t],\ d_{\text{forward}}[u] + d_{\text{backward}}[u])$$

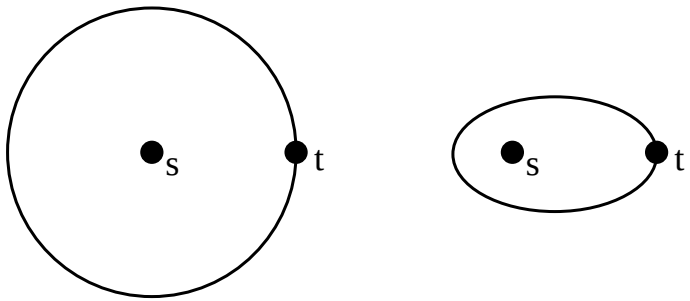
Abbruchkriterium:

Suche scannt Knoten, der in anderer Richtung bereits gescannt wurde.

$$d[s,t] \Rightarrow \mu(s,t)$$

A^*-Suche

Idee: suche “in die Richtung von t”

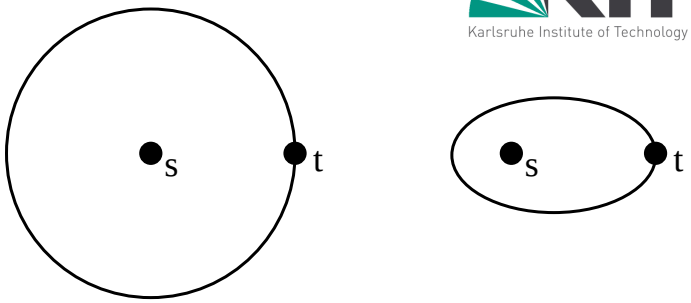


Annahme: Wir kennen eine Funktion $f(v)$ die $\mu(v,t)$ schätzt $\forall v$

Definiere pot$(v) = f(v)$ und $\bar{c}(u,v) = c(u,v) + f(v) - f(u)$

[Oder: in Dijkstra’s Algorithmus, entferne nicht v mit minimalem $d[v]$ aus Q, sondern v mit minimalem $d[v] + f[v]$]

A^*-Suche



Idee: suche “in die Richtung von t”

Annahme: wir kennen eine Funktion $f(v)$ die $\mu(v,t)$ schätzt $\forall v$

Definiere $\text{pot}(v) = f(v)$ und $\bar{c}(u,v) = c(u,v) + f(v) - f(u)$

Beispiel: $f(v) = \mu(v,t)$.

Dann gilt: $\bar{c}(u,v) = c(u,v) + \mu(v,t) - \mu(u,t) = 0$ falls (u,v) auf dem kürzesten Pfad von s nach t liegt.

$$s \to \cdots \to \underbrace{u \xrightarrow{c(u,v)} \overbrace{v \to \cdots \to t}^{\mu(v,t)}}_{\mu(u,t)}$$

Also scannt Dijkstra nur die Knoten auf diesem Pfad!

Benötigte Eigenschaften von $f(v)$

- Konsistenz (reduzierte Kosten nicht negativ):
  $c(e) + f(v) \geq f(u)\ \forall e = (u,v)$
- $f(v) \leq \mu(v,t)\ \forall v \in V$
- $f(t) = 0$ dann können wir aufhören, wenn t aus Q entfernt wird

Sei p irgendein Pfad von s nach t.

Alle Kanten auf p sind relaxiert? $\Rightarrow d[t] \leq c(p)$.

Sonst: $\exists v \in p \cap Q$, und $d[t] + f(t) \leq d[v] + f(v)$ weil t schon entfernt wurde. Deshalb

$$d[t] = d[t] + f(t) \leq d[v] + f(v) \leq d[v] + \mu(v,t) \leq c(p)$$

Wie finden wir $f(v)$?

Wir brauchen Heuristiken für $f(v)$.

Strecke im Straßennetzwerk: $f(v) =$ euklidischer Abstand $||v-t||_2$

bringt deutliche aber nicht überragende Beschleunigung

Fahrzeit: $\dfrac{||v-t||_2}{\text{Höchstgeschwindigkeit}}$ praktisch nutzlos

Noch besser aber mit Vorberechnung: Landmarks

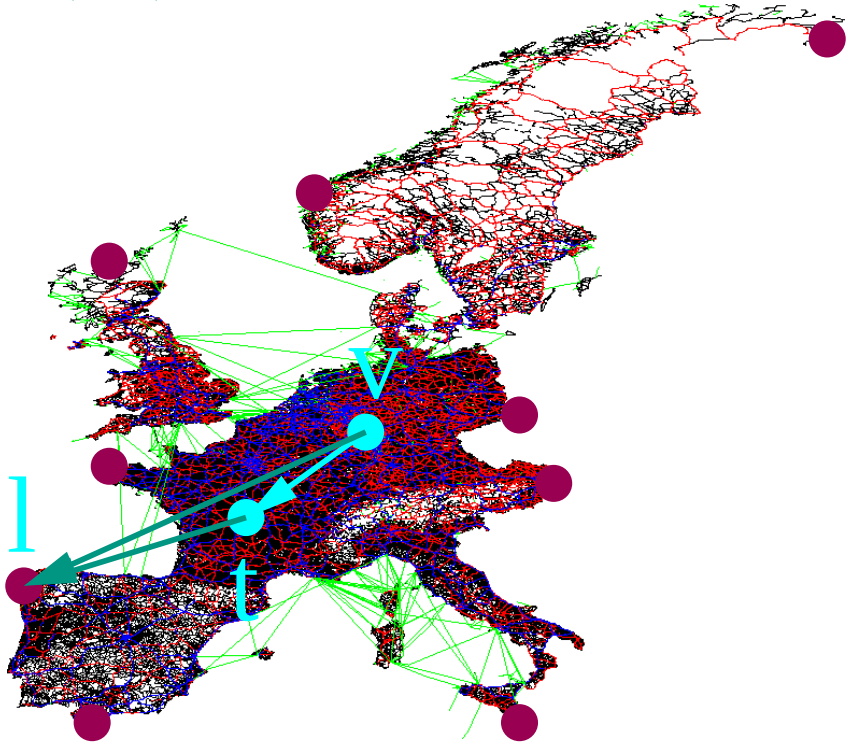
Landmarks [Goldberg Harrelson 2003]

Vorberechnung: Wähle Landmarkmenge L. $\forall \ell \in L, v \in V$ berechne/speichere $\mu(v,\ell)$.

Query: Suche Landmark $\ell \in L$ "hinter" dem Ziel.

Benutze untere Schranke $f_\ell(v) = \mu(v,\ell) - \mu(t,\ell)$

+ Konzeptuell einfach
+ Erhebliche Beschleunigungen ($\approx$ Faktor 20 im Mittel)
+ Kombinierbar mit anderen Techniken
− Landmarkauswahl kompliziert
− hoher Platzverbrauch



Zusammenfassung Kürzeste Wege

- Nichtriviale Beispiele für Analyse im Mittel. Ähnlich für MST
- Monotone, ganzzahlige Prioritätslisten als Beispiel wie Datenstrukturen auf Algorithmus angepasst werden
- Knotenpotentiale allgemein nützlich in Graphenalgorithmen
- Aktuelle Forschung trifft klassische Algorithmik