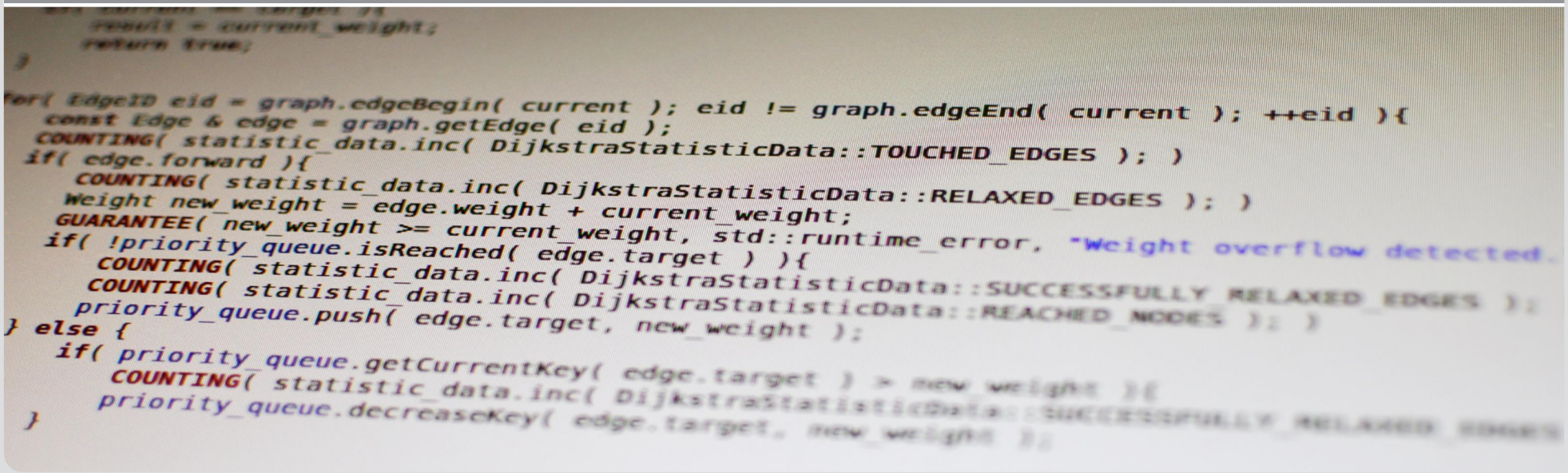
Karlsruher Institut für Technologie

Übung 10 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Hans-Peter Lehmann – *{moritz.laupichler, hans-peter.lehmann}@kit.edu*

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS22.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II



Themenübersicht

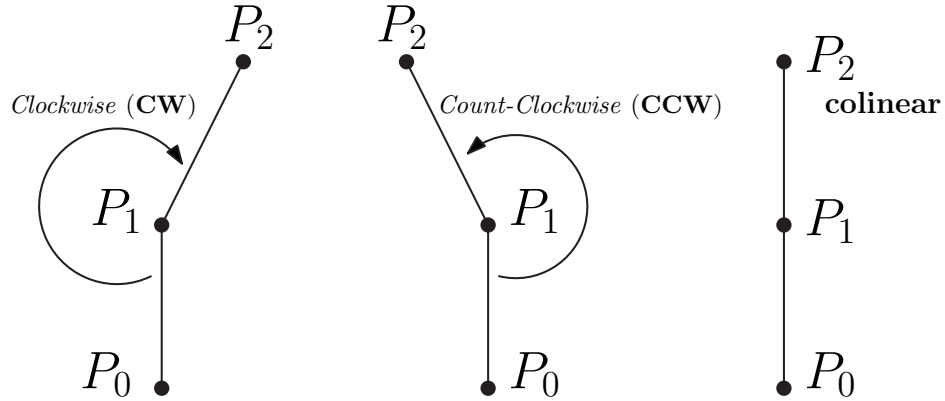
- Evaluation (nur Übung!)
- Geometrische Algorithmen
  - Graham's Scan
  - Range Queries, Wavelet Trees

