

Algorithmen II

Peter Sanders

Übungen:

Moritz Laupichler, Nikolai Maas

Institut für Theoretische Informatik

Web:

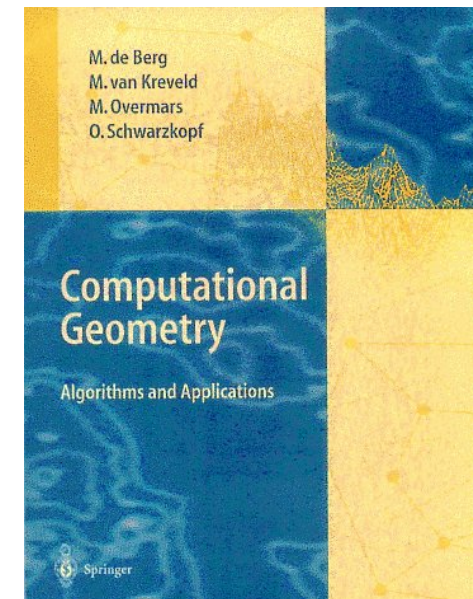
http://algo2.itl.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php

12 Geometrische Algorithmen

- Womit beschäftigen sich geom. Algorithmen?
- Schnitt von Strecken: Bentley-Ottmann-Algorithmus
- Konvexe Hüllen
- Kleinste einschließende Kugel
- Range Search

Quelle:

[Computational Geometry – Algorithms and Applications
de Berg, van Kreveld, Overmars, Schwartzkopf
Springer, 1997]



Elementare geometrische Objekte

Punkte: $x \in \mathbb{R}^d$

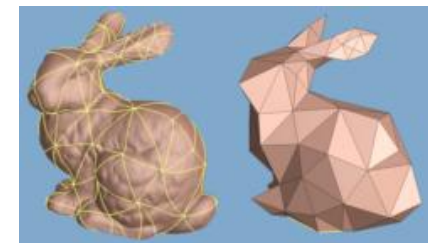
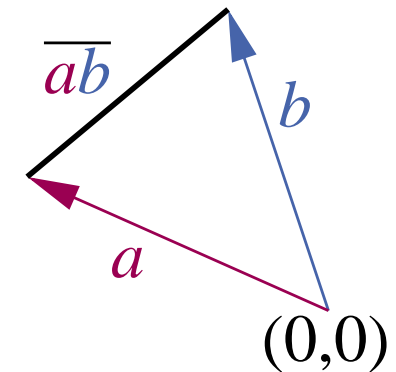
Strecken: $\overline{ab} := \{\alpha a + (1 - \alpha)b : \alpha \in [0, 1]\}$

uvam: Halbräume, Ebenen, Kurven,...

Dimension d :

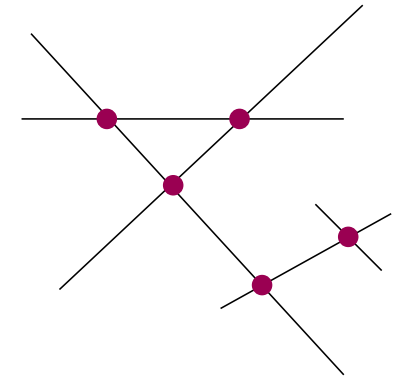
- 1: Oft trivial. Gilt i. allg. nicht als geometrisches Problem
 - 2: Geogr. Informationssysteme (GIS), Bildverarbeitung,...
 - 3: Computergrafik, Simulationen,...
 - ≥ 4 : Optimierung, Datenbanken, maschinelles Lernen,...
- curse of dimensionality!**

n : Anzahl vorliegender Objekte



Typische Fragestellungen

- Schnittpunkte zwischen n Strecken



Typische Fragestellungen

Schnittpunkte zwischen n Strecken

Konvexe Hülle

Triangulation von Punktmenge

(2D, verallgemeinerbar)

z.B. **Delaunaytriangulierung**:

Kein Dreieck enthält weiteren Punkt

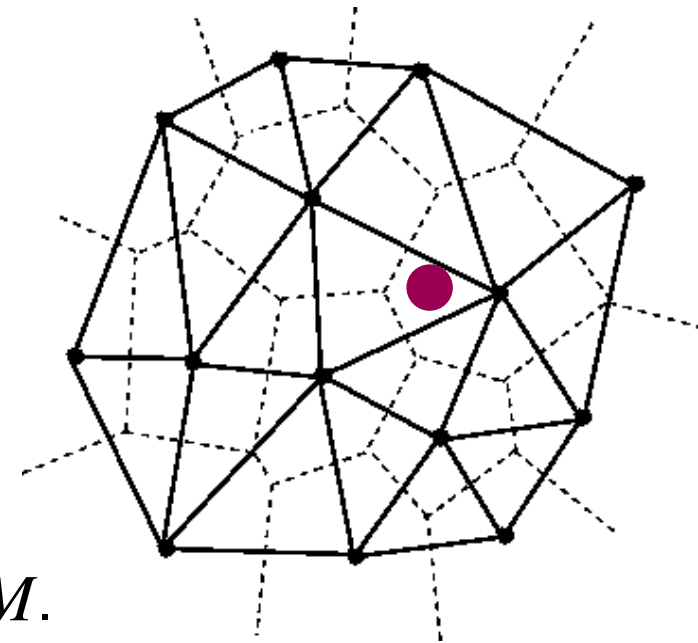
Voronoi-Diagramme: Sei $x \in M \subseteq \mathbb{R}^d$.

$\forall y \in \mathbb{R}^d$ bestimme nächstes Element aus M .

(Unterteilung von M in n **Voronozellen**)

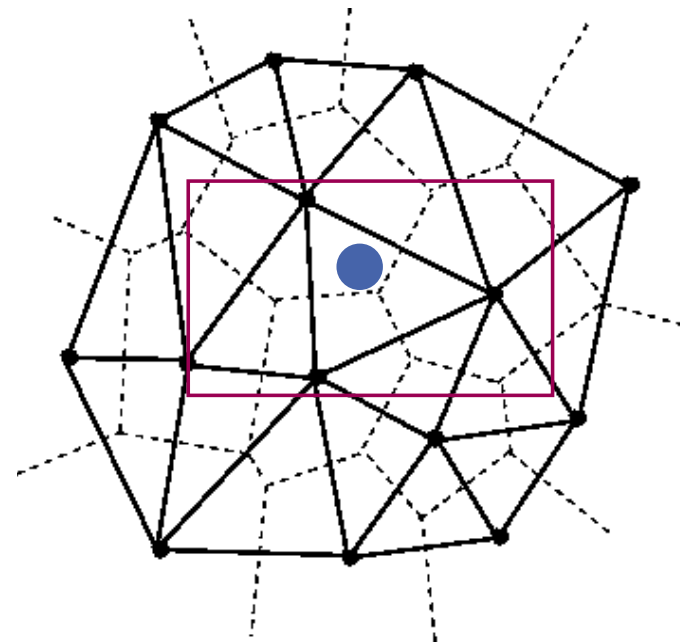
Punktolokalisierung: Geg. Unterteilung von \mathbb{R}^d , $x \in \mathbb{R}^d$:

in welchem Teil liegt x ?



Datenstrukturen für Punktmengen

- nächsten Nachbarn berechnen
- Bereichsanfragen
- ...



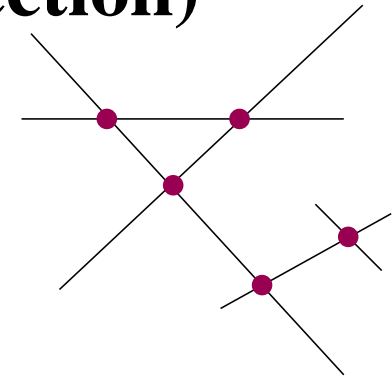
Mehr Fragestellungen

- Sichtbarkeitsberechnungen
- Lineare Programmierung
- Geometrische Versionen von Optimierungsproblemen
 - Kürzeste Wege, z.B.
energieeffiziente Kommunikation in Radionetzwerken
 - minimale Spannbäume
reduzierbar auf Delaunay-Triangulierung + Graphalgorithmus
 - Matchings
 - Handlungsreisendenproblem
 - ...
- ...

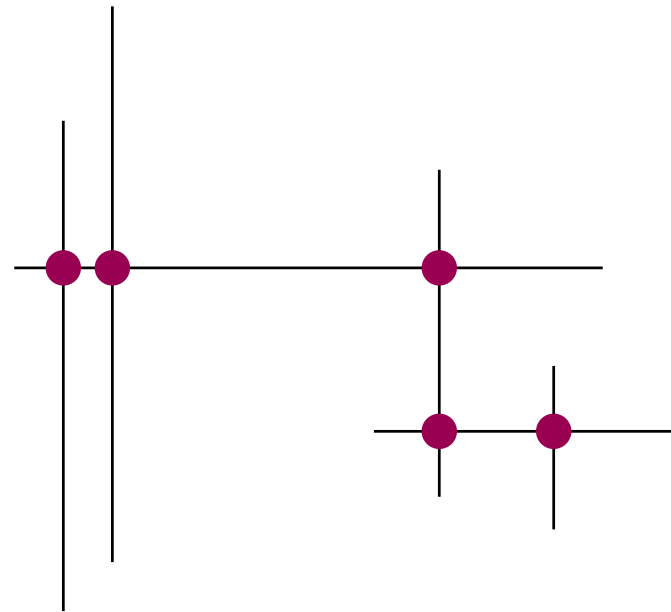
12.1 Streckenschnitt (line segment intersection)

Gegeben: $S = \{s_1, \dots, s_n\}$, n Strecken

Gesucht: Schnittpunkte $\bigcup_{s,t \in S} s \cap t$

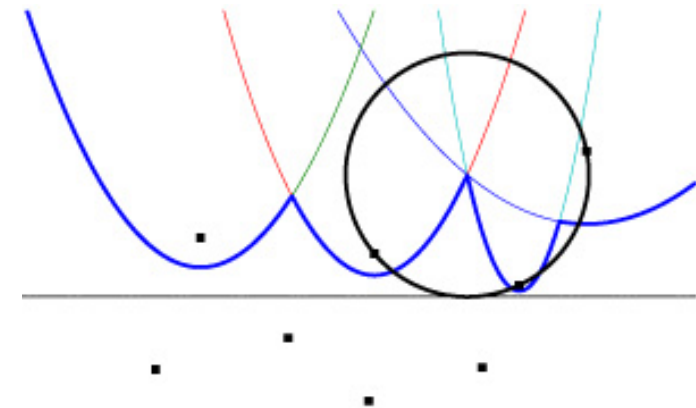


Zum Warmwerden: **Orthogonaler Streckenschnitt** – die Strecken sind parallel zur x- oder y-Achse



Streckenschnitt: Anwendungen

- Schaltungsentwurf: wo kreuzen sich Leiterbahnen?
- GIS**: Strassenkreuzungen, Brücken,...
- Erweiterungen: z.B. **Graphen benachbarter Strecken/Flächen**
aufbauen/verarbeiten
- Noch allgemeiner:
Plane-Sweep-Algorithmen
für andere Fragestellungen
(z.B. Konstruktion von
konvexen Hüllen oder
Voronoidiagrammen)

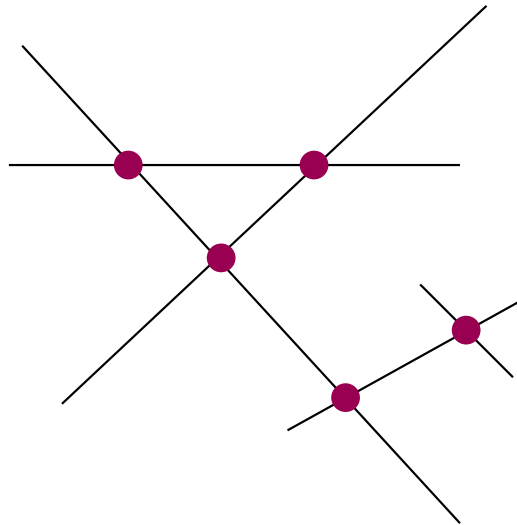


Streckenschnitt: Naiver Algorithmus

```
foreach  $\{s, t\} \subseteq S$  do  
  if  $s \cap t \neq \emptyset$  then  
    output  $\{s, t\}$ 
```

Problem: Laufzeit $\Theta(n^2)$.

Zu langsam für große Datenmengen

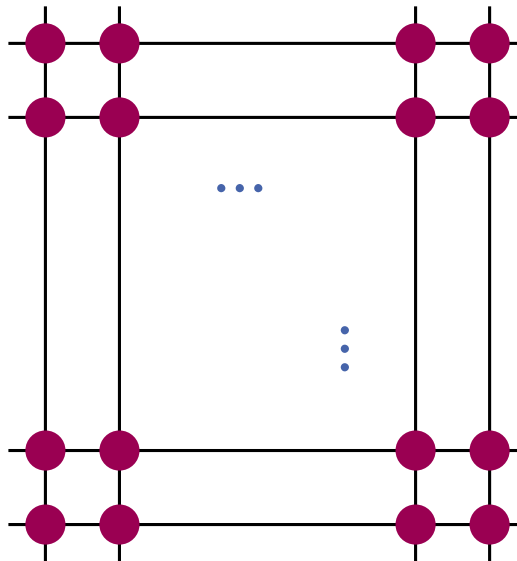


Streckenschnitt: Untere Schranke

$\Omega(n + k)$ mit $k :=$ Anzahl ausgegebener Schnitte.

Vergleichsbasiert: $\Omega(n \log n + k)$ (Beweis: nicht hier)

Beobachtung $k = \Theta(n^2)$ ist möglich, aber reale Eingaben haben meist $k = O(n)$.

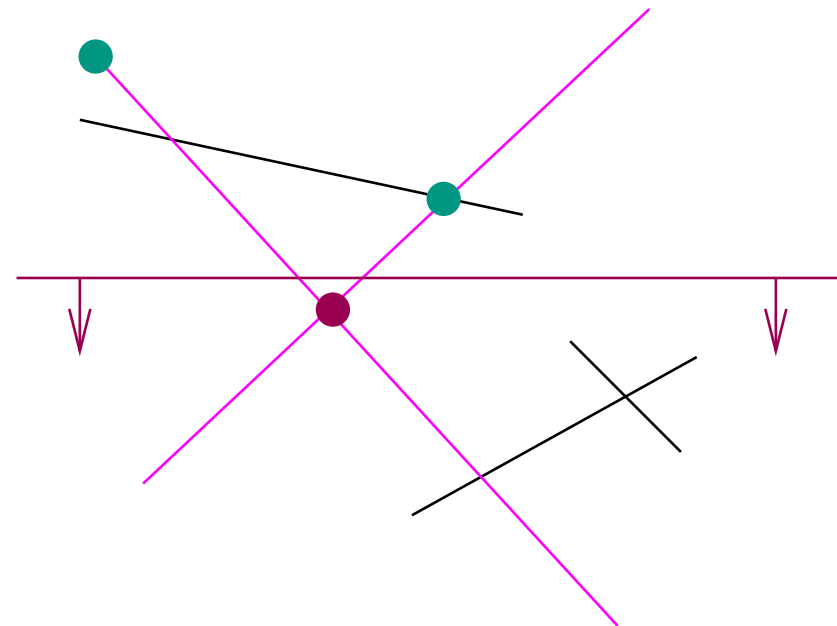


Idee: Plane-Sweep-Algorithmen

(Waagerechte) **Sweep-Line** ℓ läuft von oben nach unten.

Invariante: Schnittpunkte oberhalb von ℓ wurden korrekt ausgegeben.

Ansatz: speichere jeweils Segmente, die ℓ schneiden und finde deren Schnittpunkte.



Plane-Sweep für orth. Streckenschnitt

Erstmal nur: Schnitte zwischen vertikalen und horizontalen Strecken.

