Karlsruher Institut für Technologie

Übung 8 – Algorithmen II

Hans-Peter Lehmann, Daniel Seemaier – *{hans-peter.lehmann, daniel.seemaier}@kit.edu*

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS21.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

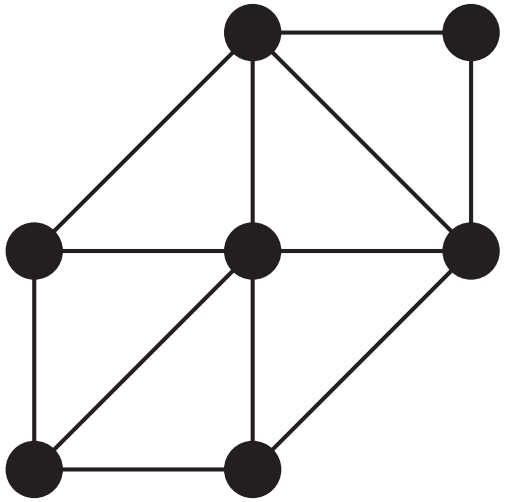
Themenübersicht

- Wiederholung: Matchings
- Approximationsalgorithmen
- Parameterisierte Algorithmen

Matching

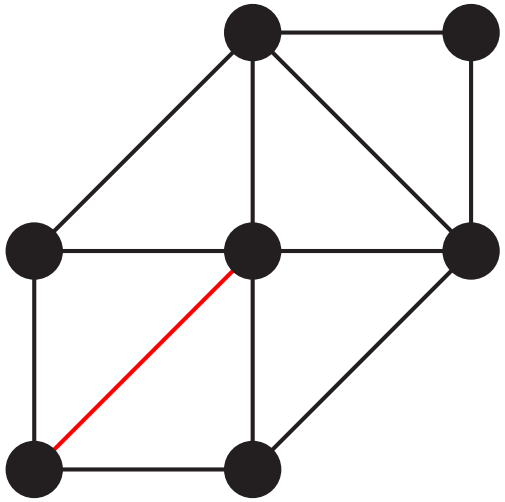
Matching

- Teilmenge von Kanten eines Graphen
- Kein Knoten inzident zu mehr als einer (gematchten) Kante
- **Kardinalität**: Zahl der Kanten im Matching
- **Maximal**: keine Kante hinzunehmbar
- **Maximum**: kein Matching hat größere Kardinalität
- **Perfekt**: jeder Knoten ist Endpunkt einer gematchten Kante
- Maximum Matching im allgemeinen über alternierende Pfade berechnet



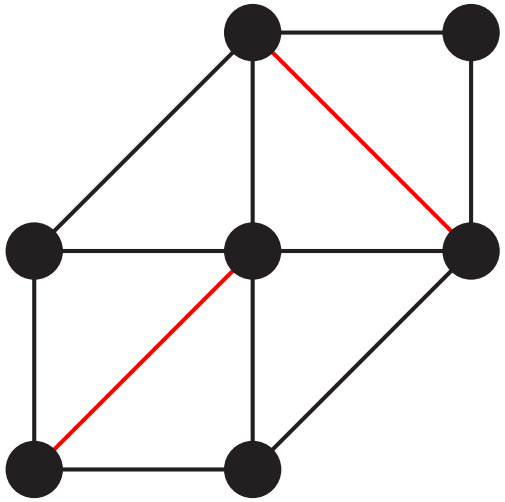
Matching

- Teilmenge von Kanten eines Graphen
- Kein Knoten inzident zu mehr als einer (gematchten) Kante
- **Kardinalität**: Zahl der Kanten im Matching
- **Maximal**: keine Kante hinzunehmbar
- **Maximum**: kein Matching hat größere Kardinalität
- **Perfekt**: jeder Knoten ist Endpunkt einer gematchten Kante
- Maximum Matching im allgemeinen über alternierende Pfade berechnet



Matching

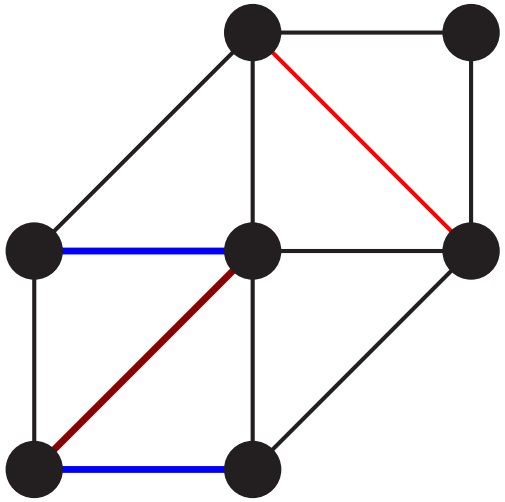
- Teilmenge von Kanten eines Graphen
- Kein Knoten inzident zu mehr als einer (gematchten) Kante
- **Kardinalität**: Zahl der Kanten im Matching
- **Maximal**: keine Kante hinzunehmbar
- **Maximum**: kein Matching hat größere Kardinalität
- **Perfekt**: jeder Knoten ist Endpunkt einer gematchten Kante
- Maximum Matching im allgemeinen über alternierende Pfade berechnet



maximal aber nicht maximum

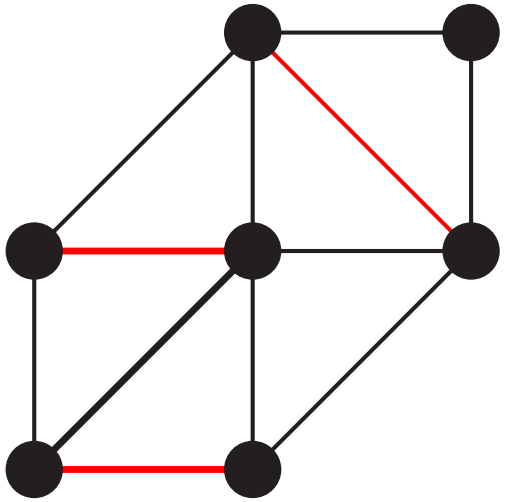
Matching

- Teilmenge von Kanten eines Graphen
- Kein Knoten inzident zu mehr als einer (gematchten) Kante
- **Kardinalität**: Zahl der Kanten im Matching
- **Maximal**: keine Kante hinzunehmbar
- **Maximum**: kein Matching hat größere Kardinalität
- **Perfekt**: jeder Knoten ist Endpunkt einer gematchten Kante
- Maximum Matching im allgemeinen über alternierende Pfade berechnet



