Karlsruher Institut für Technologie

Übung 11 – Algorithmen II

Hans-Peter Lehmann, Daniel Seemaier – *{hans-peter.lehmann, daniel.seemaier}@kit.edu*

http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS21.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

Organisatorisches

Klausurtermin

Fr 15.03.2022 11:00 Uhr
Hörsaaleinteilung wird rechtzeitig bekannt gegeben

Klausuranmeldung

Bis 07.03.2022

Themenübersicht

- Online-Algorithmen
- Altklausur vorrechnen

Online Algorithmen

Grundlagen

- Information kommt nach und nach an
- Entscheidungen / Berechnungen mit beschränkter Information
  $\rightarrow$ normalerweise supoptimale Lösungen

Beispiele

- *Ski Rental* Problem
- Job-Scheduling / Memory-Paging
- *Streaming* Algorithmen
- Suche in Labyrinthen / Routing in Kommunikationsnetzen
- ...

Online Algorithmen

Gütemaß

- Ein Online Algorithmus *ALG* hat einen kompetitiven Faktor

$$c = \sup_I \frac{ALG(I)}{OPT(I)}$$

mit *OPT* optimaler Offline Algorithmus, *I* Probleminstanz

hier für Minimierungsprobleme; "Approximationsfaktor" *c*

Einige Eigenschaften

- $c = \infty$ möglich $\longrightarrow$ Online Algorithmus beliebig schlecht
- $c = const.$ normal nicht von Problemgröße abhängig
  aber ev. abhängig von weiteren Problemparametern

Online Algorithmen

***Ski Rental* Problem**

Generische Problembeschreibung

- kostenpflichtige Nutzung einer Leistung alle Kosten > 0
  - einmalige Kosten K für unbeschränkte Nutzung oder
  - Kosten $k < K$ für jede Nutzung
- Anzahl Nutzungen n unbekannt
  $\Rightarrow$ (Wann) Soll man K für unbeschränkte Nutzung zahlen?

Nomenklatur

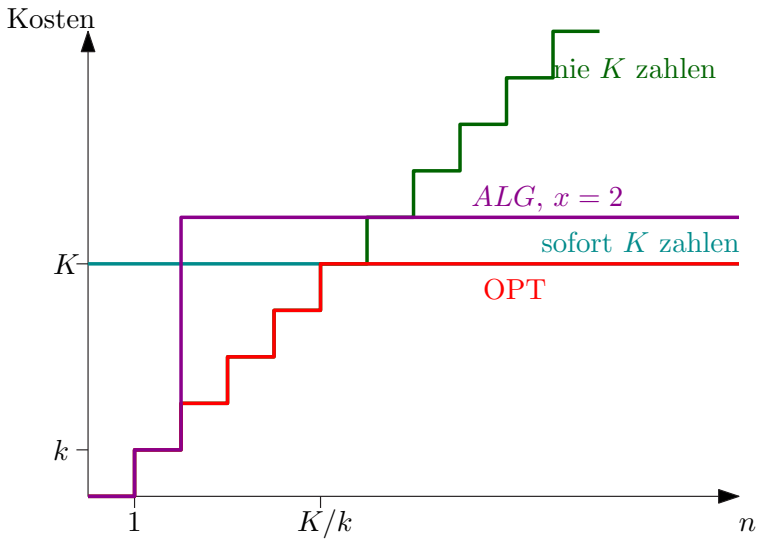
- Instanz I durch Anzahl Nutzungen n bestimmt
- $OPT(I)$, $ALG(I) \hat{=}$ Gesamtkosten

Online Algorithmen

Ski Rental

- allgemein gilt $c = sup_n \frac{ALG(n)}{OPT(n)}$
  - $ALG(n) = \begin{cases} n \cdot k & n < x \\ (x-1) \cdot k + K & \text{sonst} \end{cases}$

    zahle K vor x-ter Nutzung
  - $OPT(n) = \begin{cases} n \cdot k & n < \frac{K}{k} \\ K & \text{sonst} \end{cases}$



$$\Rightarrow \quad c = ? \begin{cases} \frac{K-k}{xk} + 1 & x \leq \frac{K}{k} \\ \frac{(x-1)k}{K} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sonderfall: Bezahle K, nutze nie!

$\Rightarrow \quad ALG(n) = K$

$\Rightarrow \quad c = \infty$

entspricht $x = 0$

Online Algorithmen

Ski Rental

Es gilt $c = \begin{cases} \frac{K-k}{xk} + 1 & x \leq \frac{K}{k} \\ \frac{(x-1)k}{K} + 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Frage: Für welches x ist c minimal?

$\Rightarrow$ für $x = \frac{K}{k}$ ist c minimal mit $c = 2 - \frac{k}{K}$

Zahlenbeispiel: $K = 100, k = 10 \Rightarrow c = 1.9$

Bester randomisierter Algorithmus: $c = e/(e-1) \approx 1.58$

Online Algorithmen

Doubling Strategie

Doubling

- Strategie für Online/Offline Approximationsalgorithmen

Idee

- schätze Lösung konservativ ab eher zu kleine Schätzung
- prüfe, ob Problem gelöst
- falls nicht erfolgreich, vergrößere Schätzung geometrisch
  z.B. verdoppeln, verdreifachen, ...

