

Übung 5 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Hans-Peter Lehmann – {moritz.laupichler, hans-peter.lehmann}@kit.edu
http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS22.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II

```
    result = current_weight;
    return true;
}

for( EdgeID eid = graph.edgeBegin( current ); eid != graph.edgeEnd( current ); ++eid ){
    const Edge & edge = graph.getEdge( eid );
    COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::TOUCHED_EDGES ); )
    if( edge.forward ){
        COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::RELAXED_EDGES ); )
        weight new_weight = edge.weight + current_weight;
        GUARANTEE( new_weight >= current_weight, std::runtime_error, "Weight overflow detected." );
        if( !priority_queue.isReached( edge.target ) ){
            COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::SUCCESSFULLY_RELAXED_EDGES ); )
            COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::REACHED_NODES ); )
            priority_queue.push( edge.target, new_weight );
        } else {
            if( priority_queue.getCurrentKey( edge.target ) > new_weight ){
                COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::SUCCESSFULLY_RELAXED_NODES ); )
                priority_queue.decreaseKey( edge.target, new_weight );
            }
        }
    }
}
```

- Randomisierte Algorithmen
- Besprechung Übungsblatt 2

Randomisierte Algorithmen

■ *Las Vegas Algorithmus*

- immer korrekte/optimale Lösung
- Laufzeit ist Zufallsvariable
→ erwartete Laufzeit $\mathbb{E}[T]$
- Bsp.: Quicksort

■ *Monte Carlo Algorithmus*

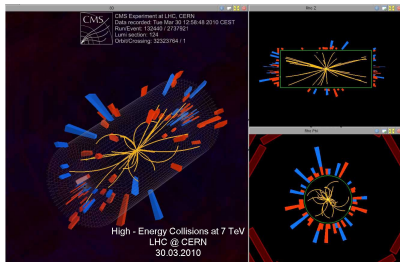
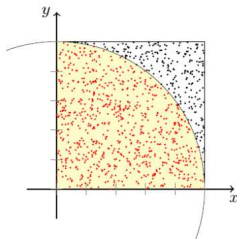
- falsche/suboptimale Lösung möglich
→ mit Wahrscheinlichkeit p
- deterministische Laufzeit
- Bsp.: Miller-Rabin Primzahltest

Randomisierte Algorithmen

Monte Carlo Simulation

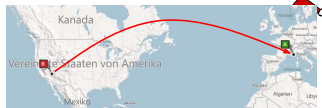
■ Monte Carlo Simulation

- nicht zu verwechseln mit *Monte Carlo Algorithmus*!
- Zufallsexperimente sehr oft ausführen Gesetz der großen Zahlen
- je länger / öfter ausgeführt, desto bessere Ergebnisse
 - Alternative zur analytischen Lösung
 - 3D-Rendering
 - Nachbildung komplexer Prozesse



Randomisierte Algorithmen

Las Vegas $\rightarrow$ Monte Carlo



geg: Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T] = f(n)$

ges: Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(f(n))$, Fehlerrate p

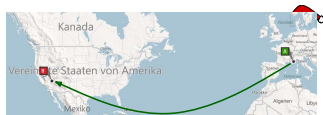
Idee: Abbruch nach Zeit $\alpha f(n)$

- Ausgabe FALSCH, wenn Algorithmus abgebrochen wurde
- $\mathbb{P}[T > \alpha f(n)] \leq 1/\alpha$ Markov Ungleichung

$\rightarrow$ Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\alpha f(n)$ und Fehlerrate $p = 1/\alpha$

Randomisierte Algorithmen

Monte Carlo → Las Vegas



geg: Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(f(n))$, Fehlerrate p ,
Korrektheit in $\mathcal{O}(g(n))$ prüfbar

ges: Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T]$

Idee: Wiederhole MC bis korrektes Ergebnis gefunden

■ Laufzeit $T \leq i \cdot \mathcal{O}(f(n) + g(n))$ i Schritte benötigt

■ $\mathbb{E}[T] \leq \mathbb{E}[i] \cdot \mathcal{O}(f(n) + g(n))$

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathbb{E}[i] &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} \cdot (1-p) = \frac{1}{1-p} \\ &\text{nach } \sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x/(1-x)^2, \quad x < 1 \end{aligned}$$

→ Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T] \leq \frac{\mathcal{O}(f(n)+g(n))}{1-p}$

Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:

- berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:

- Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \dots, r_n)$ zufällig
- Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

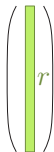
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

■ deterministisch:

- berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

■ randomisiert:

- Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \dots, r_n)$ zufällig
- Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

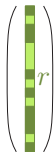
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

■ deterministisch:

- berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

■ randomisiert:

- Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \dots, r_n)$ zufällig
- Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

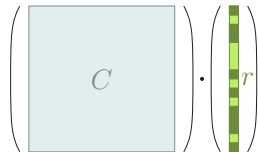
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

■ deterministisch:

- berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

■ randomisiert:

- Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \dots, r_n)$ zufällig
- Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$


$$\begin{pmatrix} C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \end{pmatrix}$$

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

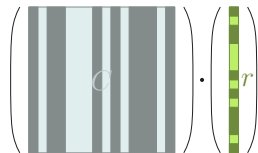
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

■ deterministisch:

- berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

■ randomisiert:

- Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \dots, r_n)$ zufällig
- Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH
→ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$


$$\begin{pmatrix} \text{Matrix } X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Vector } Yr \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Vector } Zr \end{pmatrix}$$

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

■ $A := XY, B := Z$

Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

■ $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$

■ Sei $a := A_j$ und $b := B_j$: i'te Zeile von A

$$\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k \text{ und } \beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$$

$$\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j \text{ und } br = \beta + b_j r_j$$

$$\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j)r_j$$

■ Annahme: Werte für $r_{1 \dots j-1, j+1 \dots n}$ bereits festgelegt

→ noch 2 Möglichkeiten für r_j , Gleichheit bei maximal einer

$$\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$$

→ Fehlerrate $p \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

■ $A := XY, B := Z$

Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

■ $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$

■ Sei $a := A_i$ und $b := B_i$: i'te Zeile von A

$$\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k \text{ und } \beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$$

$$\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j \text{ und } br = \beta + b_j r_j$$

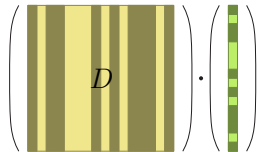
$$\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j)r_j$$

■ Annahme: Werte für $r_{1 \dots j-1, j+1 \dots n}$ bereits festgelegt

→ noch 2 Möglichkeiten für r_j , Gleichheit bei maximal einer

$$\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$$

→ Fehlerrate $p \leq 0.5$


$$\begin{pmatrix} \text{Matrix } D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Vector } r \end{pmatrix}$$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

■ $A := XY, B := Z$

Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

■ $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$

■ Sei $a := A_i$ und $b := B_i$: i'te Zeile von A

$$\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k \text{ und } \beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$$

$$\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j \text{ und } br = \beta + b_j r_j$$

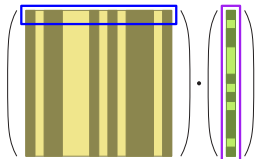
$$\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j)r_j$$

■ Annahme: Werte für $r_{1 \dots j-1, j+1 \dots n}$ bereits festgelegt

→ noch 2 Möglichkeiten für r_j , Gleichheit bei maximal einer

$$\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$$

→ Fehlerrate $p \leq 0.5$



Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

■ $A := XY, B := Z$

Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

■ $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$

■ Sei $a := A_i$ und $b := B_i$; i 'te Zeile von A

$$\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k \text{ und } \beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$$

$$\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j \text{ und } br = \beta + b_j r_j$$

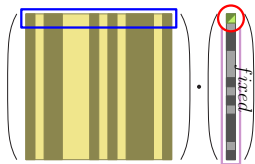
$$\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j)r_j$$