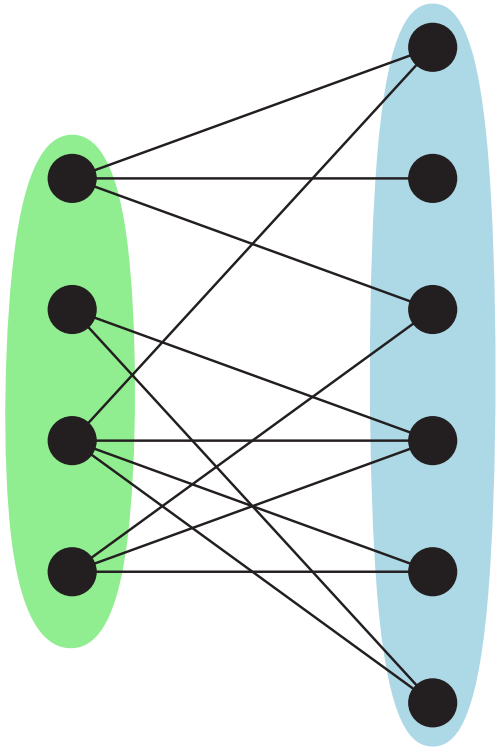
Matching

- Teilmenge von Kanten eines Graphen
- Kein Knoten inzident zu mehr als einer (gematchten) Kante
- **Kardinalität**: Zahl der Kanten im Matching
- **Maximal**: keine Kante hinzunehmbar
- **Maximum**: kein Matching hat größere Kardinalität
- **Perfekt**: jeder Knoten ist Endpunkt einer gematchten Kante
- Maximum Matching im allgemeinen über alternierende Pfade berechnet



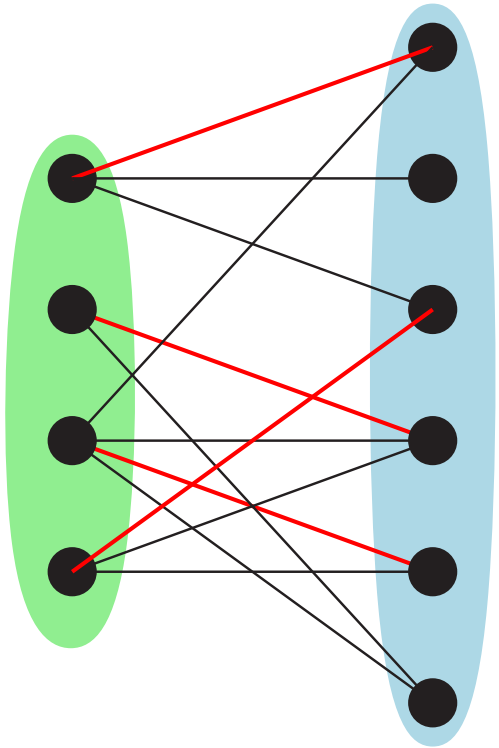
Bipartite - Matching

- Bipartiter Graph: zwei Gruppen von Knoten, Kanten nicht innerhalb einer Gruppe
- Modelliere als Flussproblem
- Fluss zwischen den Teilmengen entspricht gematchten Kanten



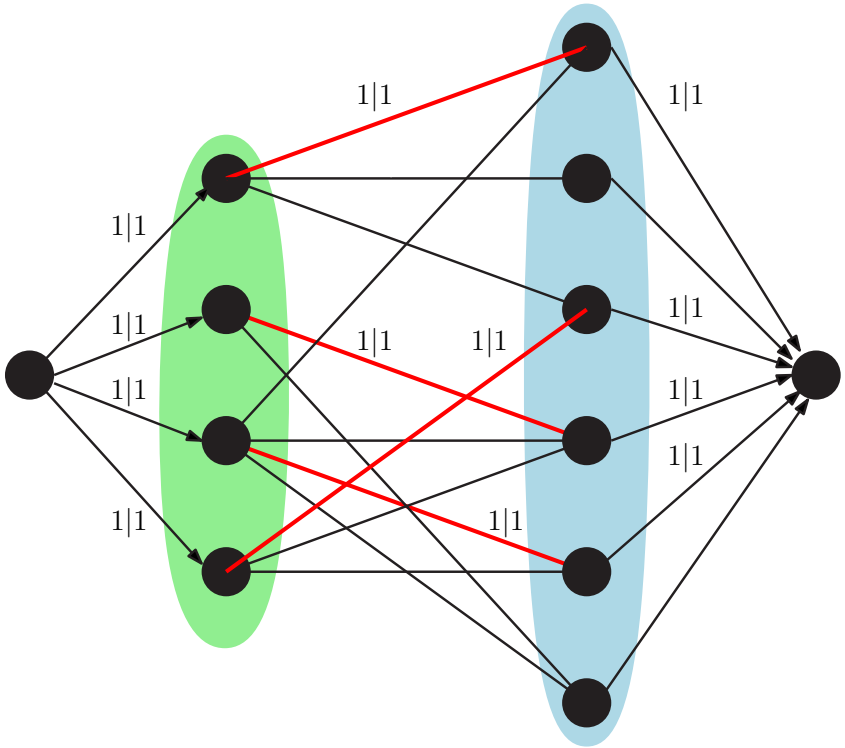
Bipartite - Matching

- Bipartiter Graph: zwei Gruppen von Knoten, Kanten nicht innerhalb einer Gruppe
- Modelliere als Flussproblem
- Fluss zwischen den Teilmengen entspricht gematchten Kanten