$T = \langle \rangle$: SortedSequence **of** Segment

invariant T stores the vertical segments intersecting ℓ

$Q := \text{sort}(\langle (y, s) : \exists \text{hor. seg. } s \text{ at } y \text{ or } \exists \text{vert. seg. } s \text{ starting/ending at } y \rangle)$

//tie breaking: vert. starting events first, vert. finishing events last

foreach $(y, s) \in Q$ in descending order **do**

if s is a vertical segment and **starts** at y **then** $T.\text{insert}(s)$

else if s is a vertical segment and **ends** at y **then** $T.\text{remove}(s)$

else //we have a horizontal segment $s = \overline{(x_1, y)(x_2, y)}$

foreach $t = \overline{(x, y_1)(x, y_2)} \in T$ with $x \in [x_1, x_2]$ **do**

output $\{s, t\}$

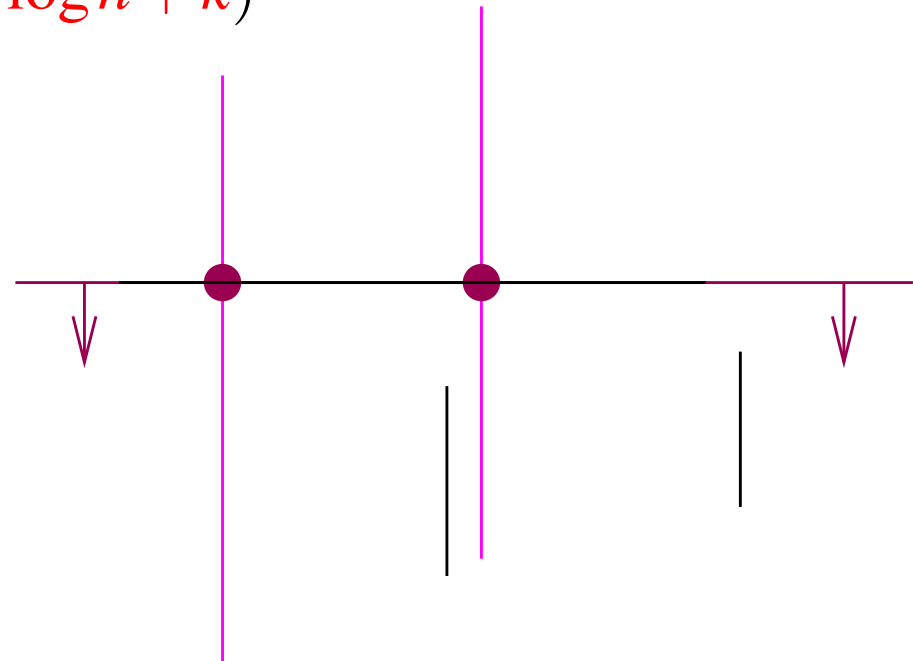
Analyse orth. Streckenschnitt

insert: $O(\log n)$ ($\leq n \times$)

remove: $O(\log n)$ ($\leq n \times$)

rangeQuery: $O(\log n + k_s)$, k_s Schnitte mit hor. Segment s

Insgesamt: $O(n \log n + \sum_s k_s) = O(n \log n + k)$



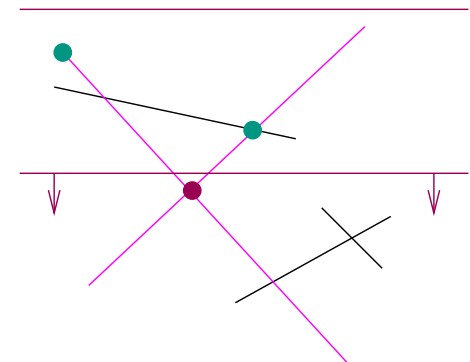
Verallgemeinerung – aber erstmal “nicht ganz”

Annahme zunächst:

Allgemeine Lage, d.h. hier

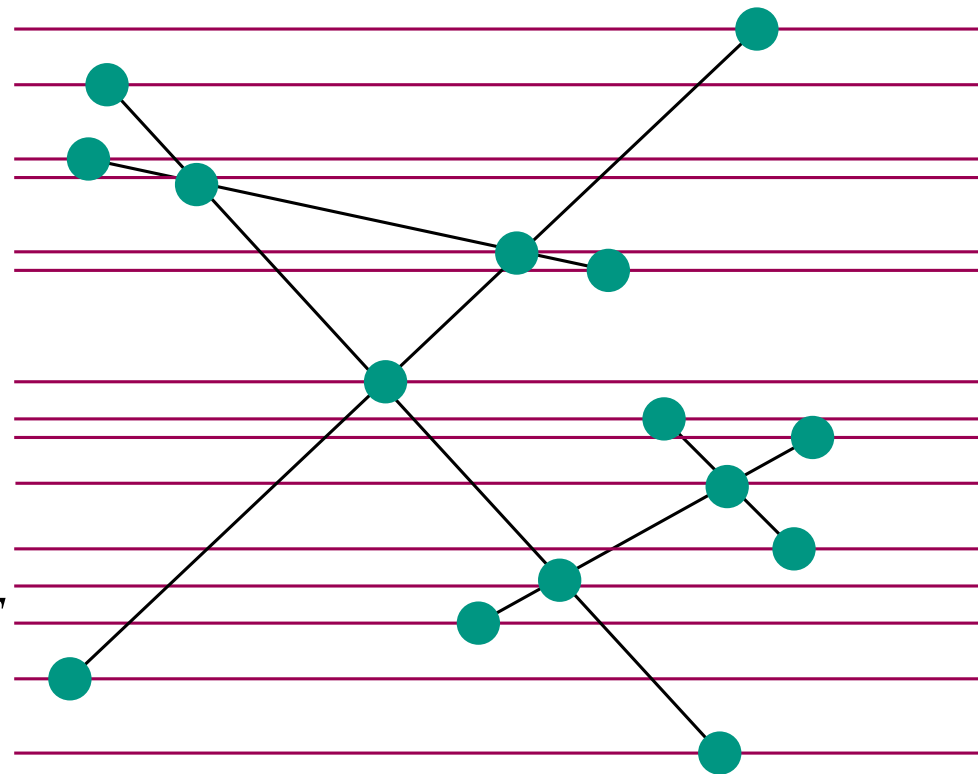
- Keine horizontalen Strecken
- Keine Überlappungen
- Schnittpunkte jeweils im Inneren von genau zwei Strecken

Beobachtung: kleine zuf. **Perturbationen** produzieren allg. Lage.



Verallgemeinerung – Grundidee

- Plane-Sweep mit Sweep-Line ℓ
- **Status T** := nach x geordnete Folge der ℓ schneidenden Strecken
- **Ereignis** := Statusänderung
 - Startpunkte
 - Endpunkte
 - **Schnittpunkte**
- **Schnitttest** nur für Segmente, die an einem **Ereignis**punkt in T **benachbart** sind.



Verallgemeinerung – Korrektheit

Lemma:

$s \cap t = \{(x, y)\} \longrightarrow \exists$ Ereignis : s, t werden Nachbarn auf ℓ

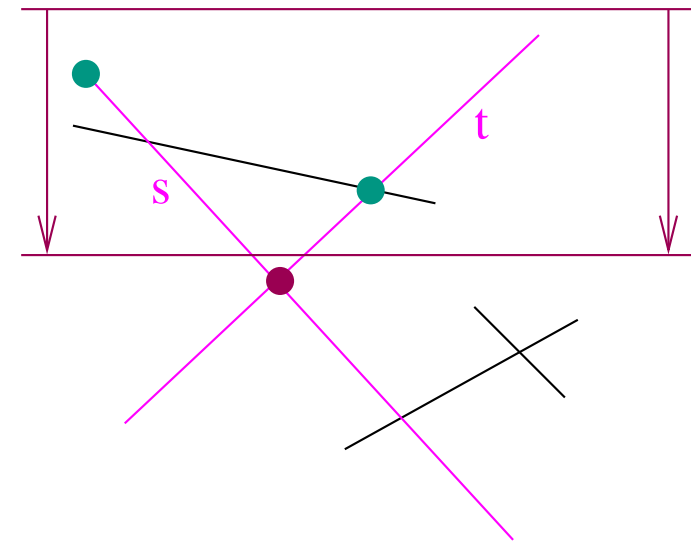
Beweis:

Anfangs : $T = \langle \rangle \longrightarrow s, t$ sind nicht in ℓ benachbart.

@ $y + \varepsilon$: s, t sind in ℓ benachbart.

\longrightarrow

\exists Ereignis bei dem s und t Nachbarn werden.



Verallgemeinerung – Implementierung

$T = \langle \rangle$: SortedSequence **of** Segment

invariant T stores the relative order of the segments intersecting ℓ

Q : MaxPriorityQueue

$Q := Q \cup \left\{ (\max\{y, y'\}, \text{start}, s) : s = \overline{(x, y)(x', y')} \in S \right\} // O(n \log n)$

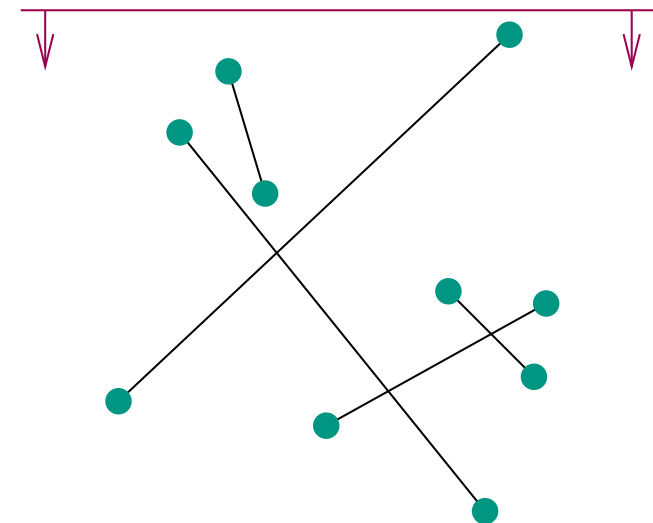
$Q := Q \cup \left\{ (\min\{y, y'\}, \text{finish}, s) : s = \overline{(x, y)(x', y')} \in S \right\} // O(n \log n)$

while $Q \neq \emptyset$ **do**

$(y, \text{type}, s) := Q.\text{deleteMax}$

$// O((n + k) \log n)$

handleEvent(y, type, s, T, Q)



handleEvent(y , **start**, s , T , Q)

$h := T.insert(s)$

$prev := pred(h)$

$next := succ(h)$

findNewEvent($prev$, h)

findNewEvent(h , $next$)

Procedure findNewEvent(s , t)

if $*s$ and $*t$ intersect at $y' < y$ **then**

$Q.insert((y', intersection, (s, t)))$

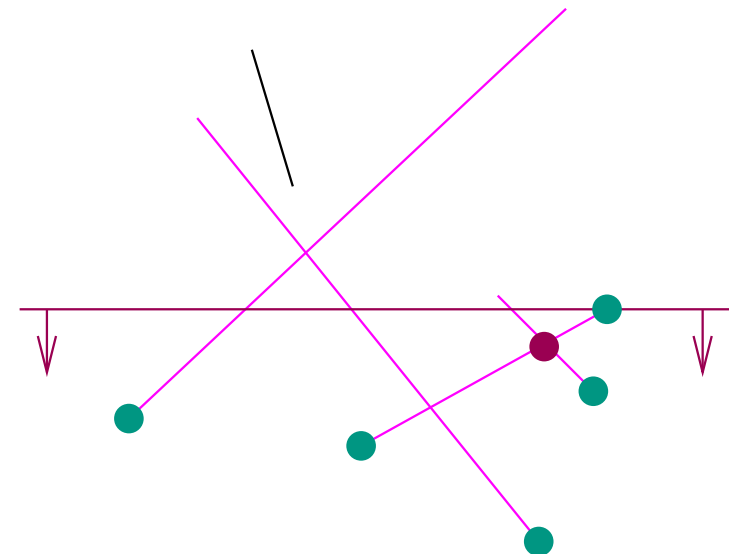
// $n \times$

// $O(\log n)$

// $O(1)$

// $O(1)$

// $O(1 + \log n)$



handleEvent(y , finish, s , T , Q)

$h := T.locate(s)$

prev := pred(h)

next := succ(h)

$T.remove(s)$

findNewEvent(prev, next)

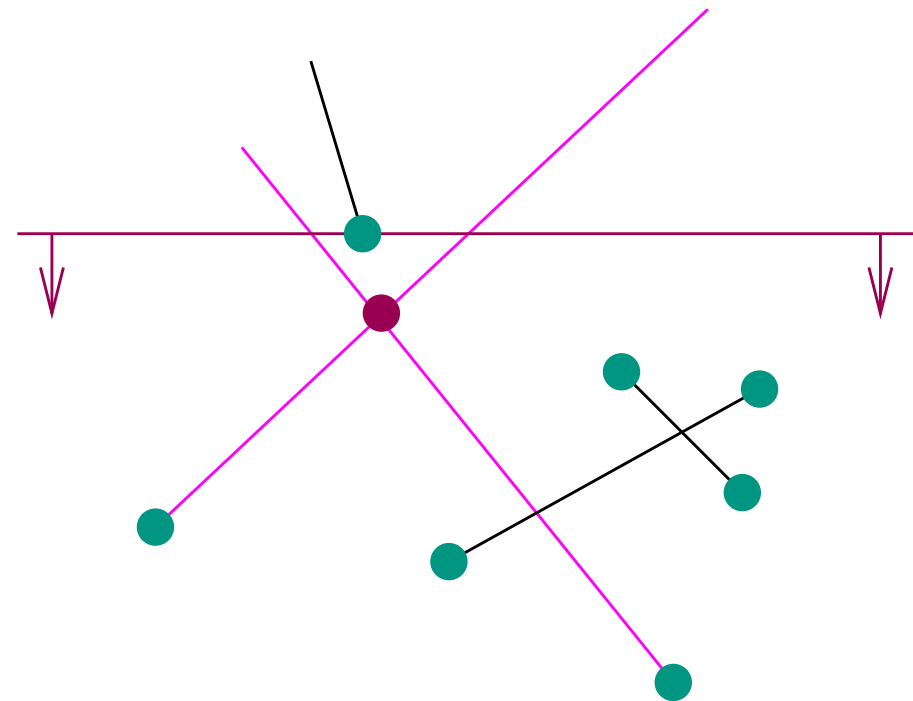
// $n \times$

// $O(\log n)$

// $O(1)$

// $O(1)$

// $O(\log n)$



handleEvent(y , intersection, (a, b) , T , Q)

output $(*s \cap *t)$

$T.swap(a, b)$

prev := pred(b)

next := succ(a)

findNewEvent(prev, b)

findNewEvent(a , next)

