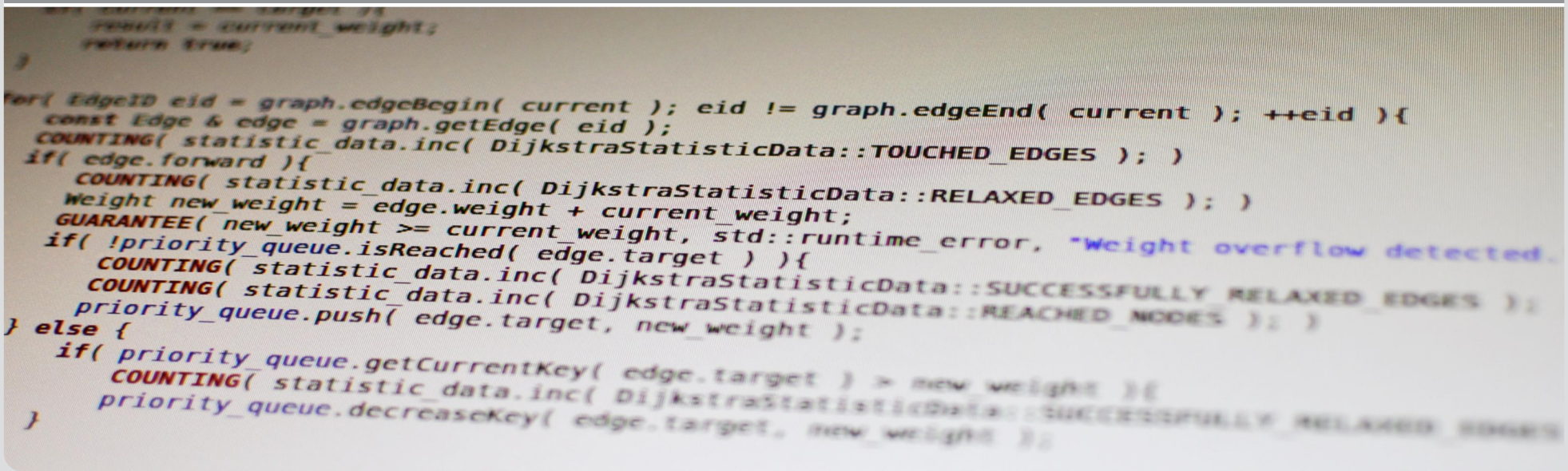
Karlsruher Institut für Technologie

Übung 3 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Hans-Peter Lehmann – *{moritz.laupichler, hans-peter.lehmann}@kit.edu*

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS22.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