Bipartite - Matching

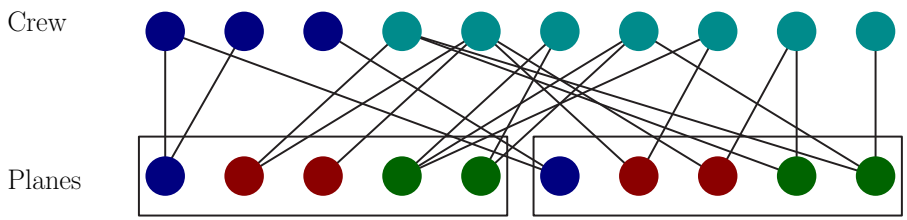
- Bipartiter Graph: zwei Gruppen von Knoten, Kanten nicht innerhalb einer Gruppe
- Modelliere als Flussproblem
- Fluss zwischen den Teilmengen entspricht gematchten Kanten



Matching

Anwendungen

- Anwendungen in sämtlichen Zuweisungsproblemen
- ...Jobs auf Maschinen
- ...Crewscheduling

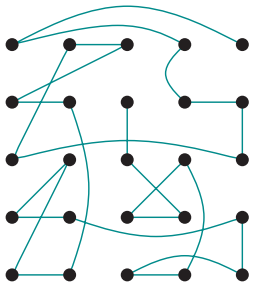


Approximationsalgorithmen

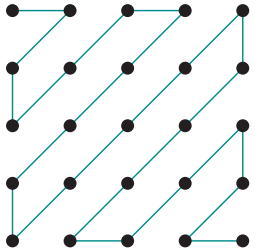
Grundlagen

Warum Lösungen abschätzen?

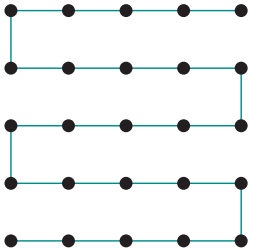
- es gibt “schwierige” Probleme z.B. TSP mit exponentieller Laufzeit
  - → exakte Berechnung nicht möglich zu unseren Lebzeiten
- vernünftige Näherungen effizient berechnen
  - → exakte/optimale Ergebnisse nicht immer wichtig
  - → “gute” Lösungen genügen oft
  - → aber Abstand zur korrekten Lösung wissenswert



Weglänge “lang”



Weglänge $8 + 16\sqrt{2}$



Weglänge 24

Approximationsalgorithmen

Gütemaß

- Ein Algorithmus *ALG* hat einen Approximationsfaktor ρ, wenn gilt

$$\frac{w\left(ALG(I)\right)}{w\left(OPT(I)\right)} \leq \rho$$

f.a. Probleminstanzen I, OPT optimale Lösung, w Bewertungsfunktion

für Minimierungsprobleme $\Rightarrow \rho > 1$, für Maximierungsprobleme $\Rightarrow \rho < 1$

Beispiel:

- *ALG* schätzt Distanz von Strecke x auf nächste Zweierpotenz $2^{\lceil \log |x| \rceil}$
- *OPT* bestimmt korrekte Distanz $|x|$

$$\Rightarrow \frac{w(ALG)}{w(OPT)} = \frac{2^{\lceil \log |x| \rceil}}{|x|} \leq \frac{2^{\log |x|+1}}{|x|} = \frac{2|x|}{|x|} = 2 = \rho$$

Zahlenbeispiel: $|x| = 2^{10} + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2^{11}}{2^{10}+1} = 2 - \frac{2}{2^{10}+1} \approx 2$

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

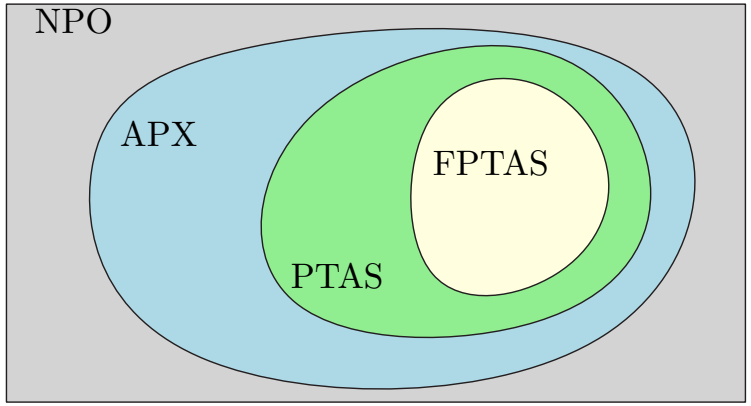
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX *approximable*
$\rho = const.$, T polynomiell in n

PTAS *polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS *fully polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

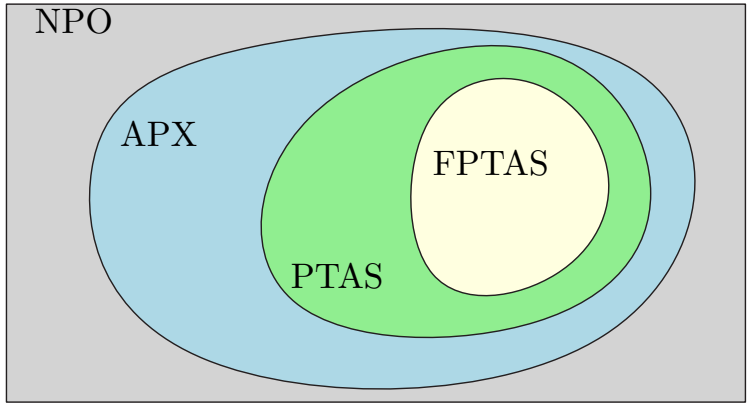
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX *approximable*
$\rho = const.$, T polynomiell in n

PTAS *polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS *fully polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

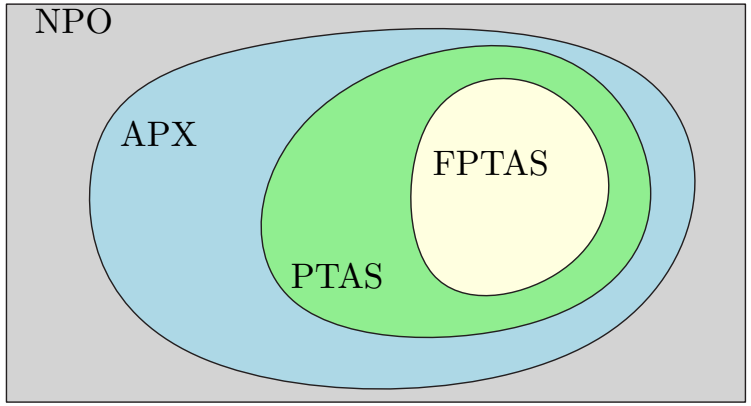
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX *approximable*
$\rho = const.$, T polynomiell in n