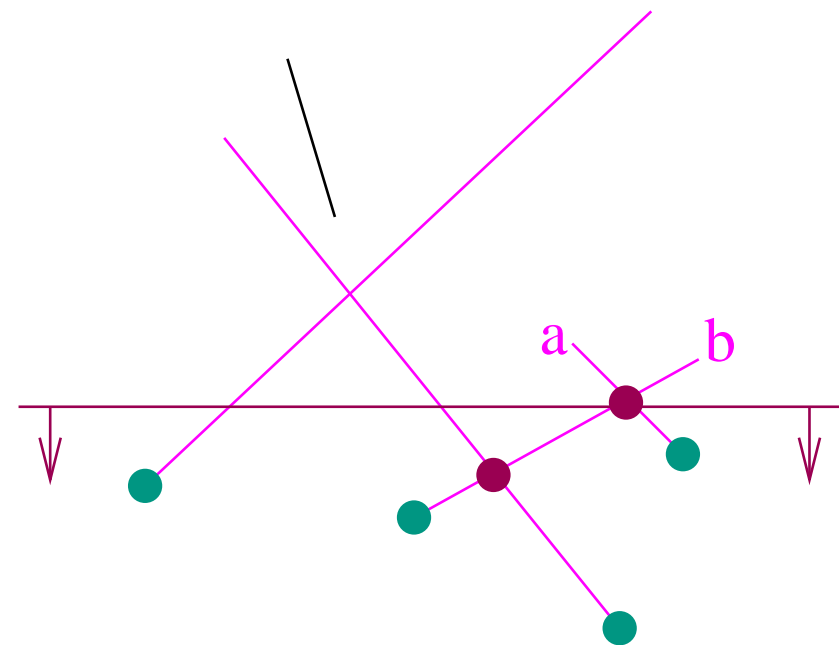
// $k \times$

// $O(1)$

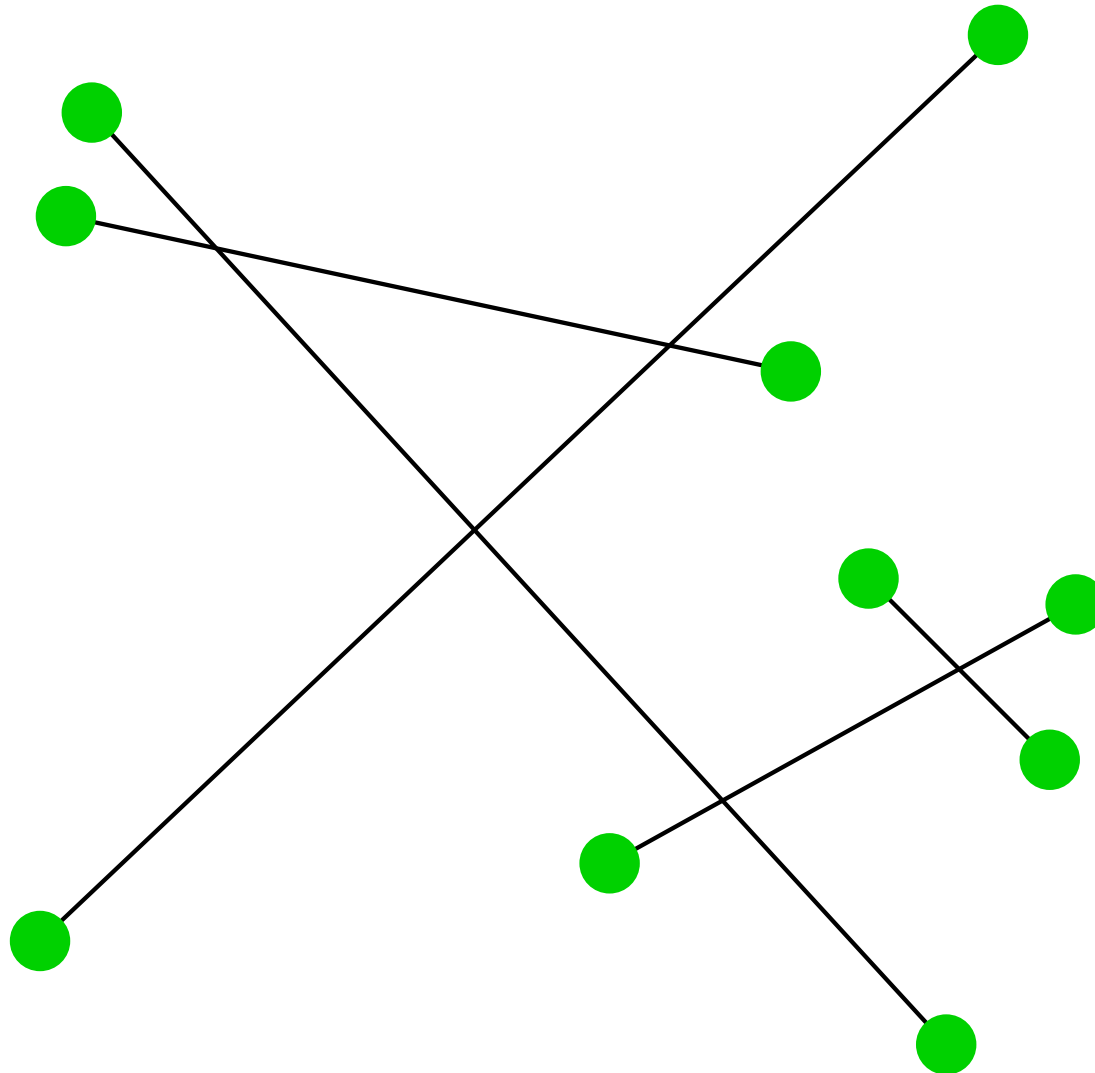
// $O(\log n)$

// $O(1)$

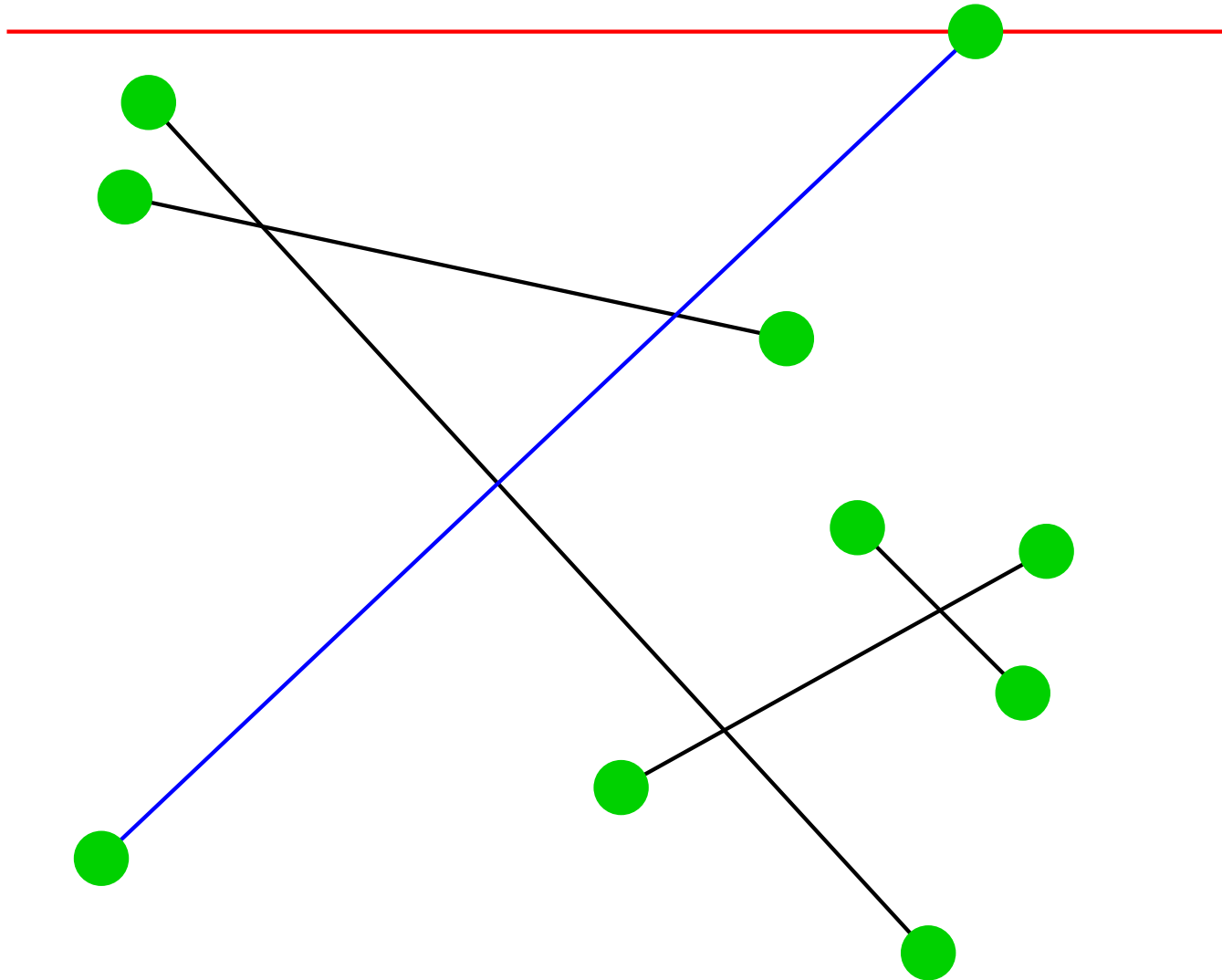
// $O(1)$



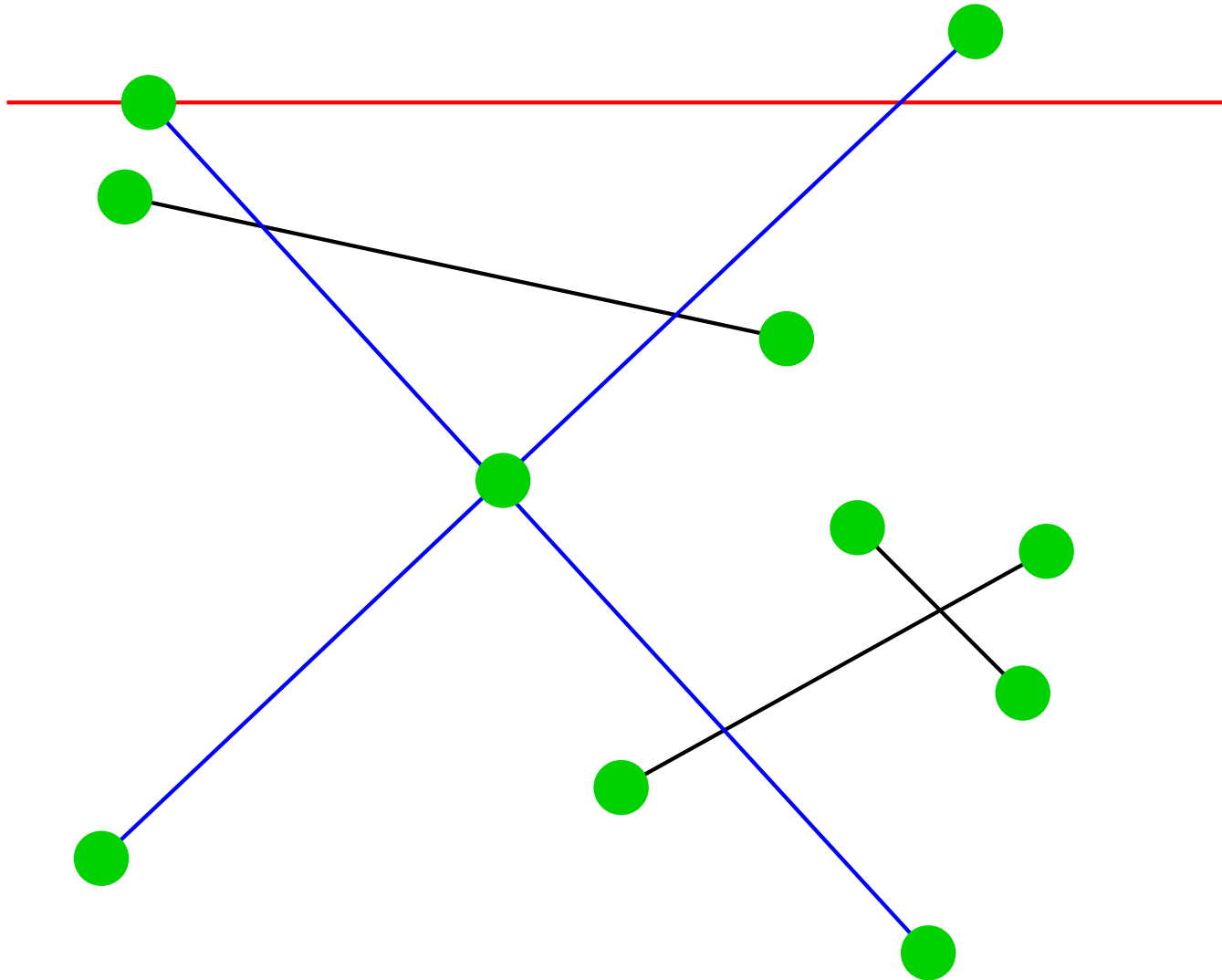
Verallgemeinerung – Beispiel



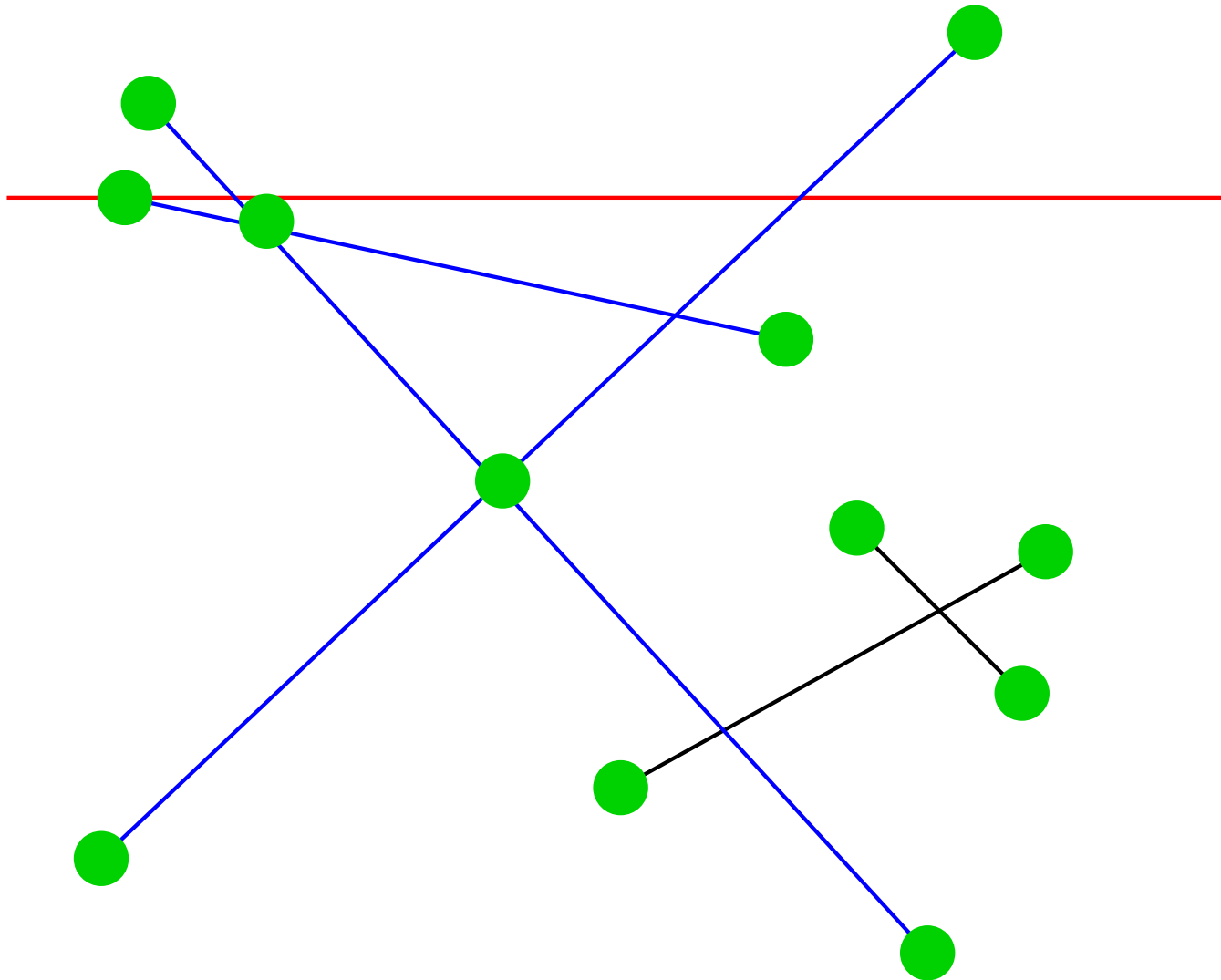
Verallgemeinerung – Beispiel



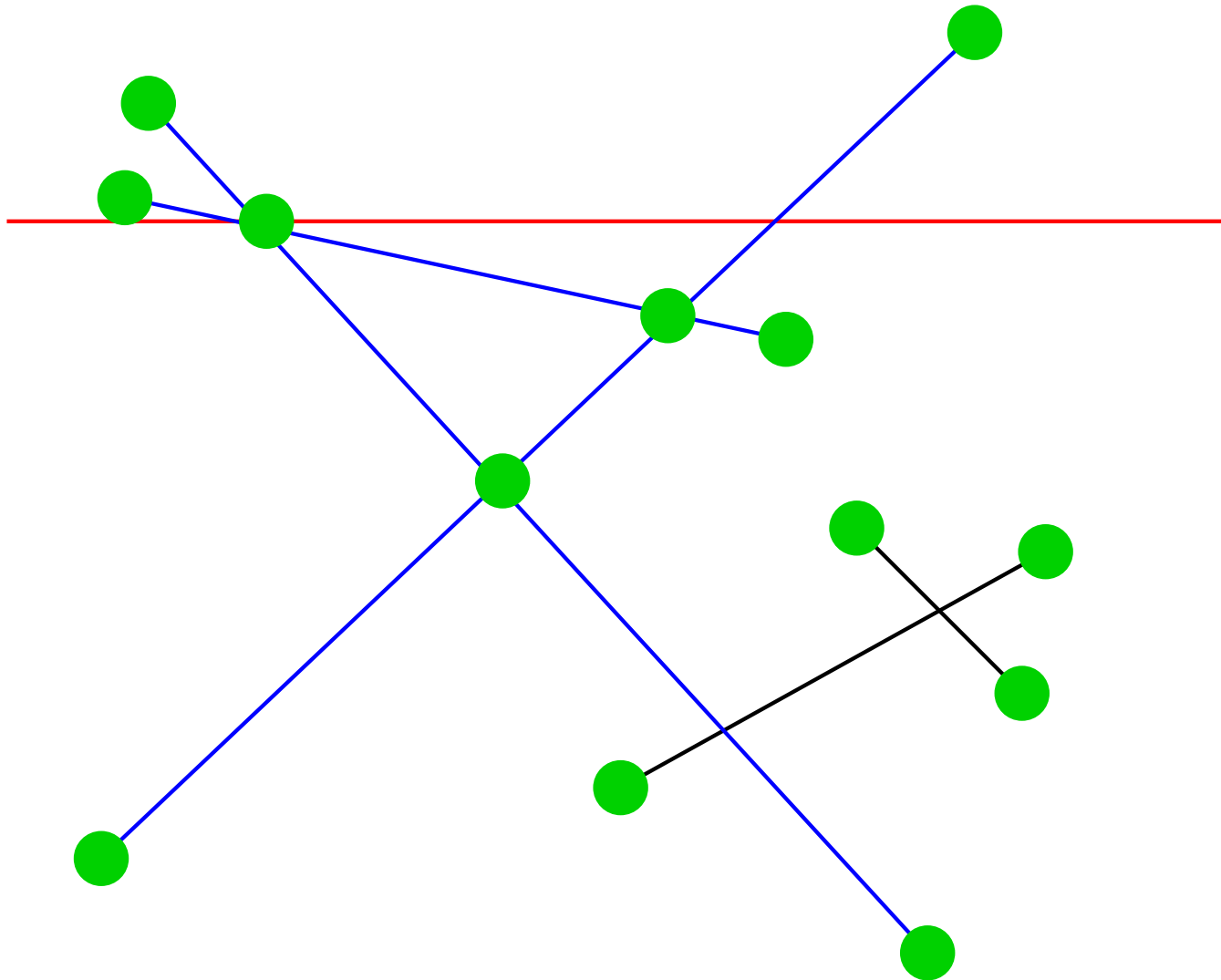
Verallgemeinerung – Beispiel



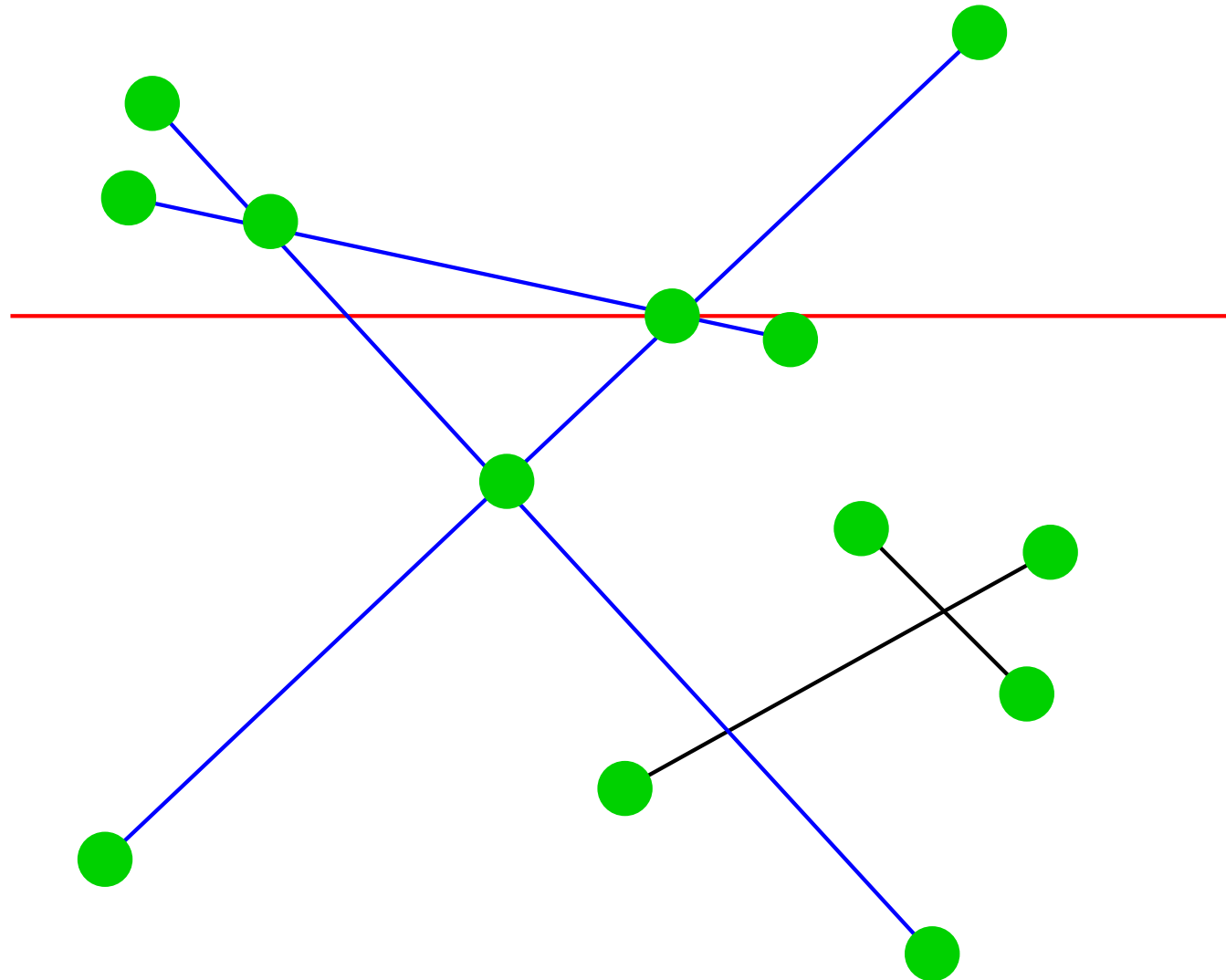
Verallgemeinerung – Beispiel



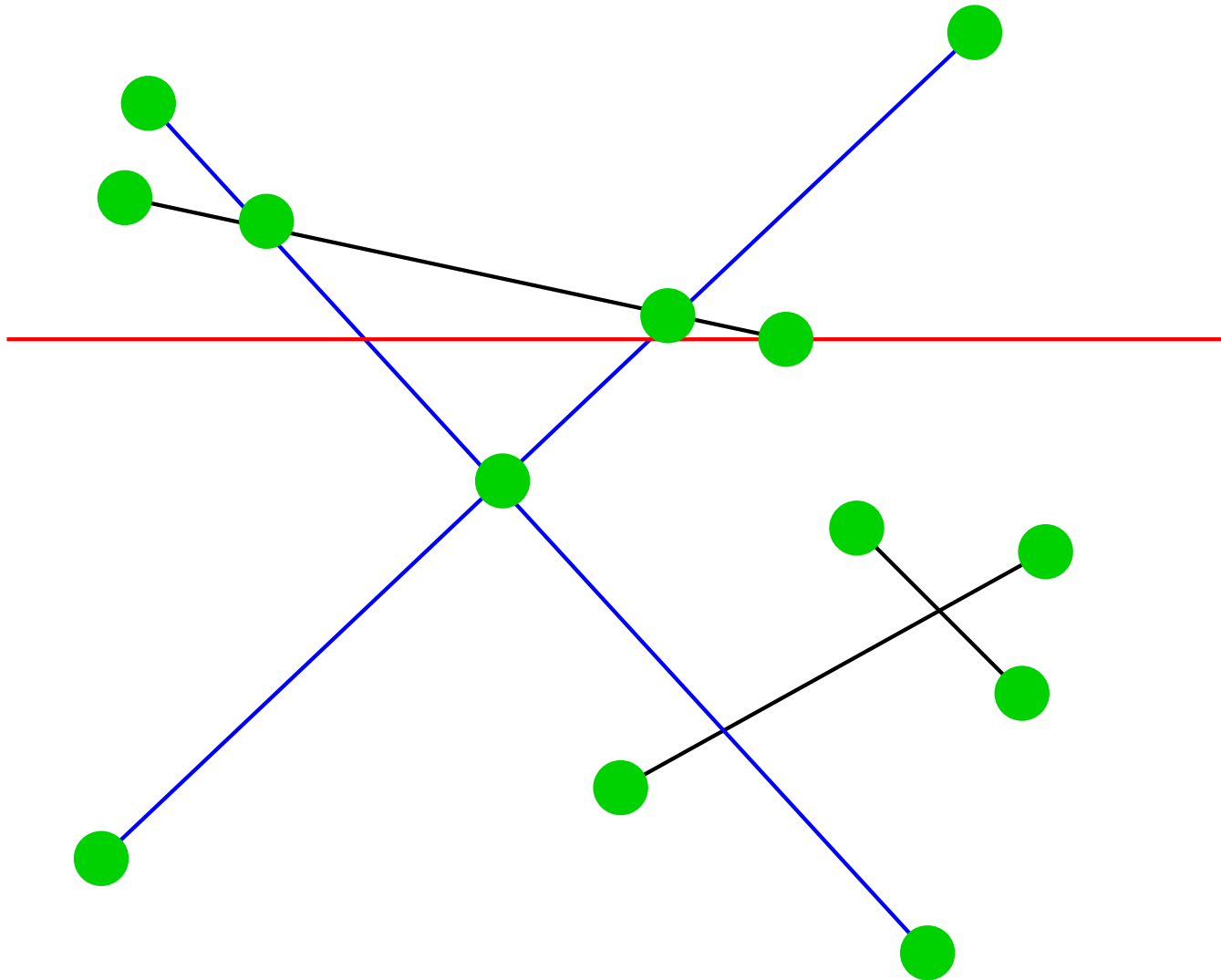
Verallgemeinerung – Beispiel



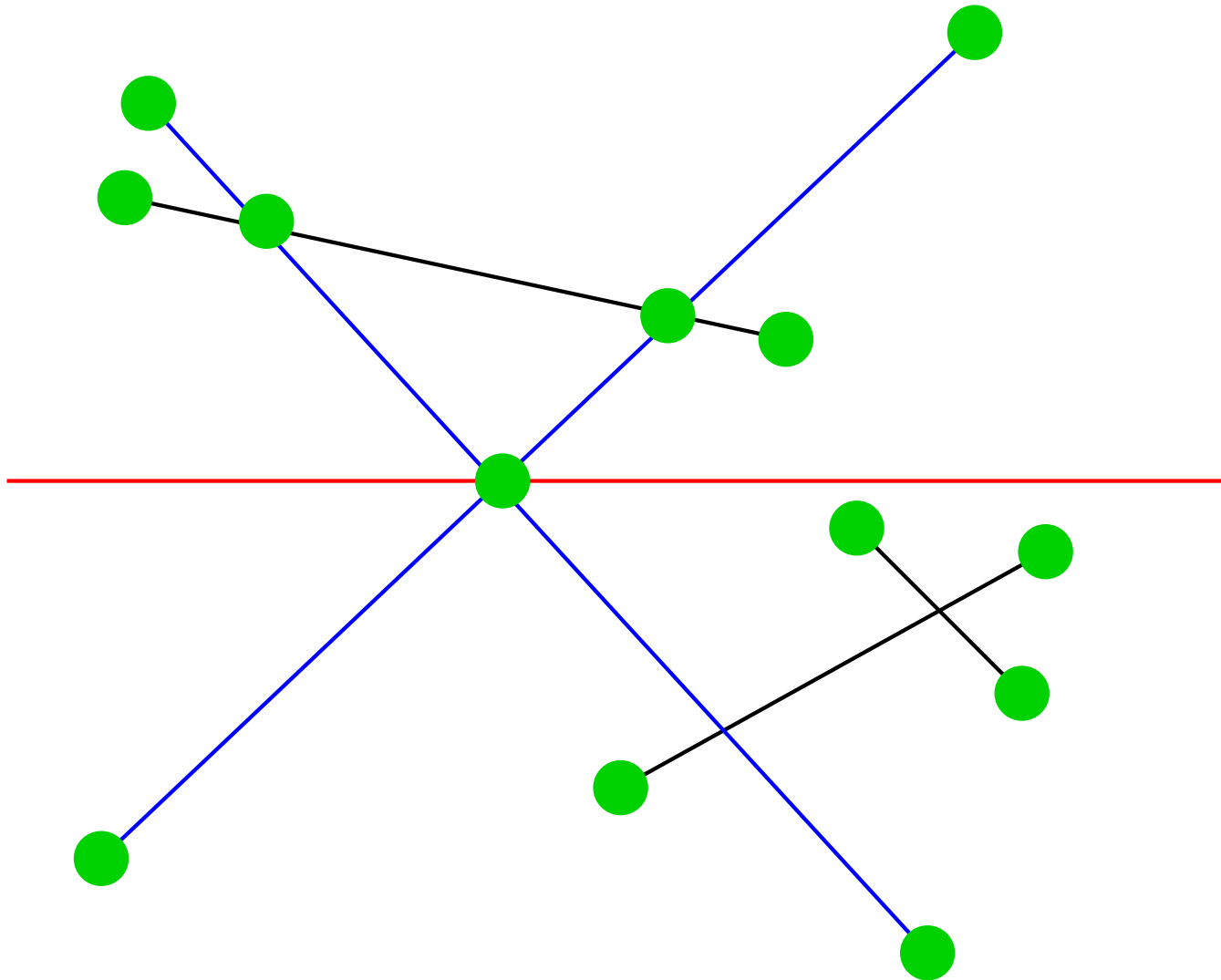
Verallgemeinerung – Beispiel



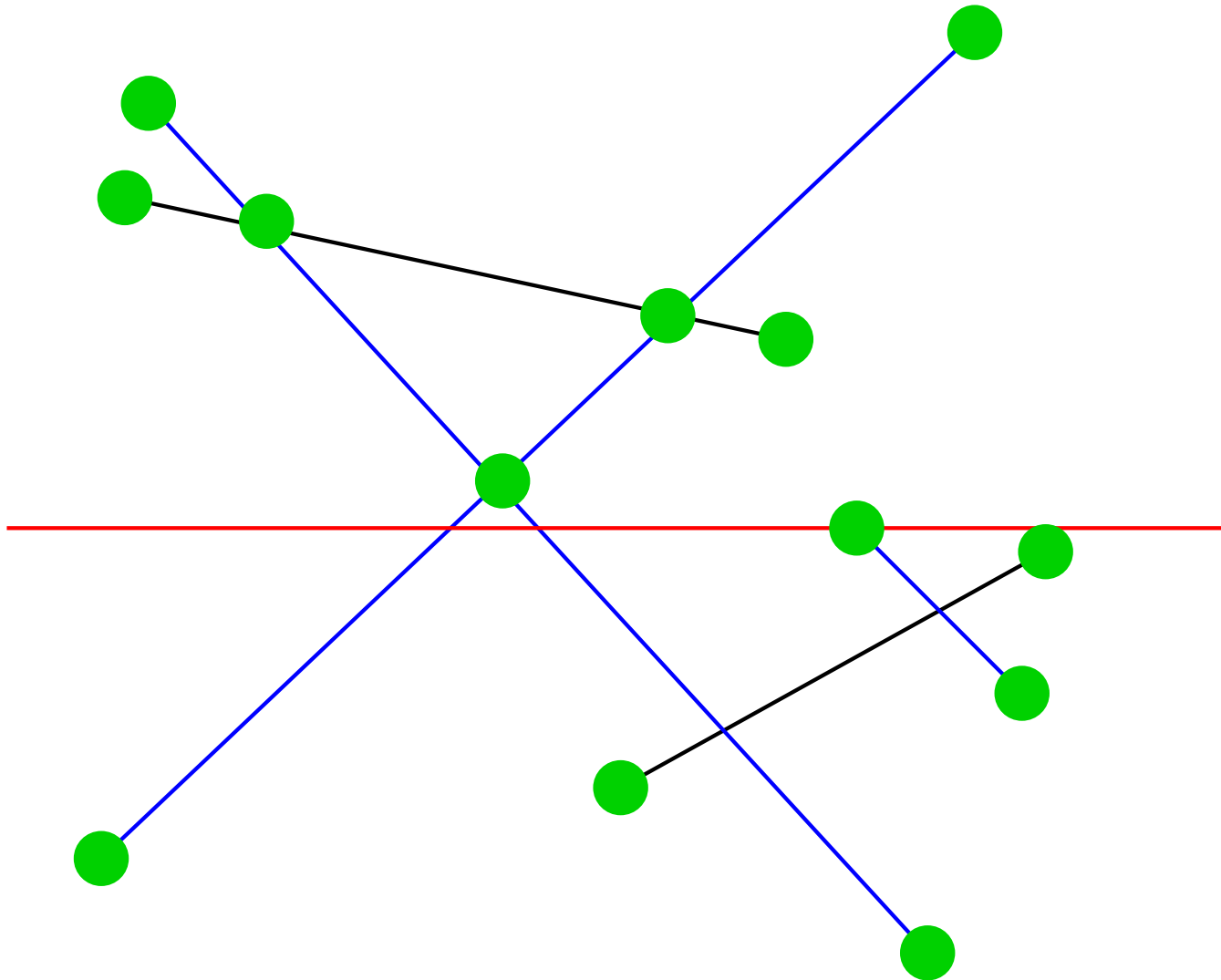
Verallgemeinerung – Beispiel



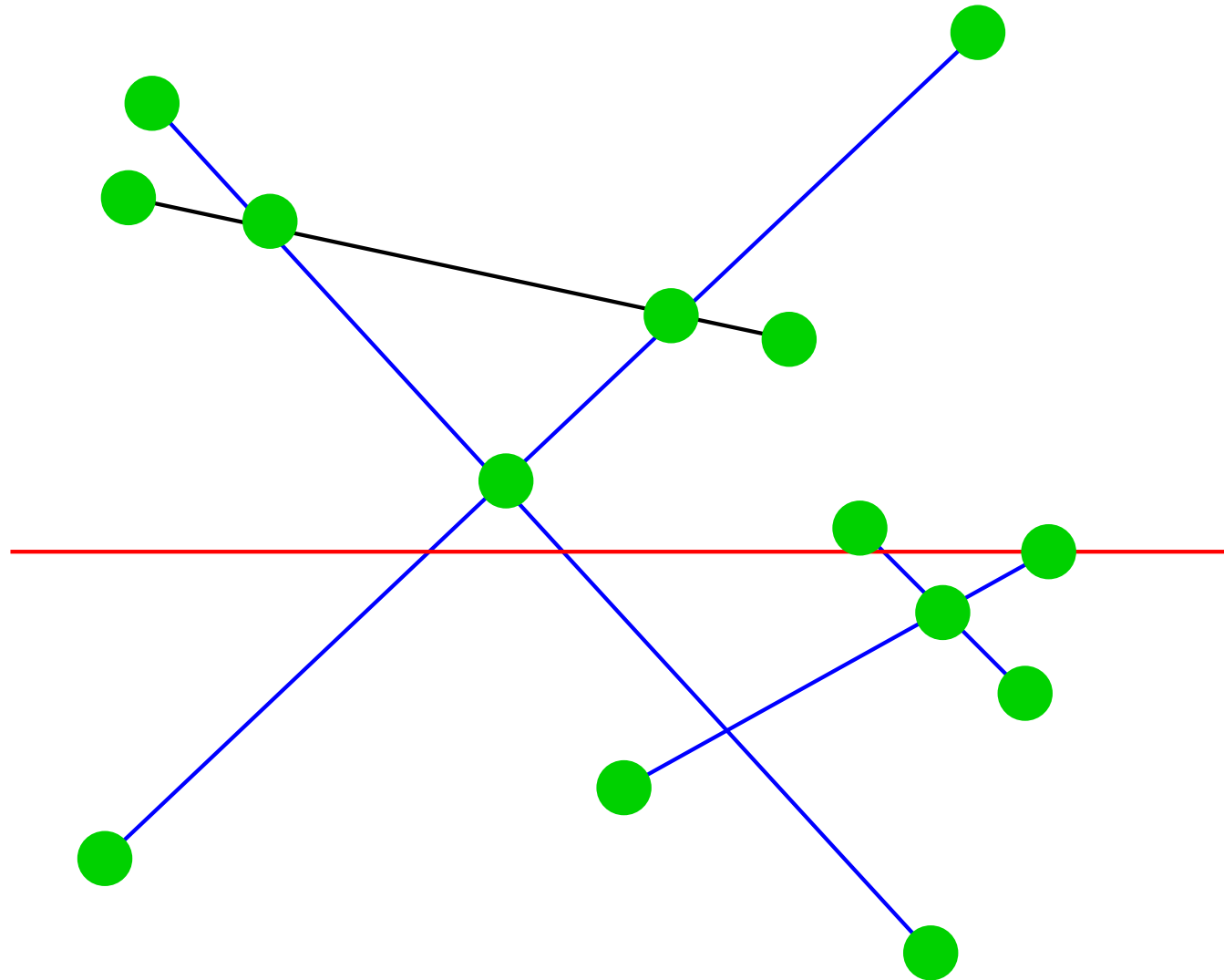
Verallgemeinerung – Beispiel



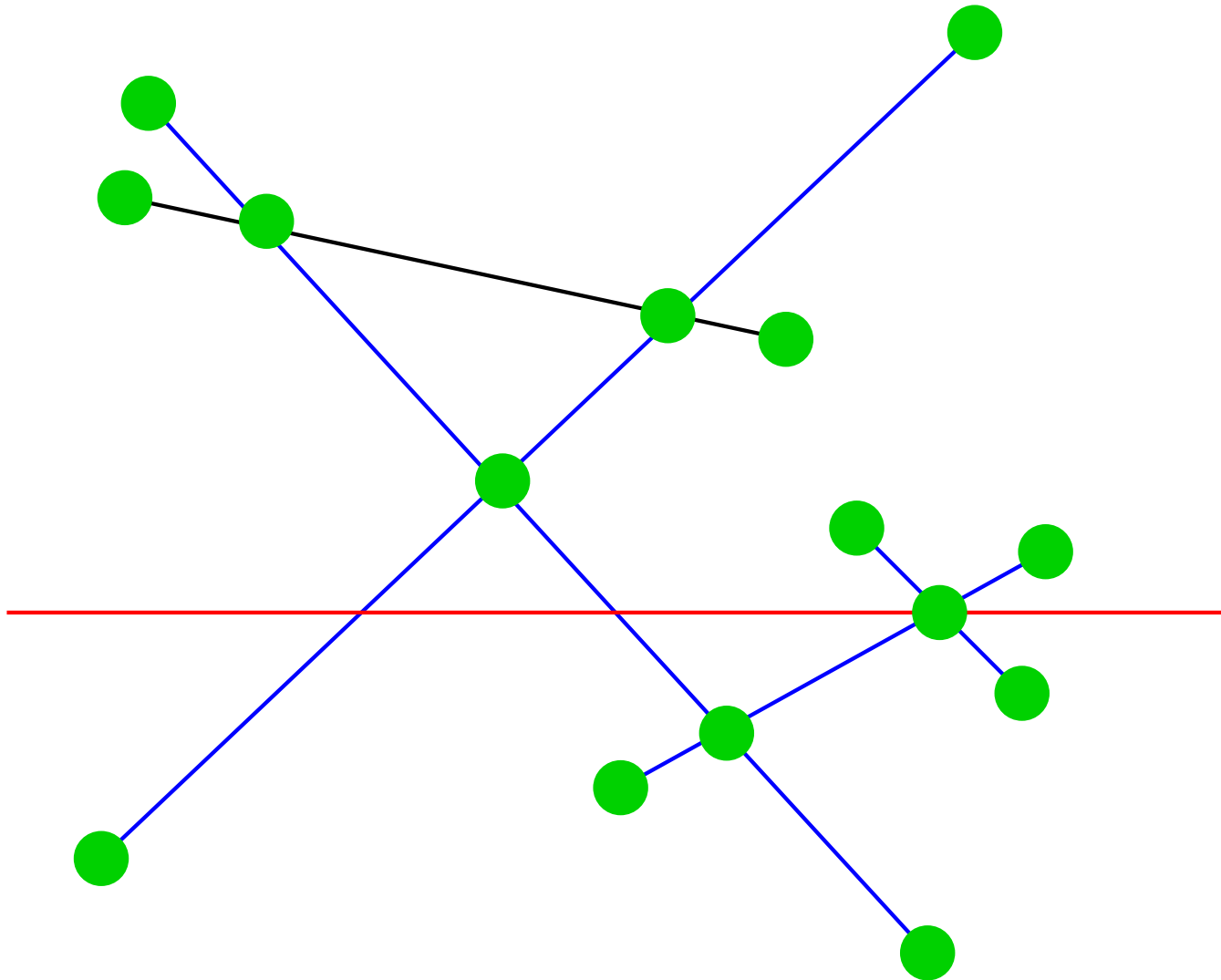
Verallgemeinerung – Beispiel



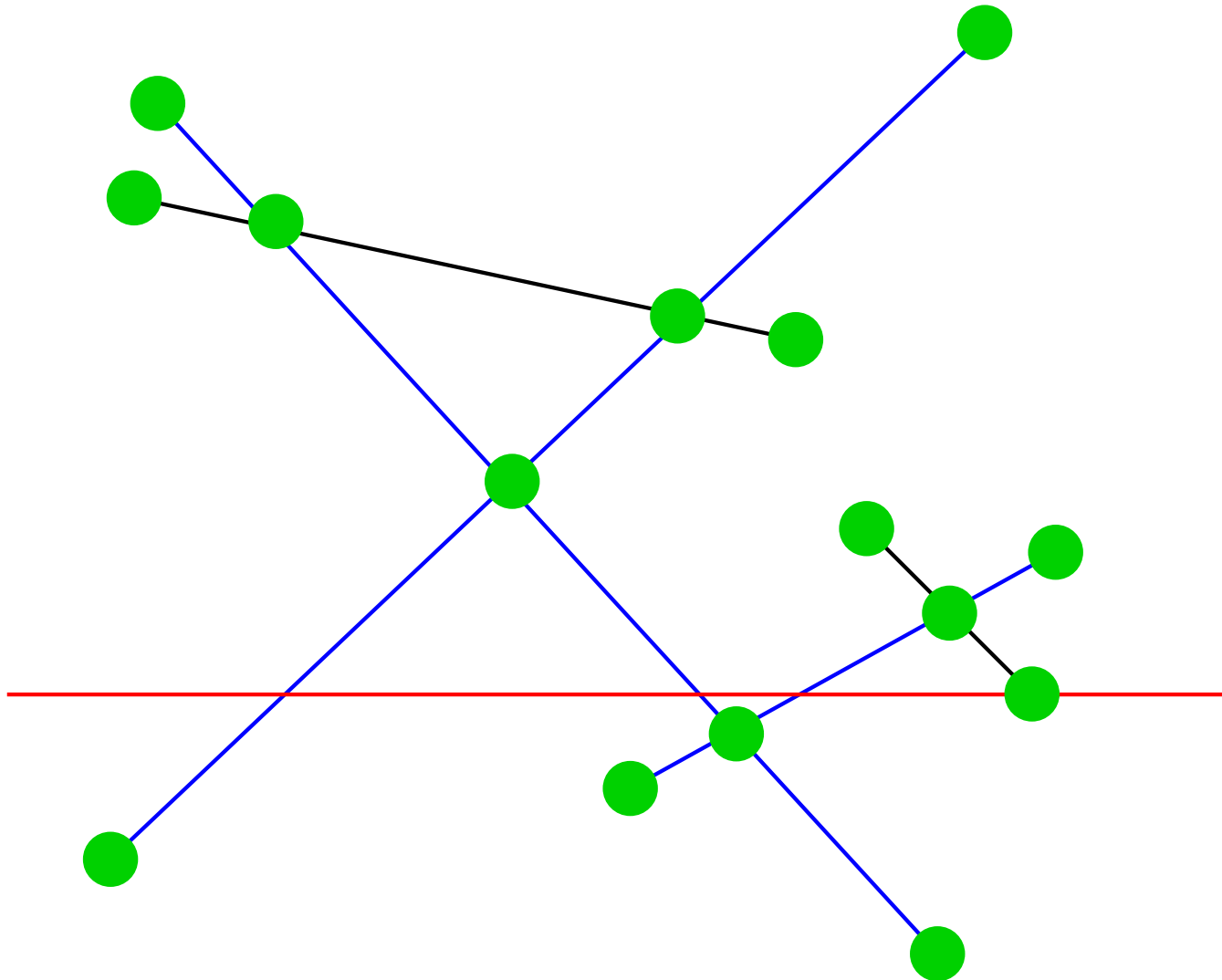
Verallgemeinerung – Beispiel



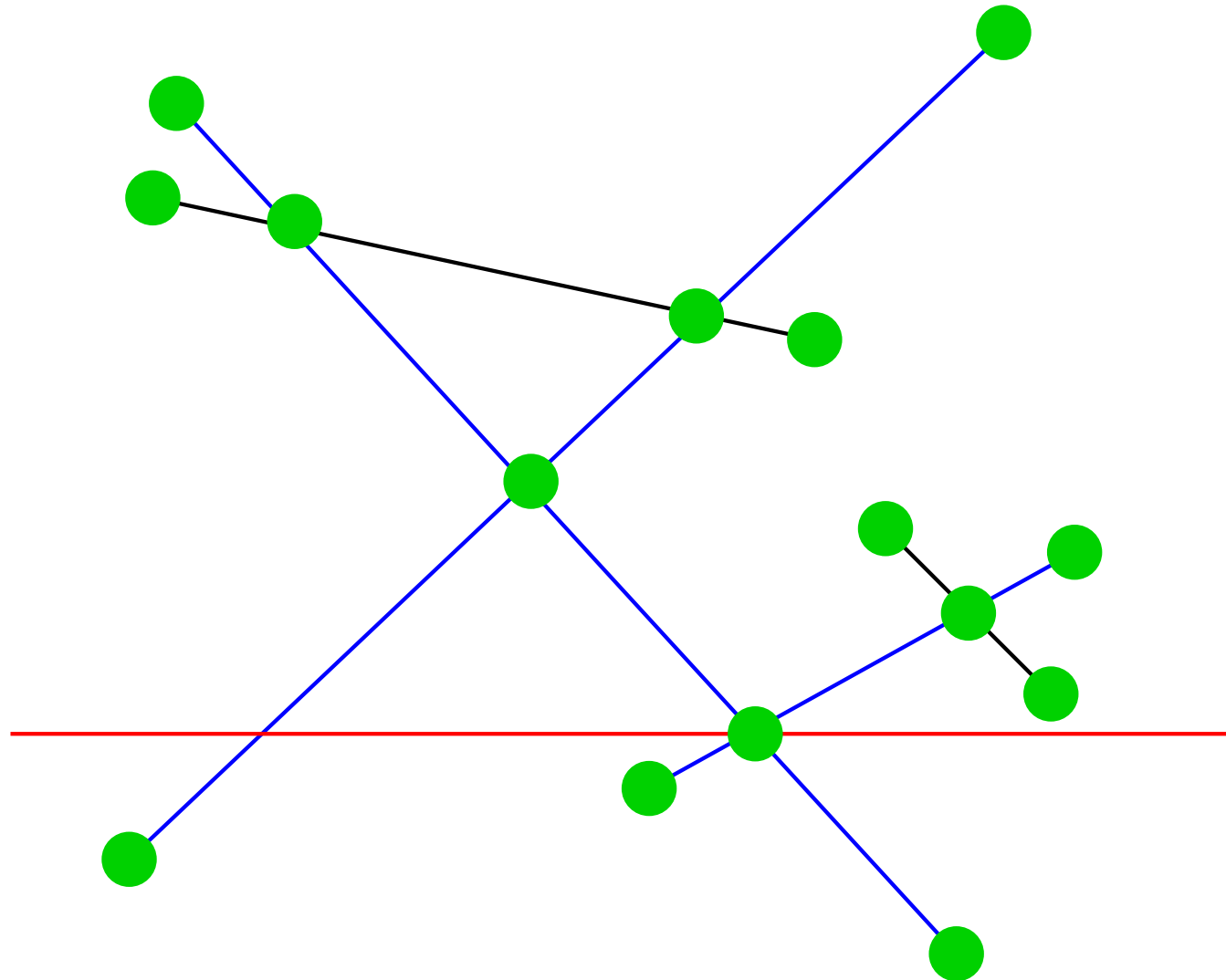
Verallgemeinerung – Beispiel



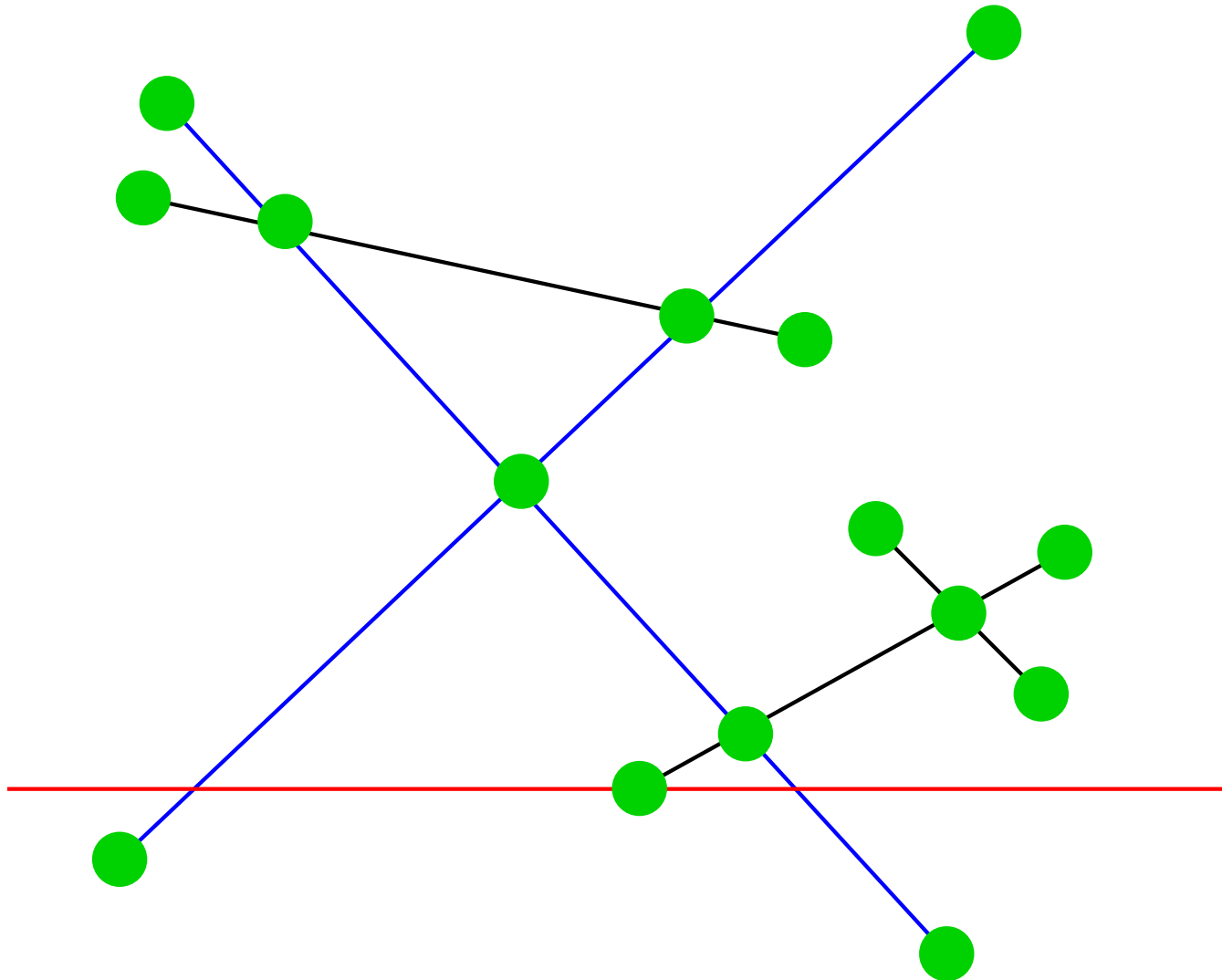
Verallgemeinerung – Beispiel



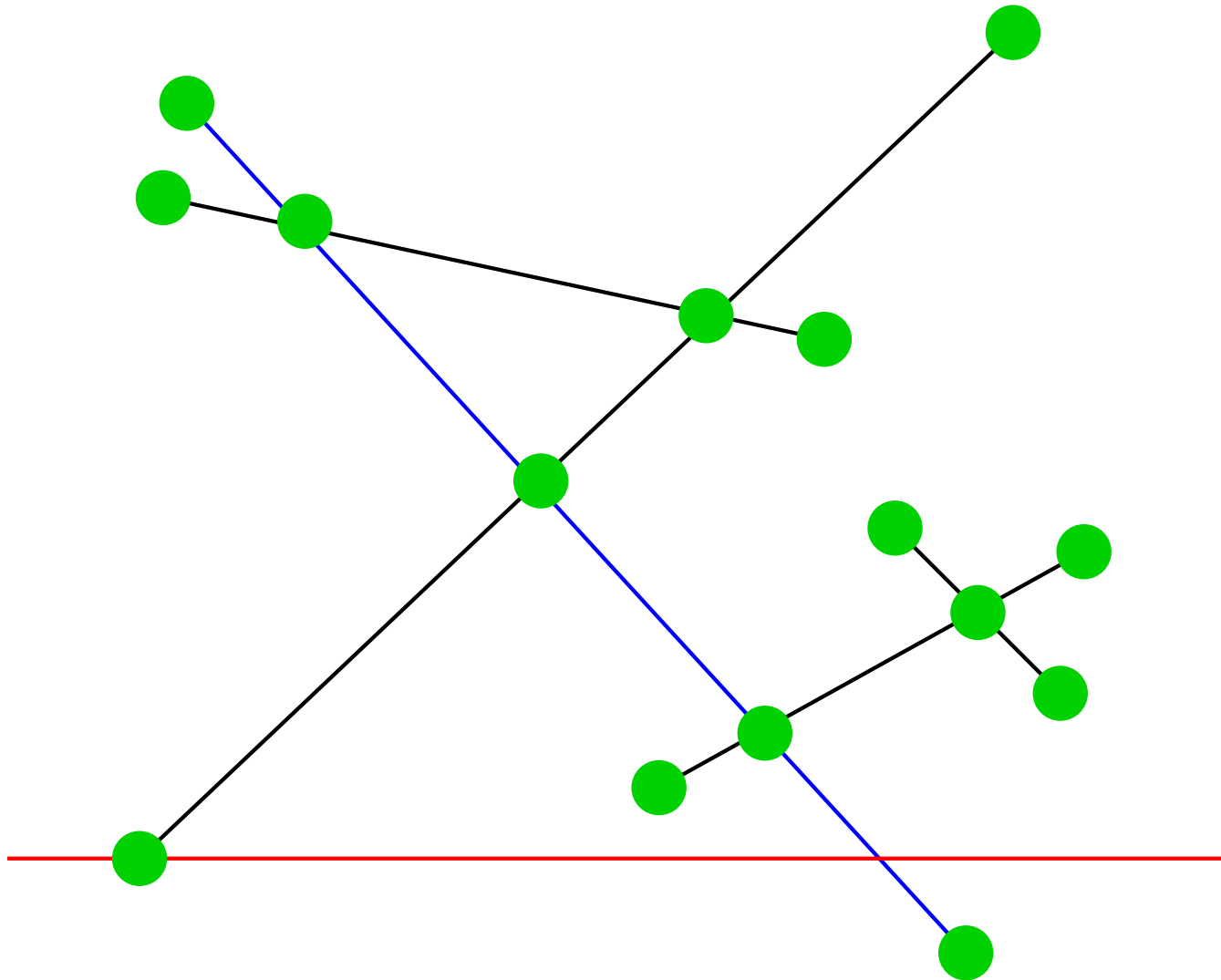
Verallgemeinerung – Beispiel



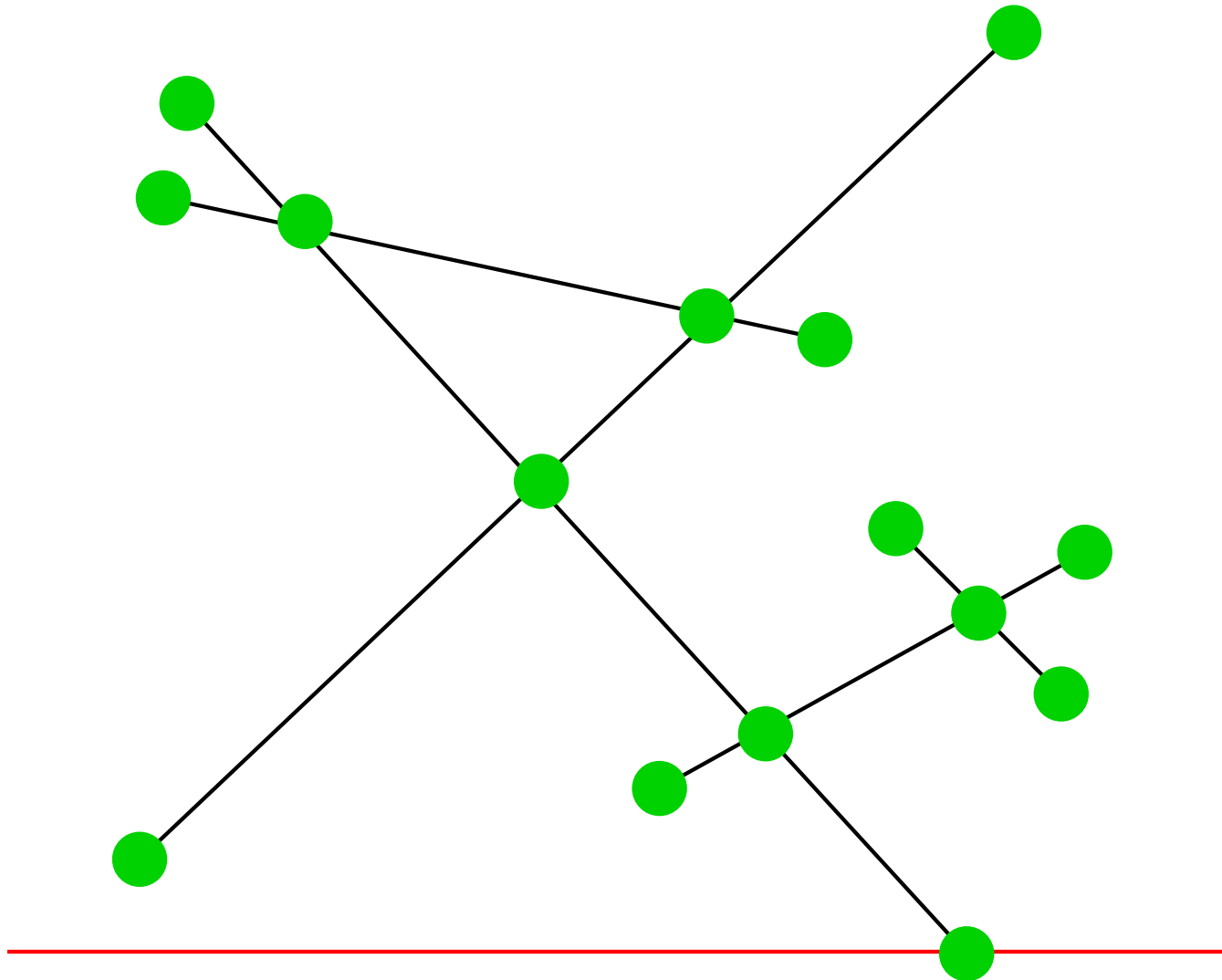
Verallgemeinerung – Beispiel



Verallgemeinerung – Beispiel



Verallgemeinerung – Beispiel



Verallgemeinerung – Analyse

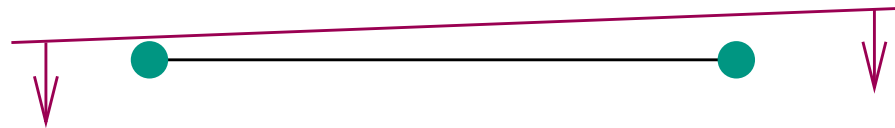