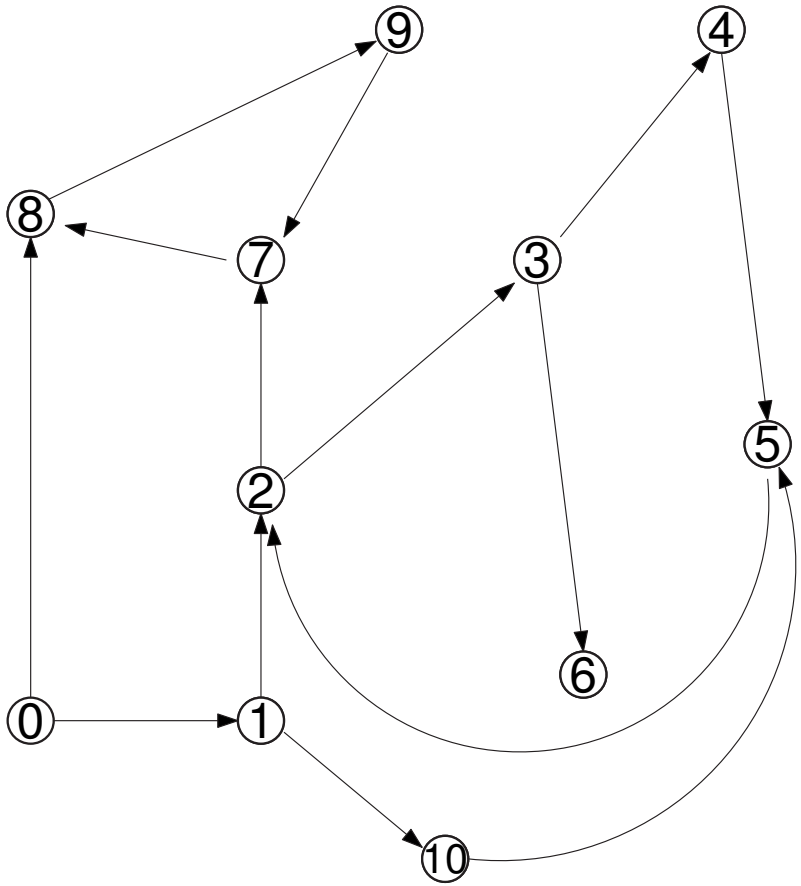


Themenübersicht

- SCCs mit DFS berechnen
- Besprechung Übungsblatt 1

Starke Zusammenhangskomponenten

SCC



oNodes	oReps

SCC

Invariante 1

Keine Kanten von geschlossenen in offene Komponenten.

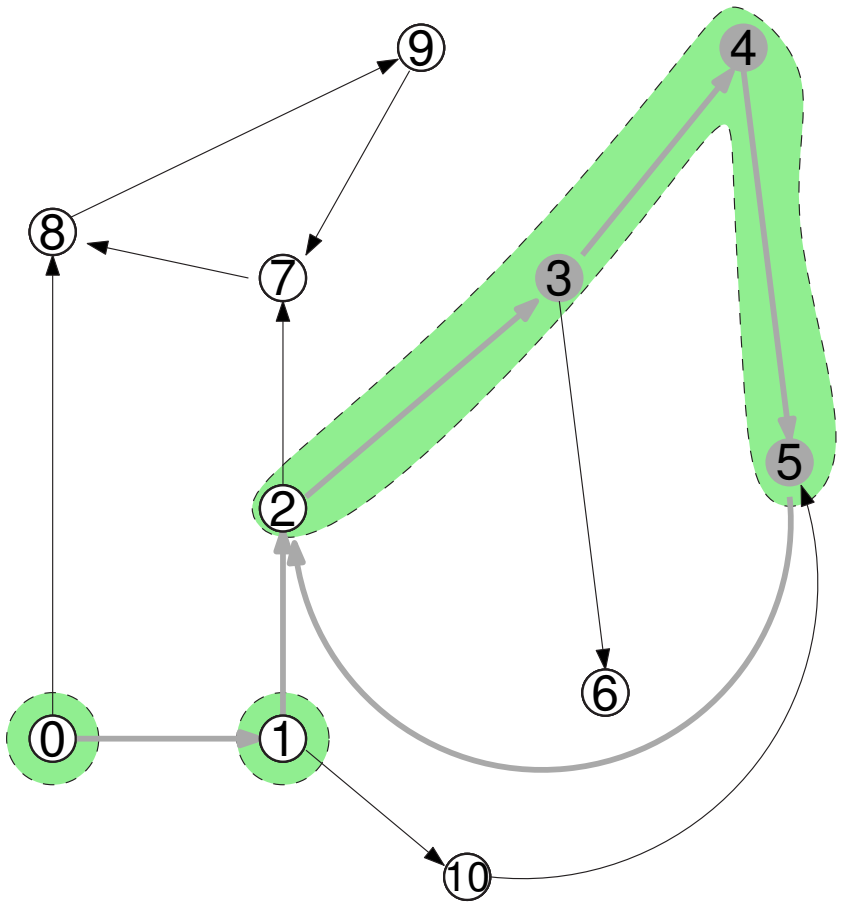
Invariante 2

Offene Komponenten liegen auf Pfad.

Invariante 3

Repräsentanten partitionieren offene Komponenten bzgl. dfsNum.

SCC



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

SCC

Invariante 1

Keine Kanten von geschlossenen in offene Komponenten.