■ Annahme: Werte für $r_{1 \dots j-1, j+1 \dots n}$ bereits festgelegt

→ noch 2 Möglichkeiten für r_j , Gleichheit bei maximal einer

$$\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$$

→ Fehlerrate $p \leq 0.5$



Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Beschleunigung durch *probability boosting*

nur bei $p \leq 0.5$ schnelle Konvergenz

- Wiederhole Test k mal mit unterschiedlicher Wahl von r

- Ein Test liefert FALSCH

- $AB \neq C$, fertig

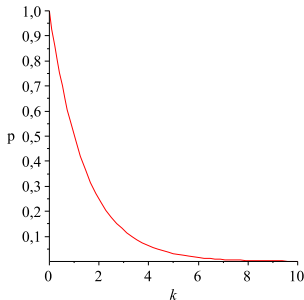
- Alle Tests liefern KORREKT

- *false positive* mit Wahrscheinlichkeit

- $\mathbb{P}[ABr = Cr] \leq 0.5^k$

→ Laufzeit $\mathcal{O}(kn^2)$

linear längere Laufzeit bei exponentiell weniger Fehler



Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- $X = \#$ Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^n X_i$, mit $X_i = \#$ Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
 - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
 - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
 $= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- $X = \#$ Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^n X_i$, mit $X_i = \#$ Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
 - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
 - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
 $= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- $X = \#$ Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^n X_i$, mit $X_i = \#$ Packungen während ich $i - 1$ Karten hatte
 - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
 - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
 $= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- $X = \#$ Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^n X_i$, mit $X_i = \#$ Packungen während ich $i - 1$ Karten hatte
 - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
 - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
 $= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

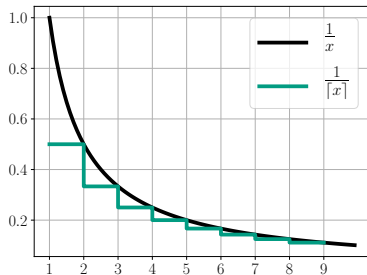
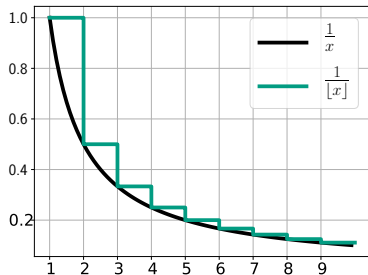
Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- $X = \#$ Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^n X_i$, mit $X_i = \#$ Packungen während ich $i - 1$ Karten hatte
 - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
 - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
 $= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$

$$\blacksquare H_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

$$\ln n = \int_{x=1}^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

$$\sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \int_{x=1}^n \frac{1}{x} dx = \ln n$$



$$\blacksquare \ln n \leq H_n \leq \ln n + 1$$

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- $X = \#$ Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^n X_i$, mit $X_i = \#$ Packungen während ich $i - 1$ Karten hatte
 - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
 - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
 $= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = nH_n \leq n \ln n + n$

Perfekte Hashfunktionen

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe r -bit Wert

x	f(x)
Marvin	4 🎁 = 100
Florian	2 🎁 = 010
Tobias	4 🎁 = 100
Daniel	0 🎁 = 000
Sascha	6 🎁 = 101

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe r -bit Wert
- Kleine Menge an zulässigen Eingabewerten
- Rest undefiniert

x	f(x)
Marvin	4 🎁 = 100
Florian	2 🎁 = 010
Tobias	4 🎁 = 100
Daniel	0 🎁 = 000
Sascha	6 🎁 = 101

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe r -bit Wert
- Kleine Menge an zulässigen Eingabewerten
- Rest undefiniert

x	f(x)	h(x)	f(x)
Marvin	4 🎁 = 100	010001	100
Florian	2 🎁 = 010	100100	010
Tobias	4 🎁 = 100	111000	100
Daniel	0 🎁 = 000	000011	000
Sascha	6 🎁 = 101	111110	101