Insgesamt: $O((n + k) \log n)$

Verallgemeinerung – jetzt (fast) wirklich

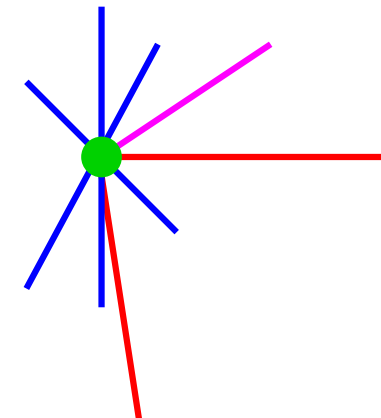
Verbleibende Annahme: Keine Überlappungen

Ordnung für Q : $(x, y) \prec (x', y') \Leftrightarrow y > y' \vee y = y' \wedge x < x'$
(verquere lexikographische Ordnung)

Interpretation: infinitesimal ansteigende Sweep-Line



Q speichert Mengen von Ereignissen mit gleichem (x, y)



handleEvent($p = (x, y)$)

$U :=$ segments starting at p // from Q

$C :=$ segments with p in their interior // from T

$L :=$ segments finishing at p // from Q

if $|U| + |C| + |L| \geq 2$ then report intersection @ p

$T.remove(L \cup C)$

$T.insert(C \cup U)$ such that order just below p is correct

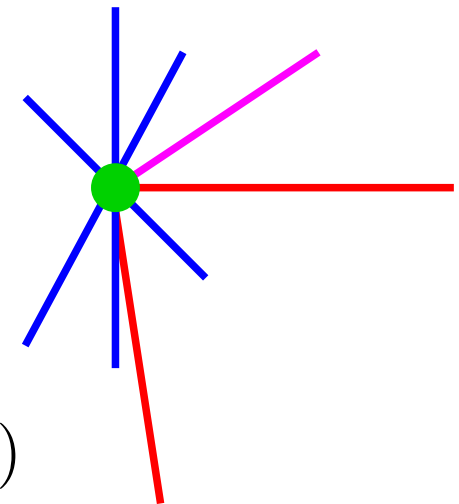
if $U \cup C = \emptyset$ then

findNewEvent($T.findPred(p), T.findSucc(p), p$)

else

findNewEvent($T.findPred(p), T.findLeftmost(p), p$)

findNewEvent($T.findRightmost(p), T.findSucc(p), p$)



findNewEvent(s, t, p)

if s and t intersect at a point $p' \succ p$ **then**

if $p' \notin Q$ **then** $Q.\text{insert}(p')$

Überlappungen finden

Für jede Strecke s berechne die Gerade $g(s)$, auf der s liegt

Sortiere S nach $g(s)$

1D Überlappungsproblem für jede auftretende Gerade.

Platzverbrauch

Im Moment: $\Theta(n + k)$

Reduktion auf $O(n)$:

lösche Schnittpunkte zwischen nicht benachbarten Strecken aus T .