- Tiefensuche sucht Pfad durch Graphen
- Nur Rückwärtskanten ergeben Kreise
- Kreise vereinigen alle auf dem Kreis liegenden offenen Komponenten

Invariante 2

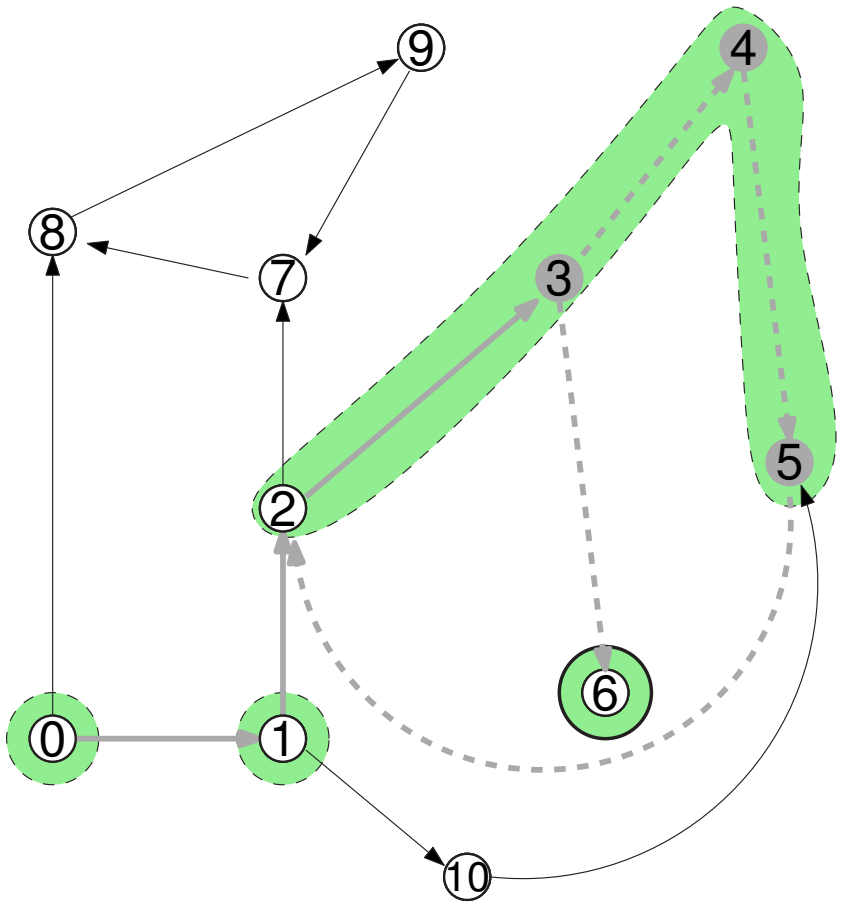
Offene Komponenten liegen auf Pfad.

- Repräsentant ist minimal auf Kreis

Invariante 3

Repräsentanten partitionieren offene Komponenten bzgl. dfsNum.

SCC



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	
6	6

SCC

- Komponenten werden nach Bearbeitung aller ausgehenden Kanten geschlossen
- Alle offenen Komponenten liegen auf Stack
- Kante von geschlossener in offene Komponenten hätte bei Bearbeitung Kreis induziert

Invariante 1

Keine Kanten von geschlossenen in offene Komponenten.