Online Algorithmen

Online Bidding

Karlsruher Institut für Technologie

Problembeschreibung

- Unbekannter Zielwert $U > 1$
- Bieter gibt eine Reihe an Geboten (b_i) ab bis $b_k \geq U$
- Bieter muss Summe der Gebote $\sum_{i=0}^{k} b_i$ bezahlen
  $\Rightarrow$ Wie kann der Bieter möglichst geschickt vorgehen?

Nomenklatur

- Lösung durch Reihe (b_i) beschrieben
- $OPT(I)$, $ALG(I) \hat{=}$ summierten Kosten

Online Algorithmen

Online Bidding

Optimaler Offline Algorithmus

- kennt den Zielwert U
- folglich bietet er direkt $b_0 = U$
  $\Rightarrow OPT = U$

Kompetitiver Faktor

$$c = \sup_{k,U} \left\{ \frac{b_0 + b_1 + \cdots + b_k}{U} : b_{k-1} < U \leq b_k \right\}$$

- Strategien sind z.B. (a) $b_i = i \cdot x$, (b) $b_i = a \cdot x^i$

Online Algorithmen

Online Bidding

Analyse: (a) $b_i = i \cdot x$ $x > 0$

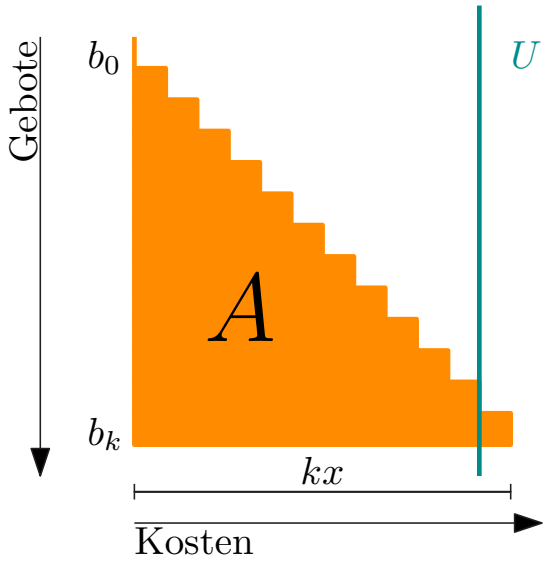
- *worst case*: $b_{k-1} = (k-1) \cdot x = U - \varepsilon$ $k > 0, \varepsilon \to 0$

  $\Rightarrow$ Anzahl Gebote: $k + 1 = \left(\frac{U-\varepsilon}{x} + 1\right) + 1 \leq \frac{U}{x} + 2$

  $\Rightarrow$ $ALG = \sum_{i=0}^{k} b_i = \sum_{i=0}^{k} i \cdot x = \frac{1}{2}(k+1)k \cdot x$

  $\Rightarrow$ $\frac{ALG}{OPT} \leq \frac{1}{2U}(\frac{U}{x} + 2)(\frac{U}{x} + 1) \cdot x \leq \frac{U^2 + 2x^2}{Ux} + 3$

  $\Rightarrow$ $c = \infty$ unabhängig von x schlecht



Fläche $A \approx \frac{1}{2}kx \cdot (k+1)$

Online Algorithmen

Online Bidding

Analyse: (b) $b_i = a \cdot x^i$ $x > 1$

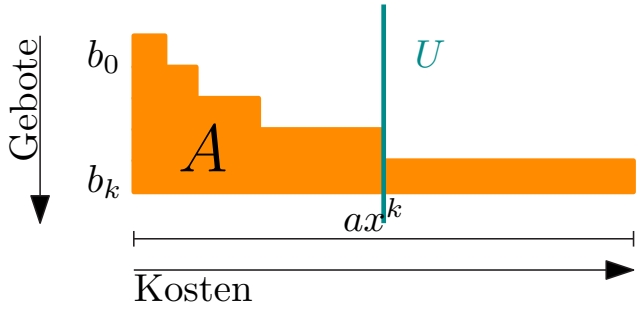
- *worst case*: $b_{k-1} = a \cdot x^{k-1} = U - \varepsilon$ $k > 0, \varepsilon \to 0$

$\Rightarrow$ Anzahl Gebote: $k + 1 = \left(\log_x\left(\frac{U-\varepsilon}{a}\right) + 1\right) + 1 \leq \log_x \frac{U}{a} + 2$

$\Rightarrow$ $ALG = \sum_{i=0}^{k} a \cdot x^i = \frac{a\cdot(x^{k+1}-1)}{x-1} \leq \frac{a\cdot(x^{\log_x \frac{U}{a}+2}-1)}{x-1} = \frac{a\cdot(\frac{U}{a}x^2-1)}{x-1}$

$\Rightarrow$ $\frac{ALG}{OPT} \leq \frac{a\cdot(\frac{U}{a}x^2-1)}{U(x-1)} = \frac{x^2}{x-1} - \frac{a}{(x-1)U}$

$\Rightarrow$ $c \leq \frac{x^2}{x-1}$ minimal für $x = 2 \Rightarrow c \leq 4$



Fläche $A \approx \frac{a\cdot(x^{k+1}-1)}{x-1}$

Online Algorithmen

Zusammenfassung

Wissenswert nicht erschöpfend!

- kompetitiver Faktor c
- *Doubling* Technik
- *Ski Rental* Problem

Typische Fragestellungen

- Gegeben sei Algorithmus X. Wie groß ist sein kompetitiver Faktor?
- Geben Sie einen Algorithmus mit kompetitivem Faktor c an.

Ende!

Feierabend!