Die werden ohnehin wieder eingefügt wenn sie wieder benachbart werden.

Mehr Linienschnitt

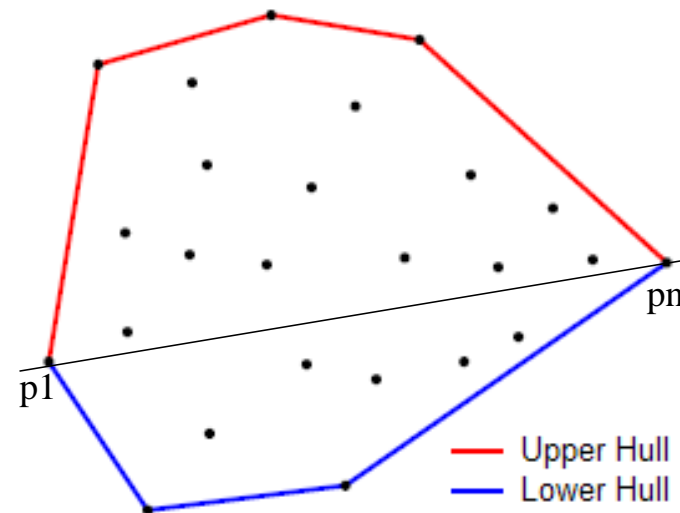
- [Bentley Ottmann 1979] Zeit $O((n + k) \log n)$
- [Chazelle Edelsbrunner 1988] Zeit $O(n \log n + k)$
- [Pach Sharir 1991] Zeit $O((n + k) \log n)$, Platz $O(n)$
- [Mulmuley 1988] erwartete Zeit $O(n \log n + k)$, Platz $O(n)$
- [Balaban 1995] Zeit $O(n \log n + k)$, Platz $O(n)$

12.2 2D Konvexe Hülle

Gegeben: Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ von Punkten in \mathbb{R}^2

Gesucht: Konvexes Polygon K mit Eckpunkten aus P und $P \subseteq K$.

Wir geben einen einfachen Algorithmus, der in Zeit $O(\text{sort}(n))$ läuft.



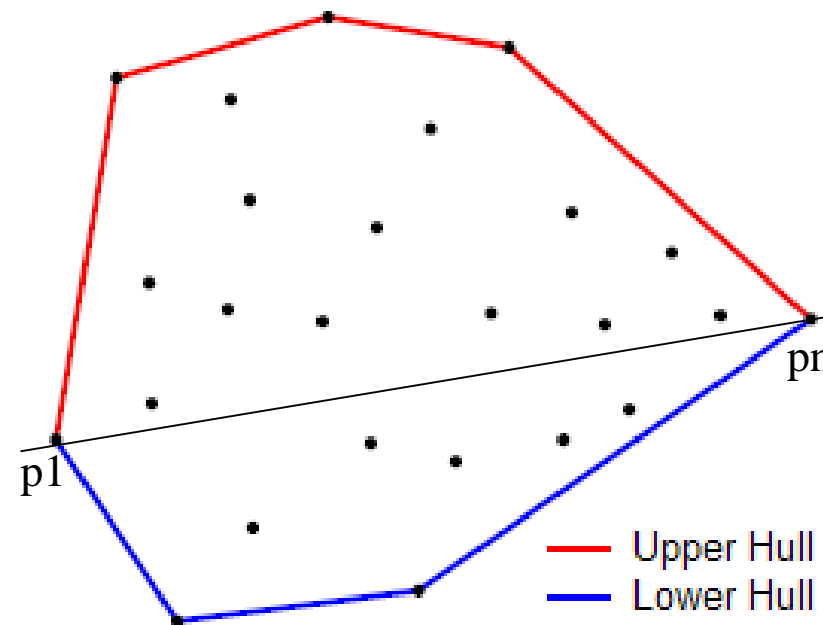
Konvexe Hülle

sortiere P lexikographisch nach (x, y) , d.h., ab jetzt

$$p_1 < p_2 < \dots < p_n$$

OBdA:

Wir berechnen nur die obere Hülle von Punkten oberhalb von $\overline{p_1 p_n}$



Graham's Scan [Graham 1972, Andrew 1979]

Function upperHull(p_1, \dots, p_n)

$L = \langle p_n, p_1, p_2 \rangle$: Stack **of** Point

invariant L is the upper hull of $\langle p_n, p_1, \dots, p_i \rangle$

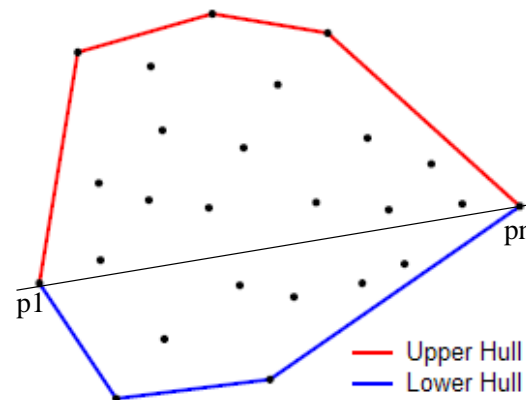
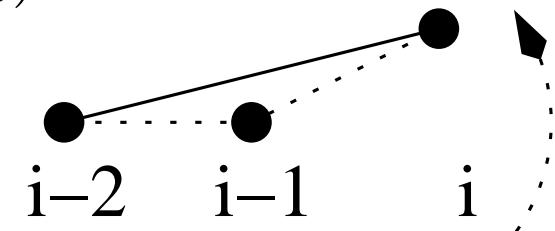
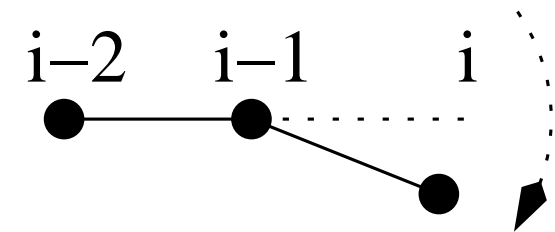
for $i := 3$ **to** n **do**

while $\neg \text{rightTurn}(L.\text{secondButLast}, L.\text{last}, p_i)$ **do**