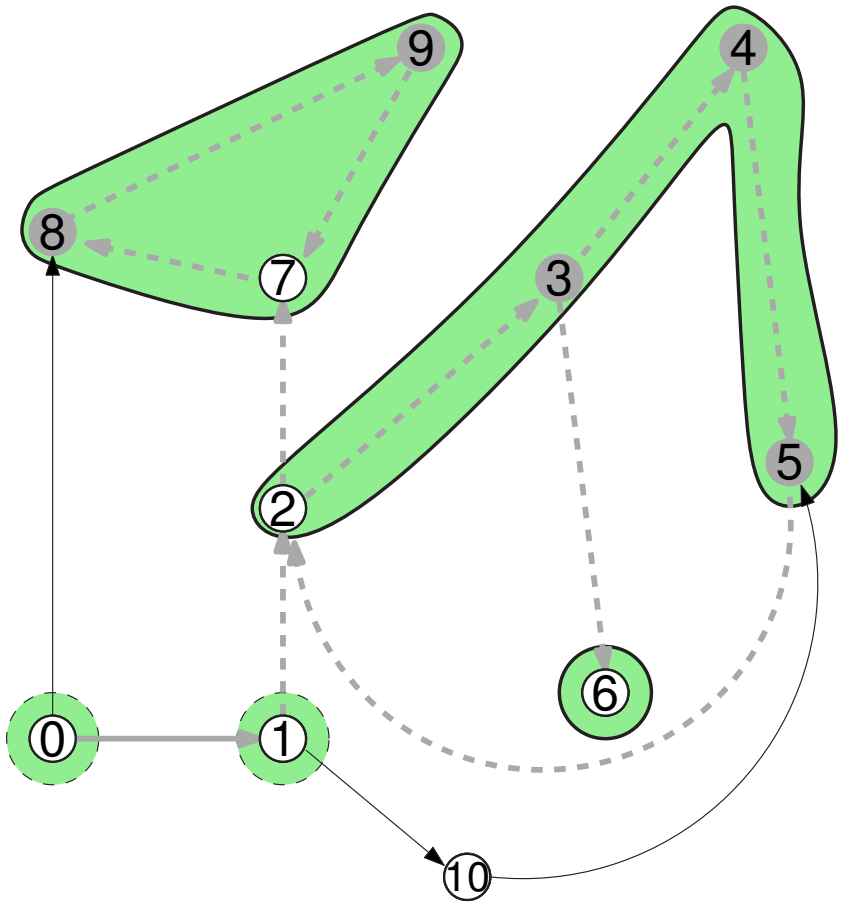
Invariante 2

Offene Komponenten liegen auf Pfad.

Invariante 3

Repräsentanten partitionieren offene Komponenten bzgl. dfsNum.

SCC



oNodes	oReps
0	0
1	1
2	2
3	
4	
5	

Übungsblatt 1

Aufgabe 5 (*Entwurf: Datenstrukturen*)

1. Erweitern Sie die Datenstruktur *Pairing Heap* um die Operation `increaseKey(h: Handle, k: Key)`. Ihre Operation sollte amortisiert $O(\log n)$ Laufzeit benötigen. Geben Sie Pseudocode an. Wie würden Sie bei einem *Binary Heap* vorgehen?
2. Entwerfen Sie eine Datenstruktur welche die Operationen `insert` in $O(\log n)$, Median bestimmen in $O(1)$ und Median entfernen in $O(\log n)$ unterstützt. Eine Beschreibung in Worten ist ausreichend.

Übungsblatt 1

Aufgabe 7 (*Analyse: Laufzeit von Dijkstra's Algorithmus*)
Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V, E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, sowie eine Kantengewichtungsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_0^+$.

1. Beweisen Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass für $m = \Omega(n \log n \log\log n)$ Dijkstra's Algorithmus mit einem *binary heap* eine durchschnittliche Laufzeit von $O(m)$ besitzt.
2. Eine spezielle *Priority Queue* habe folgende Laufzeiteigenschaften:
   - `insert`: $O(\log n)$
   - `decreaseKey`: $O(1)$
   - `deleteMin`: $O(\sqrt{m})$

   (ob eine Datenstruktur mit diesen Eigenschaften existiert und Dijkstra's Algorithmus mit ihr korrekt arbeitet, ist eine andere Frage, aber wir nehmen für diese Aufgabe an es ginge :-))

   Geben Sie eine kleinste obere Schranke für die Laufzeit von Dijkstra's Algorithmus unter Verwendung dieser *Priority Queue* an. Unter welcher Bedingung an das Verhältnis der Anzahl Knoten n zu Kanten m wird die Laufzeit linear in der Eingabegröße? Die Eingabe erfolgt in Form einer Adjazenzliste.

Ende!

Feierabend!