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe r -bit Wert
- Kleine Menge an zulässigen Eingabewerten
- Rest undefiniert
- Lösung: Hashen und Gleichungssystem lösen

Mit schlauer Wahl der Hashfunktion $n \cdot (1 + o(1))$ Zeilen

x	f(x)	h(x)	f(x)
Marvin	4 🎁 = 100	010001	100
Florian	2 🎁 = 010	100100	010
Tobias	4 🎁 = 100	111000	100
Daniel	0 🎁 = 000	000011	000
Sascha	6 🎁 = 101	111110	101

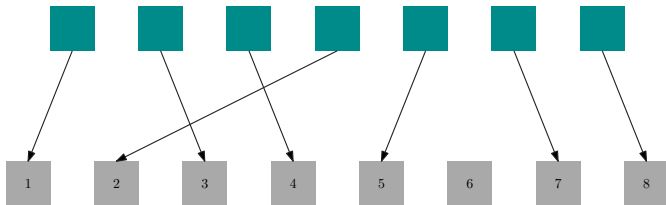
$$h(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f(x)$$

Perfekte Hashfunktionen

Problemstellung

- Eingabe: n Objekte
- Gesucht: Zuordnung Objekt $\rightarrow$ Zahl
- Abbildung soll injektiv sein

z.B. Speicherplätze, Kurze Identifier

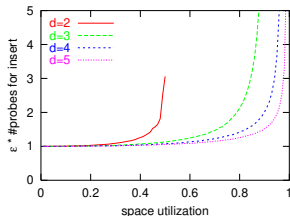


- Cuckoo Hashing gibt jedem Objekt eine von 2 Positionen
- Baue Cuckoo-Hashtabelle
- Speichere je 1 Bit in Retrieval-Datenstruktur

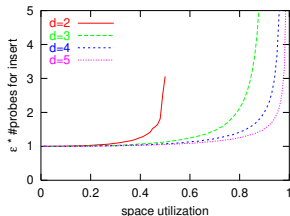
Perfekte Hashfunktionen

Cuckoo Hashing

- Cuckoo Hashing gibt jedem Objekt eine von 2 Positionen
- Baue Cuckoo-Hashtabelle
- Speichere je 1 Bit in Retrieval-Datenstruktur



- Cuckoo Hashing gibt jedem Objekt eine von 2 Positionen
- Baue Cuckoo-Hashtabelle
- Speichere je 1 Bit in Retrieval-Datenstruktur



4-äres Cuckoo Hashing:

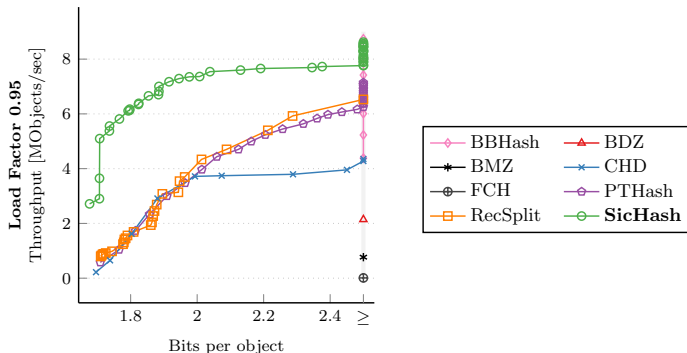
- ⇒ Retrieval-Datenstruktur mit 2 bits pro Eintrag
- ⇒ Perfekte Hashfunktion mit 2 bits pro Objekt

- Irreguläres cuckoo hashing
 - Einige Objekte bekommen 2 Positionen, einige 4, und einige 8
- Mehrere Retrieval Datenstrukturen
 - 1-, 2- und 3-bit

Perfekte Hashfunktionen

SicHash

- Irreguläres cuckoo hashing
 - Einige Objekte bekommen 2 Positionen, einige 4, und einige 8
- Mehrere Retrieval Datenstrukturen
 - 1-, 2- und 3-bit



Übungsblatt 2

Ende!



Feierabend!