$L.\text{pop}$

$L := L \circ \langle p_i \rangle$

return L



Graham's Scan – Beispiel

Function upperHull(p_1, \dots, p_n)

$L = \langle p_n, p_1, p_2 \rangle$: Stack **of** Point

invariant L is the upper hull of $\langle p_n, p_1, \dots, p_i \rangle$

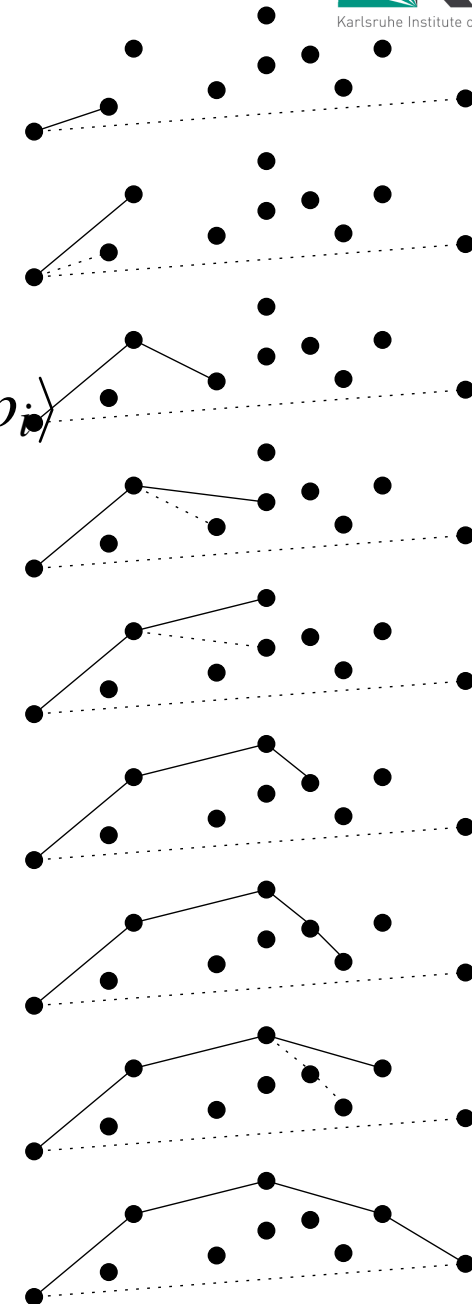
for $i := 3$ **to** n **do**

while $\neg \text{rightTurn}(L.\text{secondButlast},$
 $L.\text{last}, p_i)$ **do**

$L.\text{pop}$

$L := L \circ \langle p_i \rangle$

return L



Graham's Scan – Analyse

Function upperHull(p_1, \dots, p_n)

$L = \langle p_n, p_1, p_2 \rangle$: Stack **of** Point

invariant L is the upper hull of $\langle p_n, p_1, \dots, p_i \rangle$

for $i := 3$ **to** n **do**

while $\neg \text{rightTurn}(L.\text{secondButLast}, L.\text{last}, p_i)$ **do**

$L.\text{pop}$

$L := L \circ \langle p_i \rangle$

return L

Sortieren $+O(n)$

Wieviele Iterationen der While-Schleife insgesamt?

3D Konvexe Hülle

Geht in Zeit $O(n \log n)$ [Preparata Hong 1977]

Konvexe Hülle, $d \geq 4$

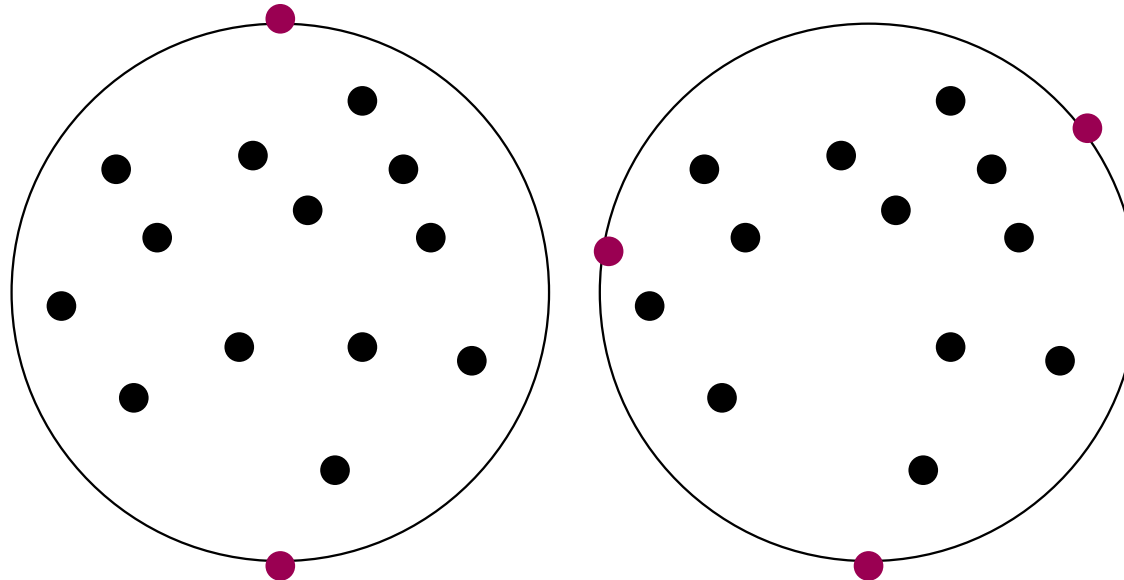
Ausgabekomplexität $O\left(n^{\lfloor d/2 \rfloor}\right)$

12.3 Kleinste einschließende Kugel

Gegeben: Menge $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ von Punkten in \mathbb{R}^d

Gesucht: Kugel K mit minimalem Radius, so dass $P \subseteq K$.