PTAS *polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS *fully polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ (PTAS)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$

Approximationsalgorithmen

Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

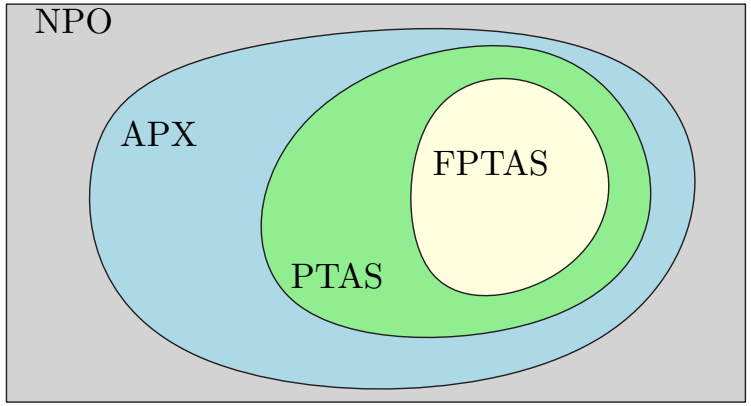
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX *approximable*
$\rho = const.$, T polynomiell in n

PTAS *polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS *fully polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ (PTAS)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$ (FPTAS)

Approximationsalgorithmen

TSP

Hamiltonkreis

- Besucht alle Knoten genau 1x
- Ohne Kantengewichte
- Trivial auf vollständigem Graph, sonst NP-hart

Minimum Traveling Salesman Problem

- Kürzester Hamiltonkreis
- Selbst auf vollständigem Graph NP-hart

Approximationsalgorithmen

TSP

Hamiltonkreis

- Besucht alle Knoten genau 1x
- Ohne Kantengewichte
- Trivial auf vollständigem Graph, sonst NP-hart

Minimum Traveling Salesman Problem

- Kürzester Hamiltonkreis
- Selbst auf vollständigem Graph NP-hart

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Problemstellung

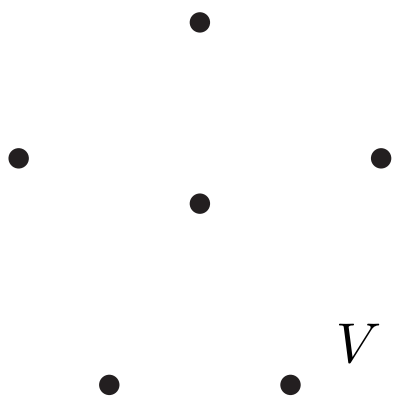
- Gegeben eine Menge an Punkten V in der Ebene
- Vollständiger Graph
- Kantengewichte erfüllen Dreiecks-Ungleichung
- Finde Kreis minimaler Länge, der alle Punkte abläuft

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$

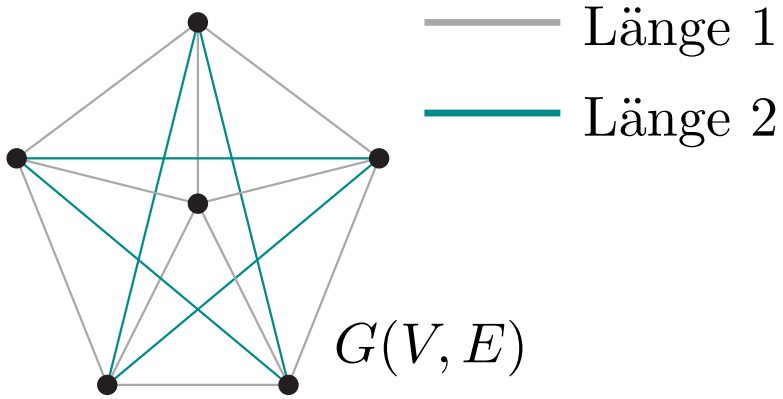


Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$

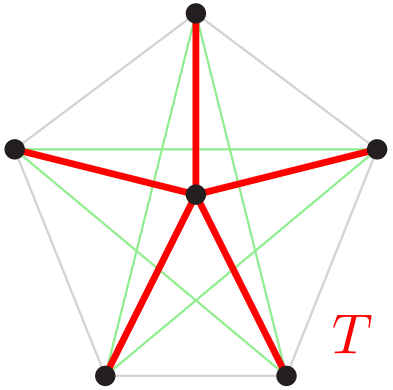


Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$

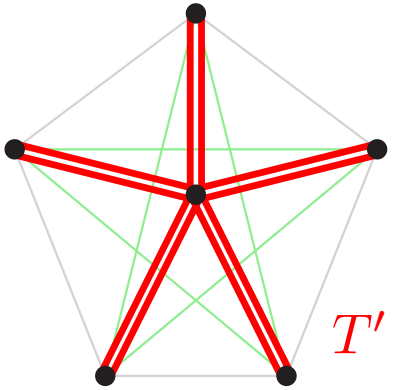


Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$

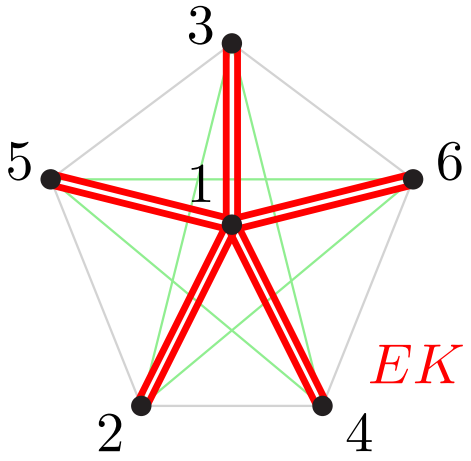


Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$



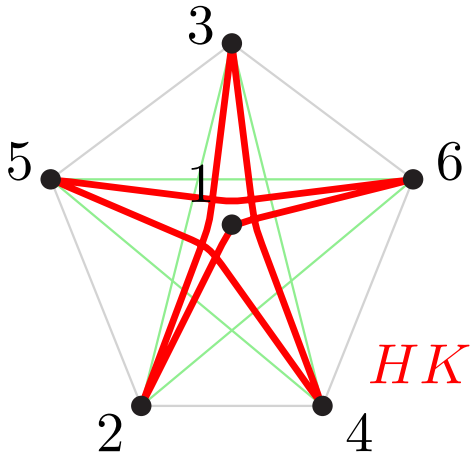
Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$