Wir geben einen einfachen Algorithmus, der in erwarteter Zeit $O(n)$ läuft. [\[Welzl 1991\]](#).



Function `smallestEnclosingBallWithPoints`(P, Q)

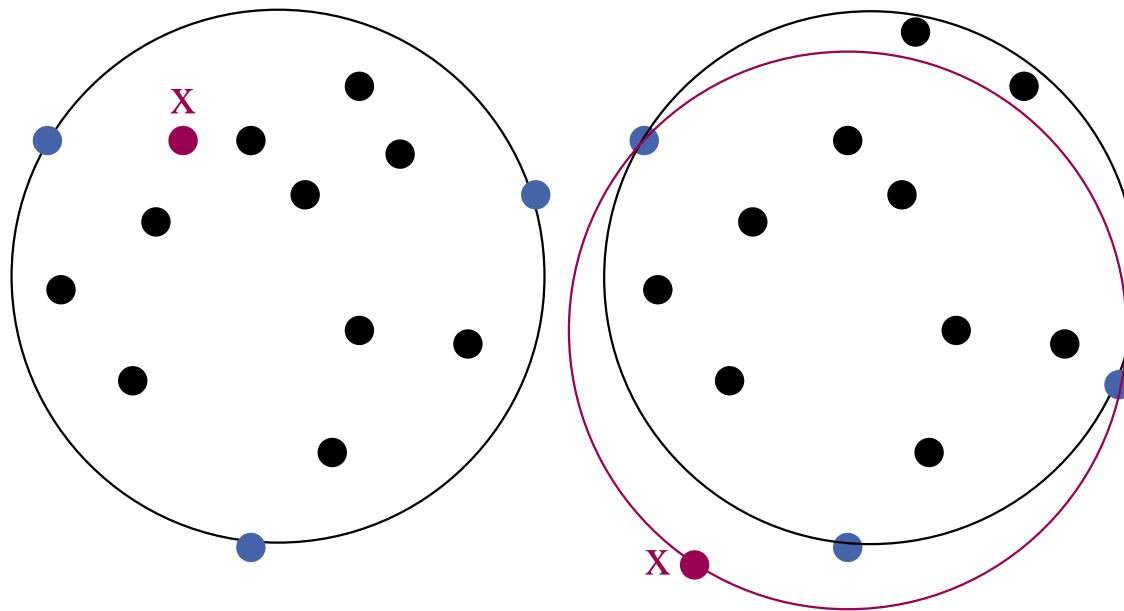
if $|P| = 0 \vee |Q| = d + 1$ **then return** `ball`(Q)

pick random $x \in P$

$B :=$ `smallestEnclosingBallWithPoints`($P \setminus \{x\}, Q$)

if $x \in B$ **then return** B

return `smallestEnclosingBallWithPoints`($P \setminus \{x\}, Q \cup \{x\}$)



Kleinste einschließende Kugel – Korrektheit

Function `smallestEnclosingBallWithPoints`(P, Q)

if $|P| = 0 \vee |Q| = d + 1$ **then return** `ball`(Q)

pick random $x \in P$

$B :=$ `smallestEnclosingBallWithPoints`($P \setminus \{x\}, Q$)

if $x \in B$ **then return** B

return `smallestEnclosingBallWithPoints`($P \setminus \{x\}, Q \cup \{x\}$)

z.Z.: $x \notin B \rightarrow x$ ist auf dem Rand von `sEB`(P)

Wir zeigen Kontraposition:

x nicht auf dem Rand von `sEB`(P)

\rightarrow `sEB`(P) = `sEB`($P \setminus \{x\}$) = B

z.Z.: `sEBs` sind eindeutig!

Also $x \in B$

Lemma: $\text{sEB}(P)$ ist eindeutig bestimmt.

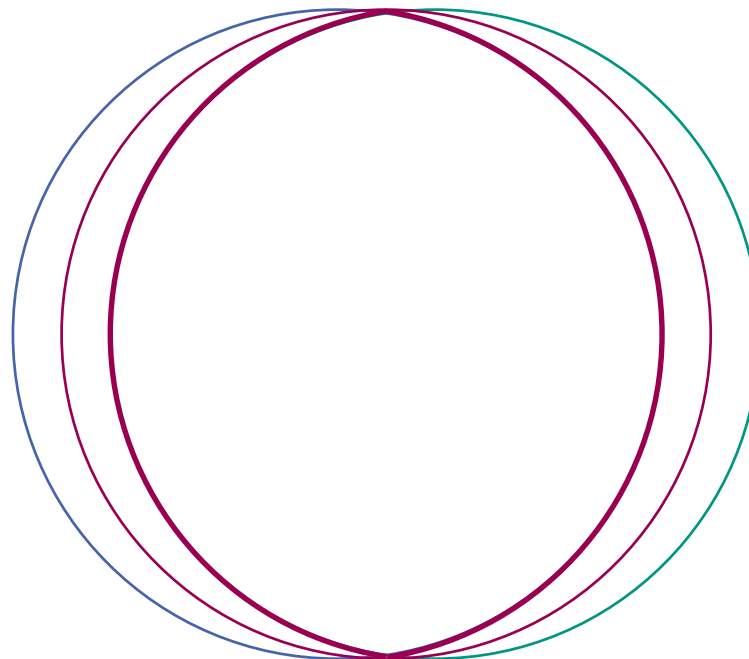
Beweis: Annahme, $\exists \text{sEBs } B_1 \neq B_2$

$$\longrightarrow P \subseteq B_1 \wedge P \subseteq B_2$$

$$\longrightarrow P \subseteq B_1 \cap B_2 \subseteq \text{sEB}(B_1 \cap B_2) =: B$$

Aber dann ist $\text{radius}(B) < \text{radius}(B_1)$

Widerspruch zur Annahme, dass B_1 eine sEB ist. □



Kleinste einschließende Kugel – Analyse

Wir zählen die erwartete Anzahl der Tests $x \in B$, $T(p, q)$.

$$T(p, d+1) = T(0, p) = 0 \quad \text{Basis der Rekurrenz}$$

$$\begin{aligned} T(p, q) &\leq 1 + T(p-1, q) + \mathbb{P}[x \notin B] T(p, q+1) \\ &\leq 1 + T(p-1, q) + \frac{d+1-q}{p} T(p, q+1) \end{aligned}$$

Kleinste einschließende Kugel – Analyse, $d = 2$

$$T(p, d+1) = T(0, q) = 0$$

$$T(p, q) \leq 1 + T(p-1, q) + \frac{d+1-q}{p} T(p, q+1)$$

$$T(p, 2) \leq 1 + T(p-1, 2) + \frac{1}{p} T(p, 3) \leq 1 + T(p-1, 2) \leq p$$

$$T(p, 1) \leq 1 + T(p-1, 1) + \frac{2}{p} T(p, 2)$$

$$\leq 1 + T(p-1, 1) + \frac{2}{p} p = 3 + T(p-1, 1) \leq 3p$$

$$T(p, 0) \leq 1 + T(p-1, 0) + \frac{3}{p} T(p, 1)$$

$$\leq 1 + T(p-1, 0) + \frac{3}{p} 3p = 10 + T(p-1, 0) \leq 10p$$

Kleinste einschließende Kugel – Analyse

d	$T(p, 0)$
1	$3n$
2	$10n$
3	$41n$
4	$206n$

Allgemein $T(p, 0) \geq d!n$

Ähnliche Randomisierte Linearzeitalgorithmen

- Lineare Programmierung mit konstantem d [Seidel 1991]
- Kleinstes einschließendes Ellipsoid, Kreisring,...
- Support-Vector-Machines (maschinelles Lernen)
- Alles wo (LP-type problem [Sharir Welzl 1992])
 - $O(1)$ Objekte das Optimum festlegen
 - Objekt x hinzufügen
 - Lösung bleibt gleich oder ist an Lösungsdef. beteiligt

12.4 2D Bereichssuche (range search)

Daten: $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Anfragen: achsenparallele Rechtecke $Q = [x, x'] \times [y, y']$

finde $P \cap Q$ (range reporting)

oder $k = |P \cap Q|$ (range counting)

Vorverarbeitung erlaubt.

Vorverarbeitungszeit? $O(n \log n)$

Platz? $O(n)$?

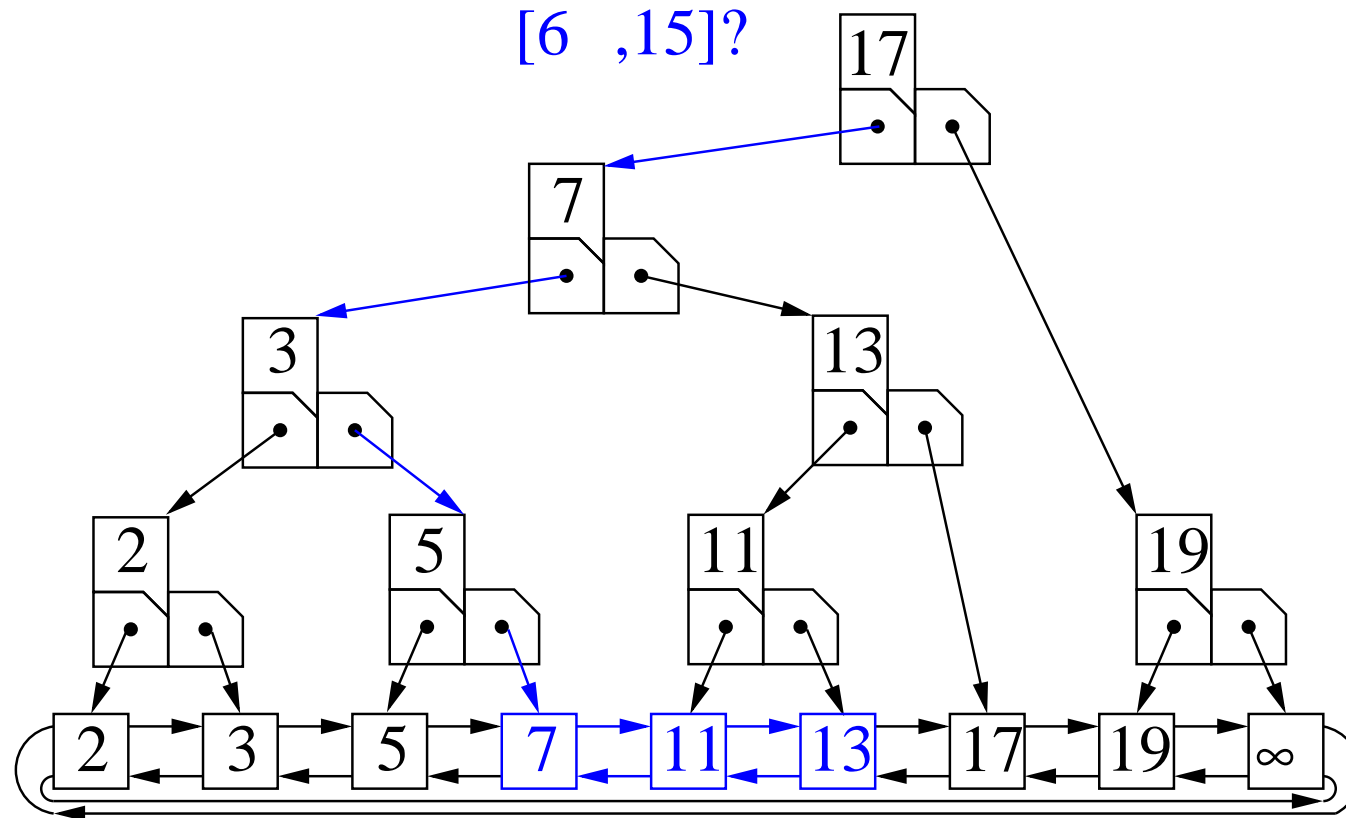
Anfragebearbeitung?

– Counting: $O(\log n)$

– Reporting: $O(k + \log n)$ oder wenigstens $O(k \cdot \log n)$

1D Bereichssuche

Suchbaum



Zählanfragen: Teilbaumgrößen speichern

Sogar dynamisch !

Reduktion auf $1..n \times 1..n$

vereinfachende Annahme: Koordinaten paarweise verschieden.

Ersetze Koordinaten $P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ durch ihren Rang:

$x_i \rightarrow$ Rang von x_i in $\{x_1, \dots, x_n\}$

$y_i \rightarrow$ Rang von y_i in $\{y_1, \dots, y_n\}$

Reduktion auf $1..n \times 1..n$

Ersetze Koordinaten $P = \{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ durch ihren Rang:

$P_x := \text{sort}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle); \quad P_y := \text{sort}(\langle y_1, \dots, y_n \rangle)$

$P := \{ (\text{binarySearch}(x, P_x), \text{binarySearch}(y, P_y)) : (x, y) \in P \}$

Function rangeQuery($[x, x'] \times [y, y']$)

$x := \text{binarySearchSucc}(x, P_x); \quad x' := \text{binarySearchPred}(x', P_x)$

$y := \text{binarySearchSucc}(y, P_y); \quad y' := \text{binarySearchPred}(y', P_y)$

$R := \text{intRangeQuery}([x, x'] \times [y, y'])$

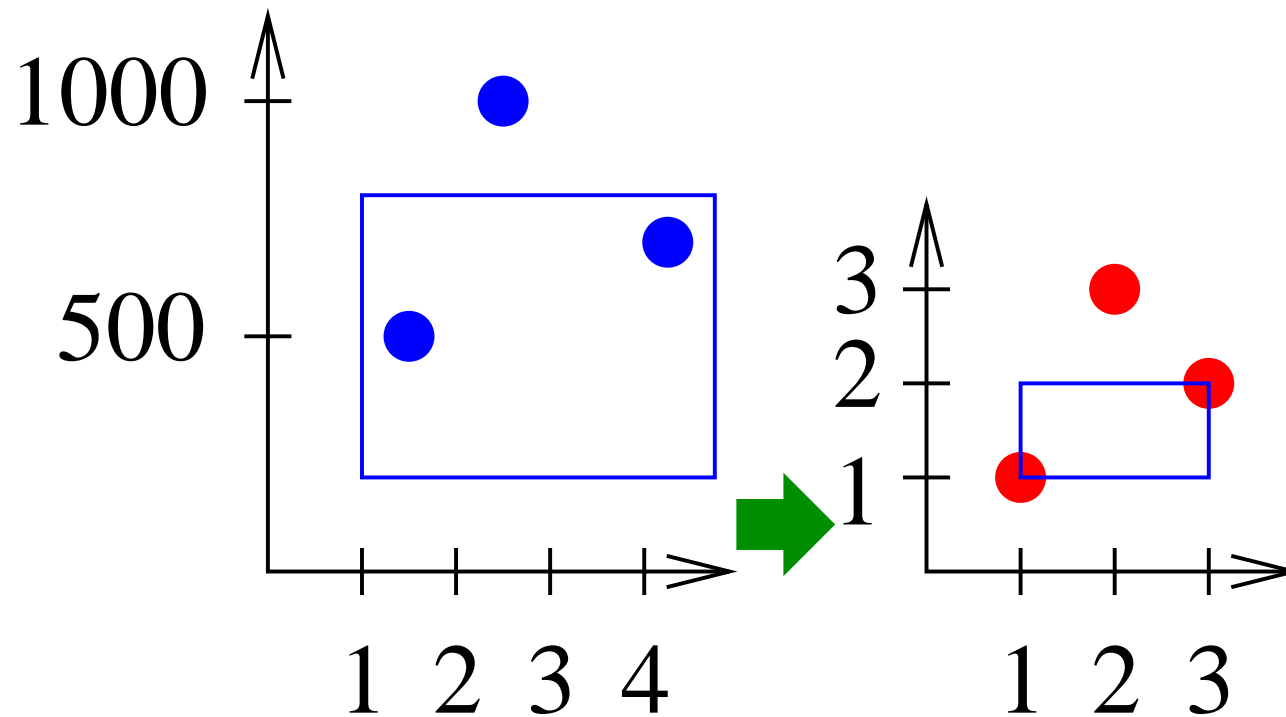
return $\{ (P_x[x], P_y[y]) : (x, y) \in R \}$

A Konstruktionszeit $O(n \log n)$, Anfragezeit

$O(\log n) + T_{\text{intRangeQuery}}(n)$

Beispiel

$$\{(2.5, 1000), (1.4, 500), (4.2, 700)\} \rightarrow \{(2, 3), (1, 1), (3, 2)\}$$



Wavelet Tree

[Chazelle 1988, Grossi/Gupta/Vitter 2003, Mäkinen/Navarro 2007]

Class WaveletTree($X = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$) // represents $(x_1, 1), \dots, (x_n, n)$

// Constructor:

if $n < n_0$ **then** store X directly

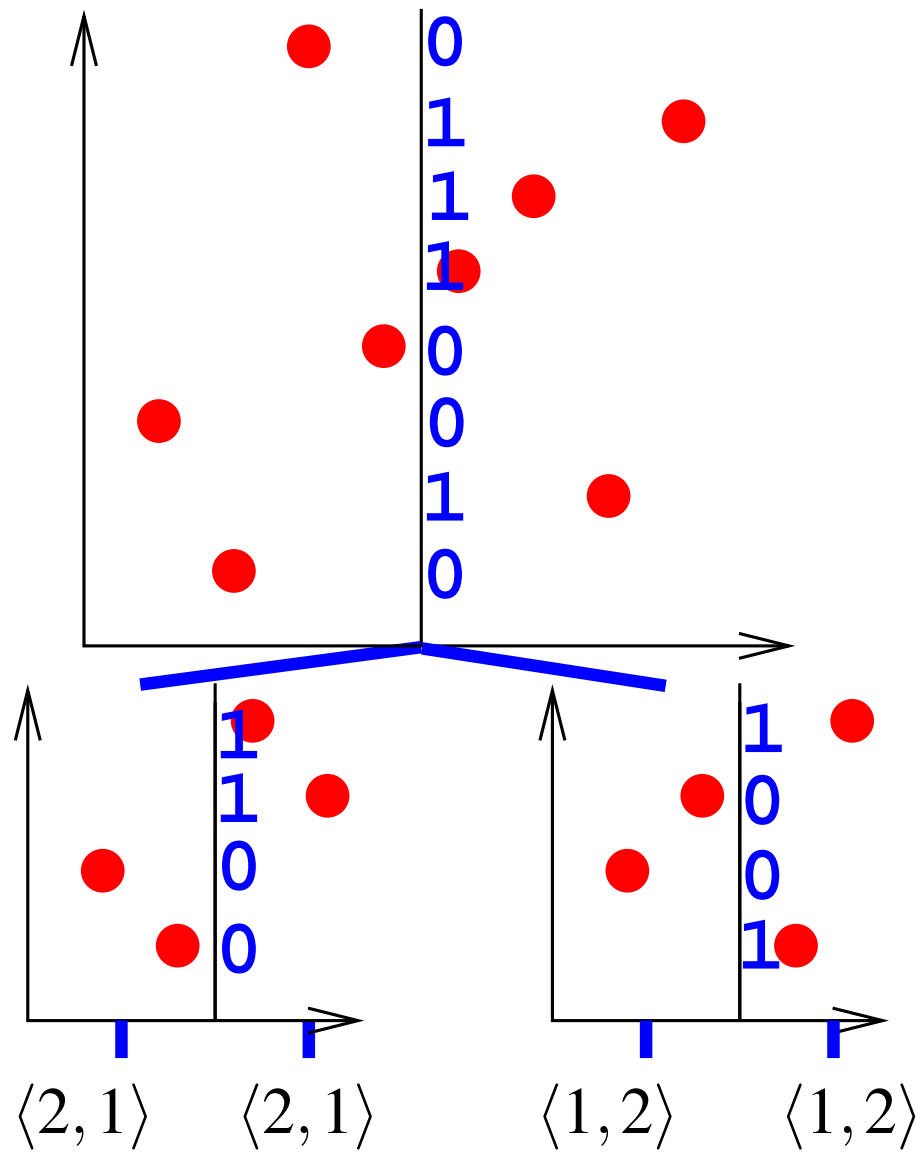
else

store bitvector b with $b[i] = 1$ iff $x_i > \lfloor n/2 \rfloor$

$\ell :=$ WaveletTree($\langle x_i : x_i \leq \lfloor n/2 \rfloor \rangle$)

$r :=$ WaveletTree($\langle x_i - \lfloor n/2 \rfloor : x_i > \lfloor n/2 \rfloor \rangle$)

Beispiel



Wavelet Tree Counting Query

Function `intRangeCount` ($[x, x'] \times [y, y']$)

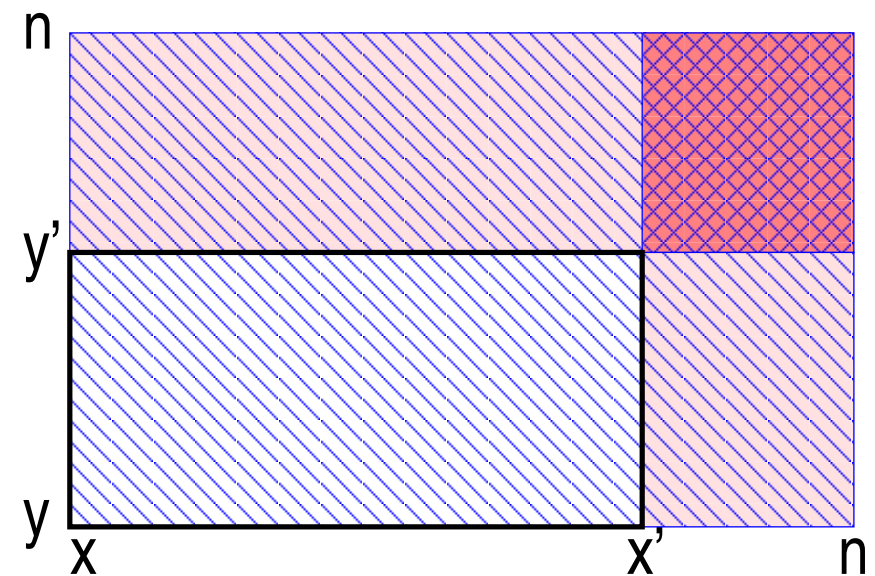
return

`intDominanceCount` (x, y) -

`intDominanceCount` (x', y) -

`intDominanceCount` (x, y') +

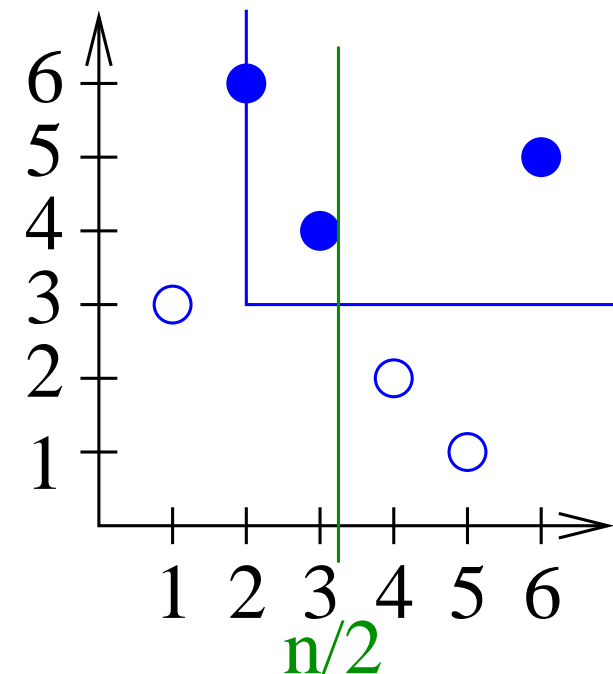
`intDominanceCount` (x', y')



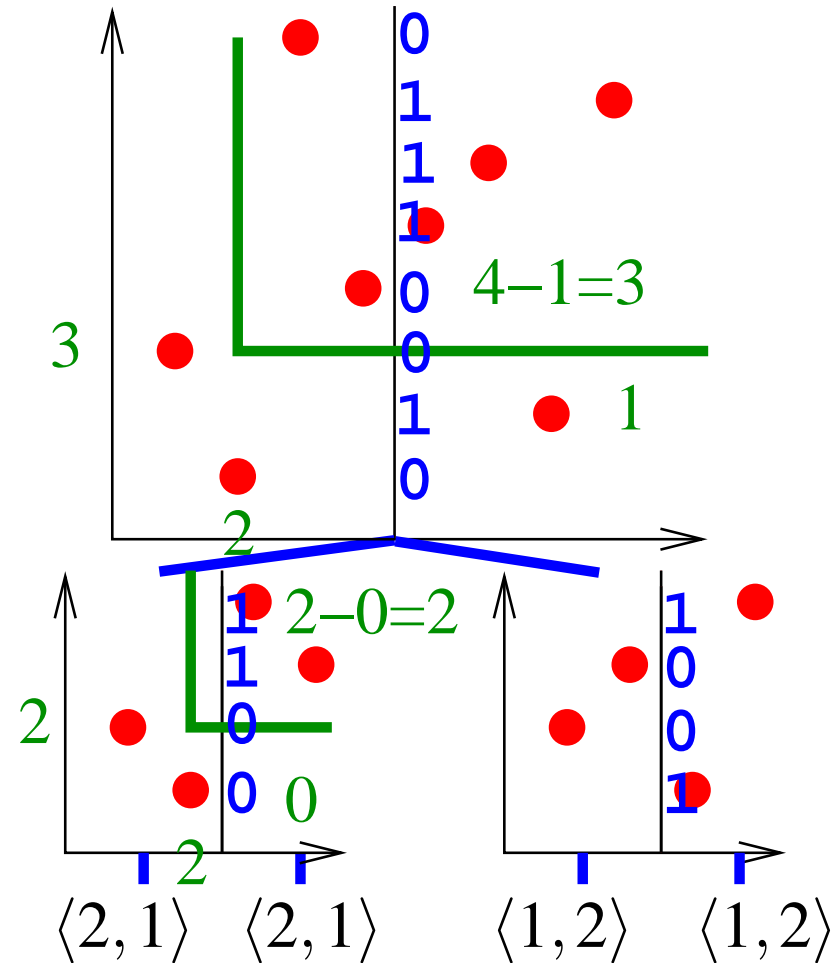
Wavelet Tree Dominance Counting Query

```

Function intDominanceCount( $x, y$ )           //  $|\llbracket x, n \rrbracket \times \llbracket y, n \rrbracket \cap P|$ 
  if  $n \leq n_0$  then return  $|\llbracket x, n \rrbracket \times \llbracket y, n \rrbracket \cap P|$            // brute force
   $y_r := b.\text{rank}(y)$                        // Number of els  $\leq y$  in right half
  if  $x \leq \lfloor n/2 \rfloor$  then
    return  $\ell.\text{intDominanceCount}(x, y - y_r) + \lceil n/2 \rceil - y_r$ 
  else
    return  $r.\text{intDominanceCount}(x - \lfloor n/2 \rfloor, y_r)$ 
  
```



Beispiel



Analyse

Nur ein rekursiver Aufruf.

Rekursionstiefe $O(\log n)$.

rank in konstanter Zeit (s.u.)

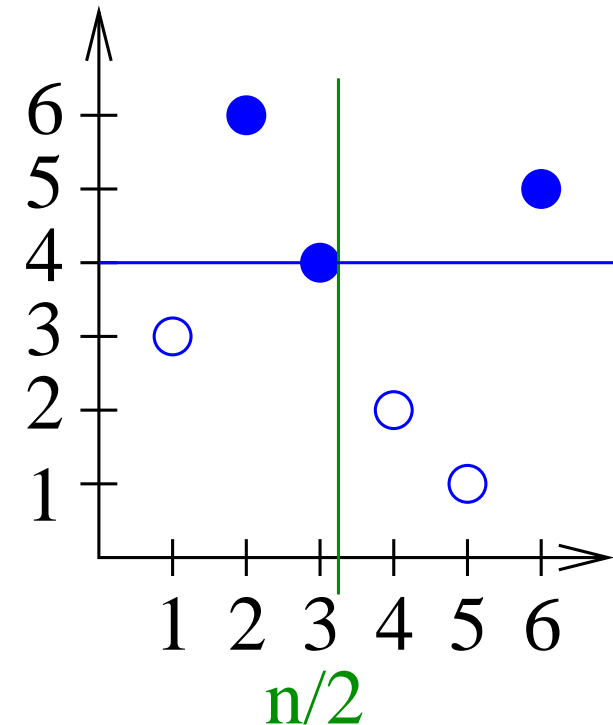
Zeit $O(\log n)$

Wavelet Tree Dominance Reporting Query

```

Function intDominanceReporting( $x, y$ )           //  $[x, n] \times [y, n] \cap P$ 
  if  $n \leq n_0$  then return  $[x, n] \times [y, n] \cap P$            // brute force
   $R := \emptyset$                                            // Result
   $y_r := b.\text{rank}(y)$                                      // Number of els  $\leq y$  in right half
  if  $x \leq \lfloor n/2 \rfloor$  then                           // Both halves interesting
    if  $y - y_r < \frac{n}{2}$  then  $R := R \cup \ell.\text{intDominanceReporting}(x, y - y_r)$ 
    if  $y_r < \frac{n}{2}$  then  $R := R \cup r.\text{oneSidedReporting}(y_r)$ 
  else if  $y_r < \frac{n}{2}$  then  $R := R \cup r.\text{intDominanceReporting}(x - \lfloor n/2 \rfloor, y_r)$ 
  return  $R$ 
  
```

Function oneSidedReporting(y) // $[1, n] \times [y, n] \cap P$
if $n \leq n_0$ **then return** $[1, n] \times [y, n] \cap P$ // brute force
 $y_r := b.\text{rank}(y)$ // Number of els $\leq y$ in right half
 $R := \emptyset$
if $y_r < \frac{n}{2}$ **then** $R := R \cup r.\text{oneSidedReporting}(y_r)$
if $y - y_r < \frac{n}{2}$ **then** $R := R \cup \ell.\text{oneSidedReporting}(y - y_r)$
return R



Analyse

Rekurrenz

$$T(n_0, 0) = O(1)$$

$$T(n, 0) = T(n/2, 0) + O(1) \implies T(n, 0) = O(\log n)$$

$$T(n, k) = T(n/2, k') + T(n/2, k - k') + O(1) \text{ also}$$

$$T(n, k) \leq ck' \log \frac{n}{2} + c(k - k') \log \frac{n}{2} + c \leq ck \log n$$

Zeit $O(k + \log n)$ braucht zusätzlichen Faktor $\log n$ Platz.

Z.B. komplette Listen auf allen Ebenen speichern

Übungsaufgabe?

Allgemeine Reporting Query

4-seitig

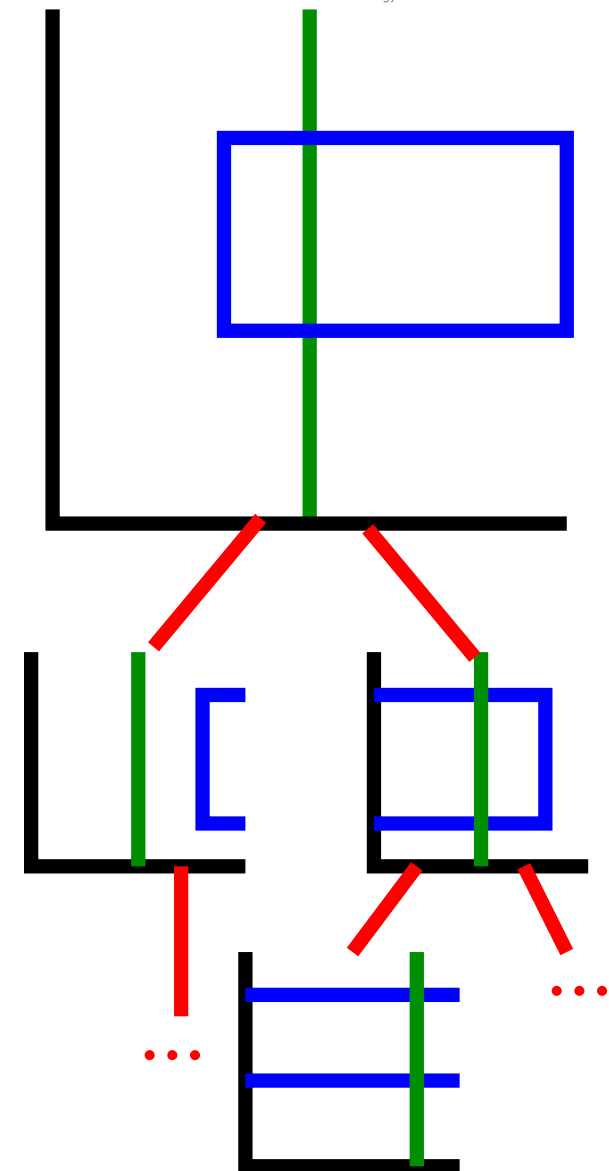


3-seitig (2 Varianten)



y-range

Analog oneSidedReporting (zwei Ranks statt einem)



Bitvektoren v mit rank in $O(1)$

Wähle $B = \Theta(\log n)$.

Vorberechnung $\text{bRank}[i] := v.\text{rank}(iB)$

Zeit $O(n)$, Platz $O(n)$ bits

Reduktion auf logarithmische Eingabegröße:

Function $\text{rank}(j)$ **return** $\text{bRank}[j \text{ div } B] + \text{rank}(v[B(j \text{ div } B)..j])$

Logarithmische Größe:

Maschinenbefehl (population count) oder Tabellenzugriff (z.B. Größe \sqrt{n} Zahlen)

0	4	8	11
10010011	10001110	00001110	10100010

↑ rank=8+2=10

Mehr zu Bitvektoren

- weitere wichtige Operation $b.select(i) :=$ Position des i -ten 1-bits.
Ebenfalls $O(1)$
- Informationstheoretisch asympt. optimaler Platz $n + o(n)$ bits
möglich.
- Grundlage für weitere **succinct data structures**
- Beispiel: **Baum** mit Platz $2n + o(n)$ bits und Navigation in
konstanter Zeit.

Geometry Summary

- Theoretical algorithms often make assumption like “**general position**” that need to be removed in practice
- Geometric predicates** like *leftTurn* or *inCircle* package the numerically complicated issues
- High-dimensional** problems particularly interesting/difficult
- Randomization** and **data structures** once more important