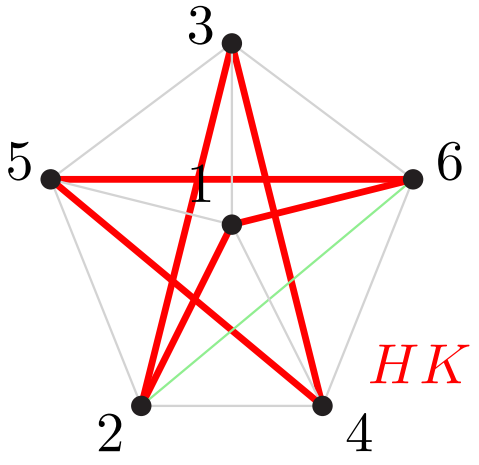
Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK

  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$



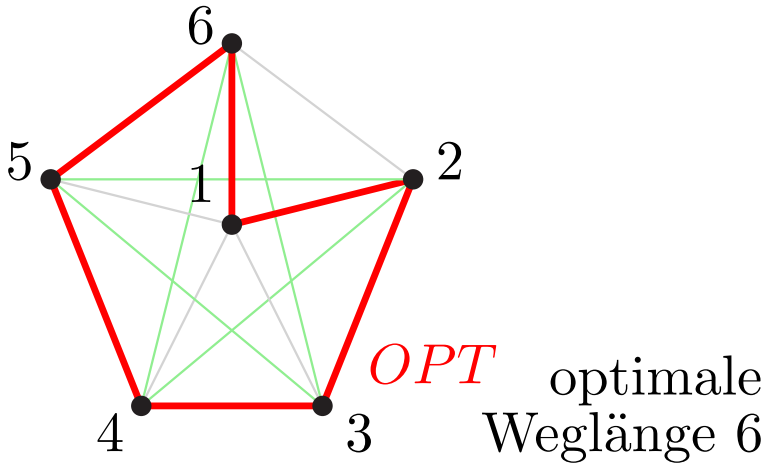
Weglänge 10

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP NP-hart

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$

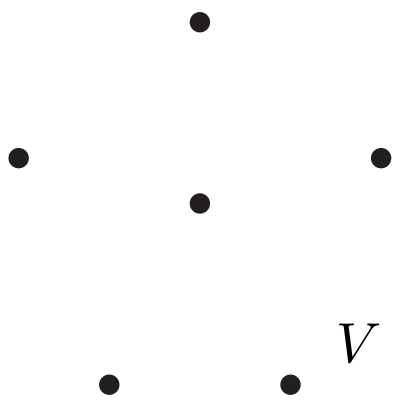


Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



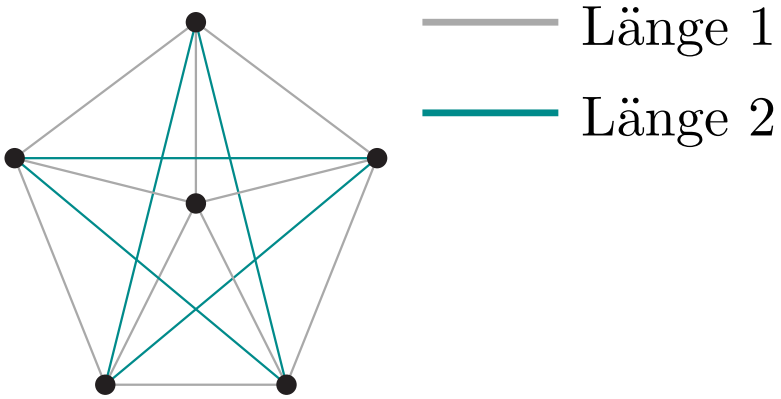
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



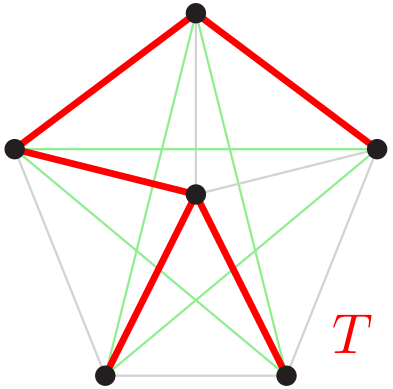
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



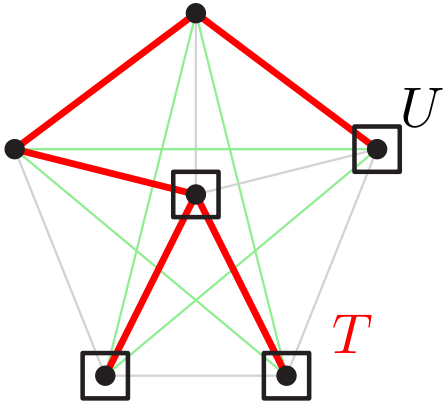
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



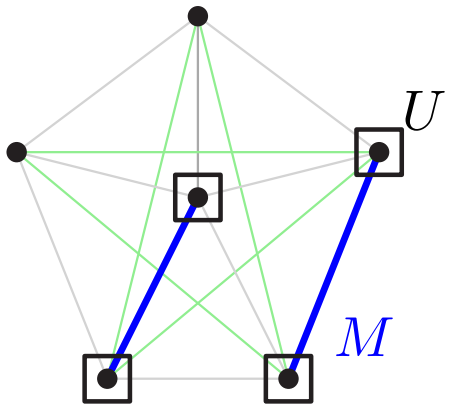
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



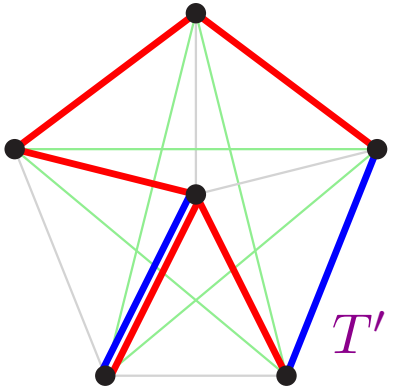
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



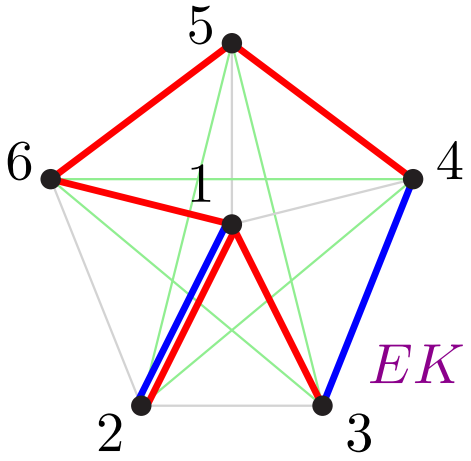
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



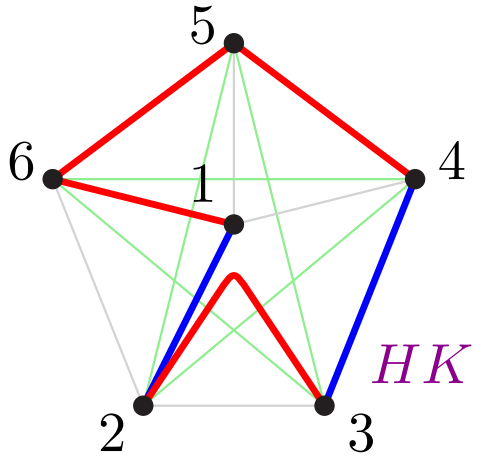
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



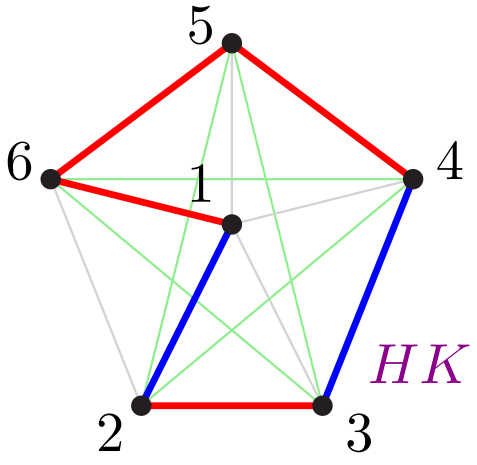
Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \to T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



Weglänge 6

Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

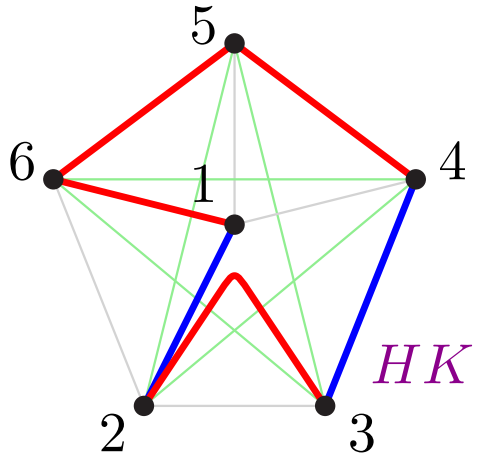
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

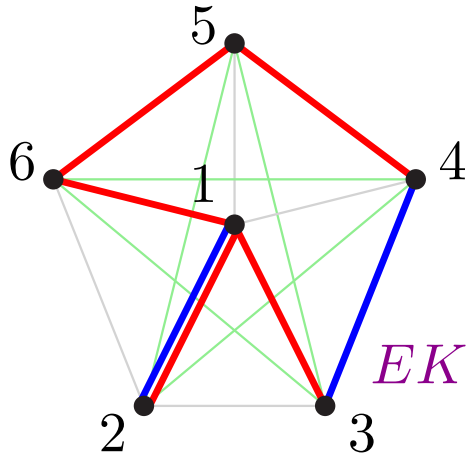
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

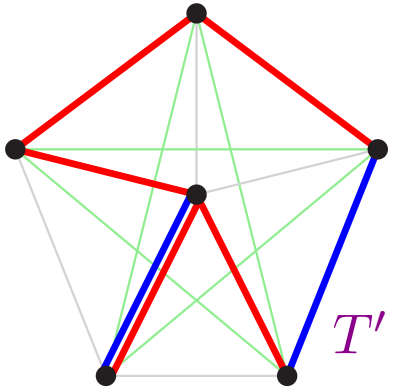
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T) erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK' existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

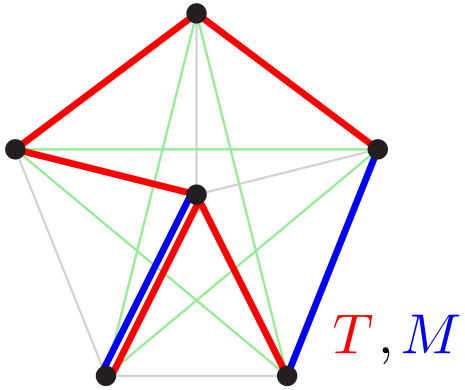
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T) erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK' existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

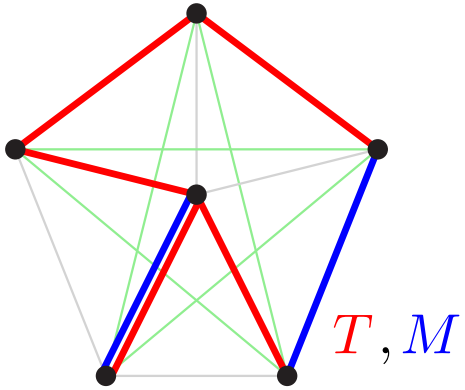
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T) erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK' existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

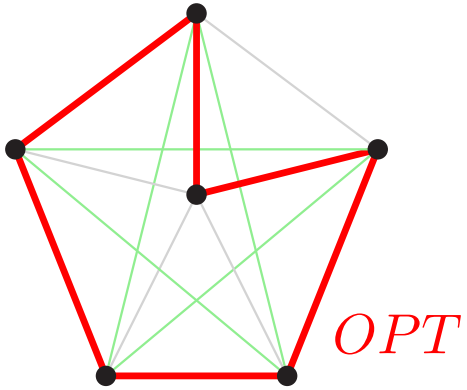
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

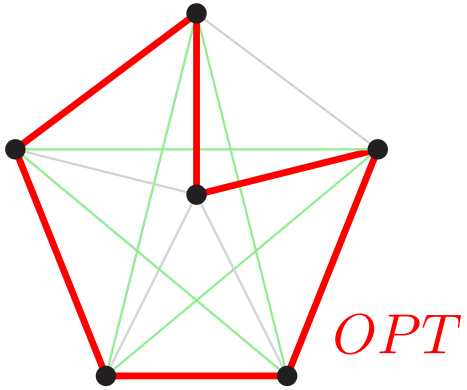
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

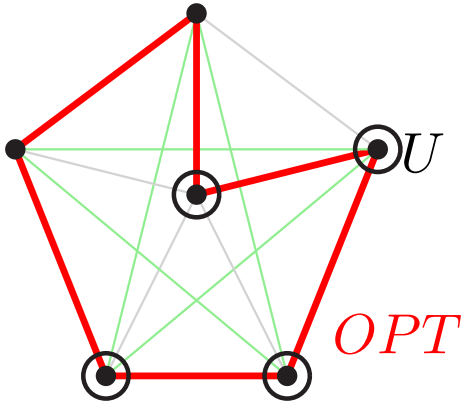
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

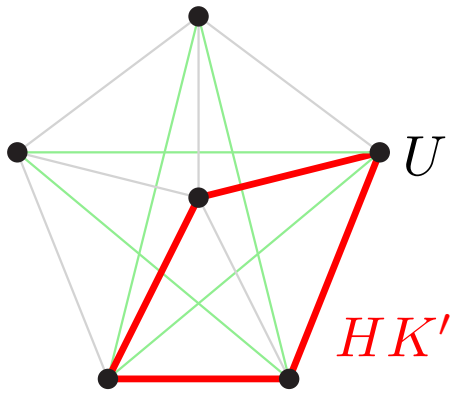
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

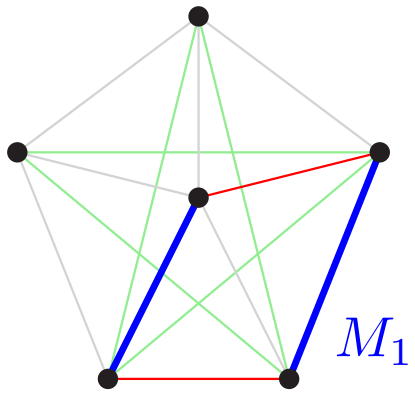
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

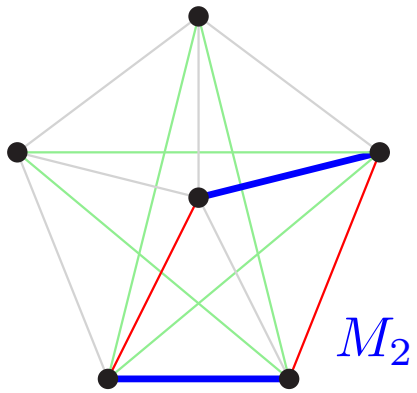
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

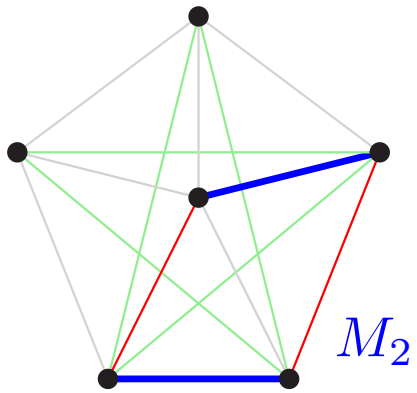
  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

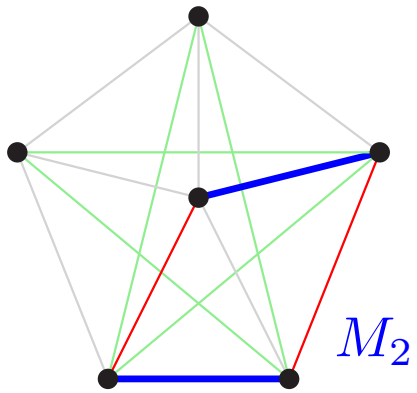
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

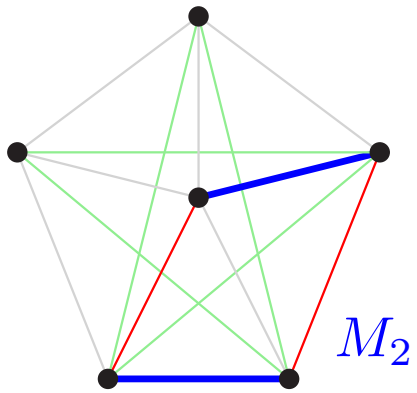
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



Approximationsalgorithmen

Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis

  $\Rightarrow \quad w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

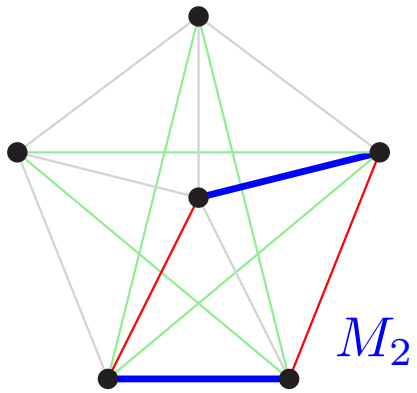
- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \quad w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad$ M min. Matching!

  $\Rightarrow \quad 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$

  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \quad w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



- Existiert immer perfektes Matching M?

  Zeige, dass $|U|$ immer gerade ist!

Approximationsalgorithmen

Zusammenfassung

Wissenswert nicht erschöpfend!

- Approximationsfaktor ρ
- APX, PTAS, FPTAS, pseudopolynomiell
- es gibt nicht gut approximierbare Probleme z.B. minimum TSP

Typische Fragestellungen

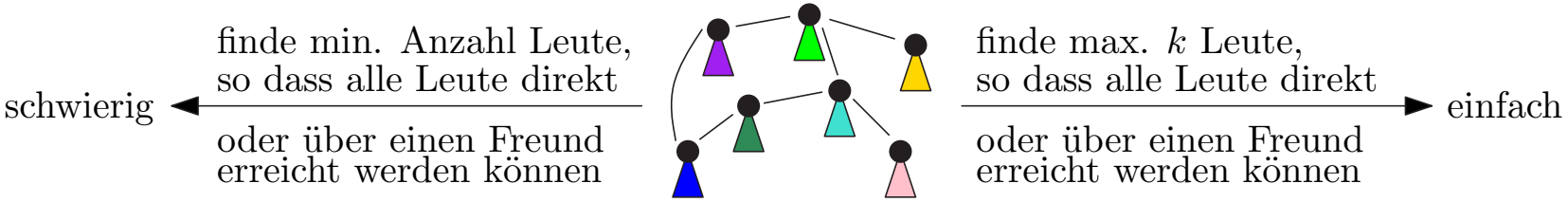
- Zu welcher Klasse gehört Algorithmus X mit $T(n, \varepsilon)$, $\rho(n, \varepsilon)$?
- Zeigen/Widerlegen Sie Approximationsfaktor ρ für Algorithmus X.
- (Bestimmen Sie einen Algorithmus mit Approximationsfaktor ρ)

Parametrisierte Algorithmen

***fixed parameter tractable* (FPT)**

Warum Probleme parametrisieren?

- es gibt “schwierige” Probleme z.B. Minimum Independent Set
  - $\rightarrow$ allgemeine Instanzen haben zu lange Berechnungszeit
- Kann man Spezialfälle eventuell effizient berechnen?
  - $\rightarrow$ Identifizierung zusätzlicher Parameter k der Problemstellung
  - $\rightarrow$ falls “Komplexität” in diesen Parametern k steckt, effiziente Lösungen für $k = const.$!



Parametrisierte Algorithmen

Definition

- Ein Problem heißt fixed parameter tractable, wenn es eine Laufzeit

$$T(n,k) = \mathcal{O}(f(k) \cdot \mathrm{p}(n))$$

hat, mit $f(\cdot)$ berechenbar, $p(\cdot)$ Polynom.

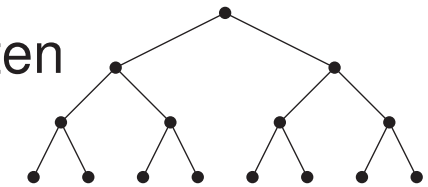
$f(\cdot)$ darf nicht von n abhängen und $p(\cdot)$ nicht von k; häufig Entscheidungsprobleme

Parametrisierte Algorithmen

Techniken

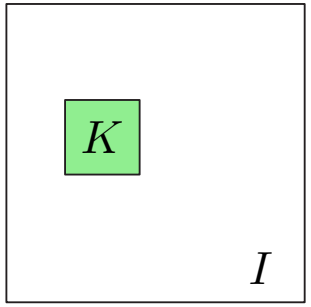
Tiefenbeschränkte Suche

- erschöpfendes Aufzählen und Testen aller Möglichkeiten
  $\rightarrow$ mit geeignetem Suchbaum beschränkter Tiefe
  k gibt Hinweis, wie weit man in die Tiefe gehen muss



Kernbildung

- Probleminstanz auf (schwierigen) Problemkern reduzieren
- Problemkern mit anderer Technik lösen



Parametrisierte Algorithmen

Schiebepuzzle

Problemstellung

- gegeben $n \times n$ Schiebepuzzle, $k \in \mathbb{N}$
- entscheide, ob das Puzzle in $\leq k$ Zügen gelöst werden kann
  - das Puzzle ist gelöst, wenn die Teile sortiert sind
  - Loch wird pro Zug eine Position horizontal oder vertikal verschoben

Algorithmus A

- es gibt ≤ 4 Möglichkeiten in jedem Zug, k Züge
  - baue Suchbaum (Höhe k, Verzweigungsgrad ≤ 4)
    $\rightarrow$ Baumgröße $\mathcal{O}(4^k)$
  - teste jeden Knoten auf korrekte Lösung
    $\rightarrow$ Aufwand $\mathcal{O}(n^2) \in \mathcal{O}(poly(n))$

24	8	13	12	20
11	2		17	21
7	15	14	19	5
6	10	3	9	1
4	23	11	18	22

$\Rightarrow$ Gesamtaufwand: $\mathcal{O}(4^k n^2) \Rightarrow$ FPT

$T(n,k) = 4T(n,k-1) + poly(n)$

Parametrisierte Algorithmen

Schiebepuzzle

Problemstellung

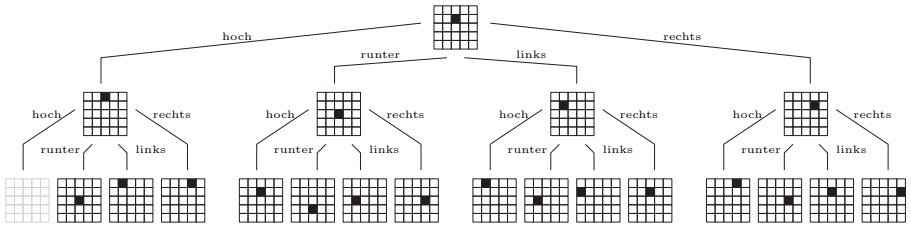
- gegeben $n \times n$ Schiebepuzzle, $k \in \mathbb{N}$
- entscheide, ob das Puzzle in $\leq k$ Zügen gelöst werden kann
  - das Puzzle ist gelöst, wenn die Teile sortiert sind
  - Loch wird pro Zug eine Position horizontal oder vertikal verschoben

Algorithmus A

- es gibt ≤ 4 Möglichkeiten in jedem Zug, k Züge
  - baue Suchbaum (Höhe k, Verzweigungsgrad ≤ 4)
    $\rightarrow$ Baumgröße $\mathcal{O}(4^k)$
  - teste jeden Knoten auf korrekte Lösung
    $\rightarrow$ Aufwand $\mathcal{O}(n^2) \in \mathcal{O}(poly(n))$

$\Rightarrow$ Gesamtaufwand: $\mathcal{O}(4^k n^2) \Rightarrow$ FPT

$T(n,k) = 4T(n,k-1) + poly(n)$



Ende!

Feierabend!