Evaluation: Übung

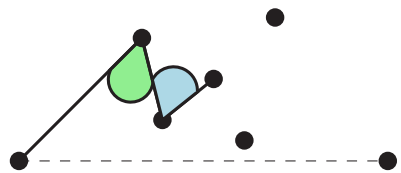
https://onlineumfrage.kit.edu/evasys/online.php?p=CR4Z3

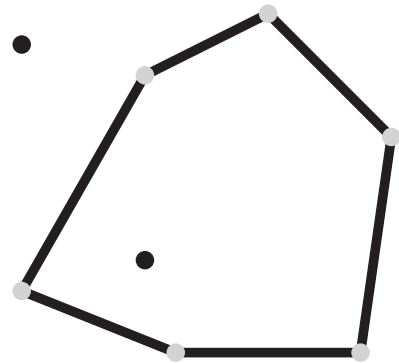
Punktorientierung

- Gegeben drei Punkte P_0, P_1, $P_2 \Rightarrow$ bestimme Orientierung
- Sei $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}$ und $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{P_0P_2} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_0}$
- $CCW(P_0, P_1, P_2) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$
- $CCW(P_0, P_1, P_2) > 0 \Rightarrow$ **CCW**
- $CCW(P_0, P_1, P_2) = 0 \Rightarrow$ **Colinear**
- $CCW(P_0, P_1, P_2) < 0 \Rightarrow$ **CW**



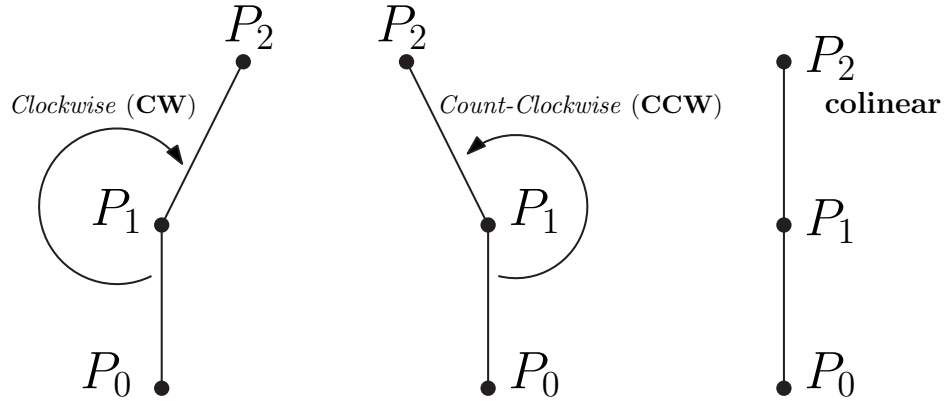
- Unterproblem von Algorithmen
  - Graham Scan
  - Test auf Enthaltensein
    Punkt in konvexem Polygon



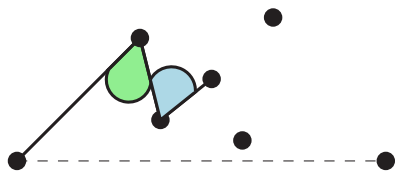


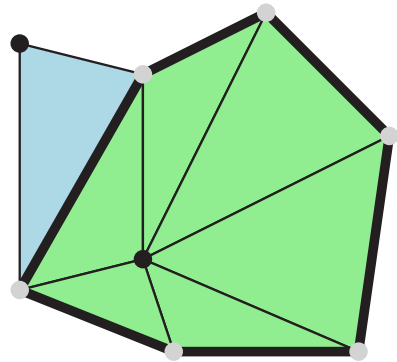
Punktorientierung

- Gegeben drei Punkte P_0, P_1, $P_2 \Rightarrow$ bestimme Orientierung
- Sei $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = \overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_0}$ und $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{P_0P_2} = \overrightarrow{P_2} - \overrightarrow{P_0}$
- $CCW(P_0, P_1, P_2) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$
- $CCW(P_0, P_1, P_2) > 0 \Rightarrow$ **CCW**
- $CCW(P_0, P_1, P_2) = 0 \Rightarrow$ **Colinear**
- $CCW(P_0, P_1, P_2) < 0 \Rightarrow$ **CW**



- Unterproblem von Algorithmen
  - Graham Scan
  - Test auf Enthaltensein
    Punkt in konvexem Polygon

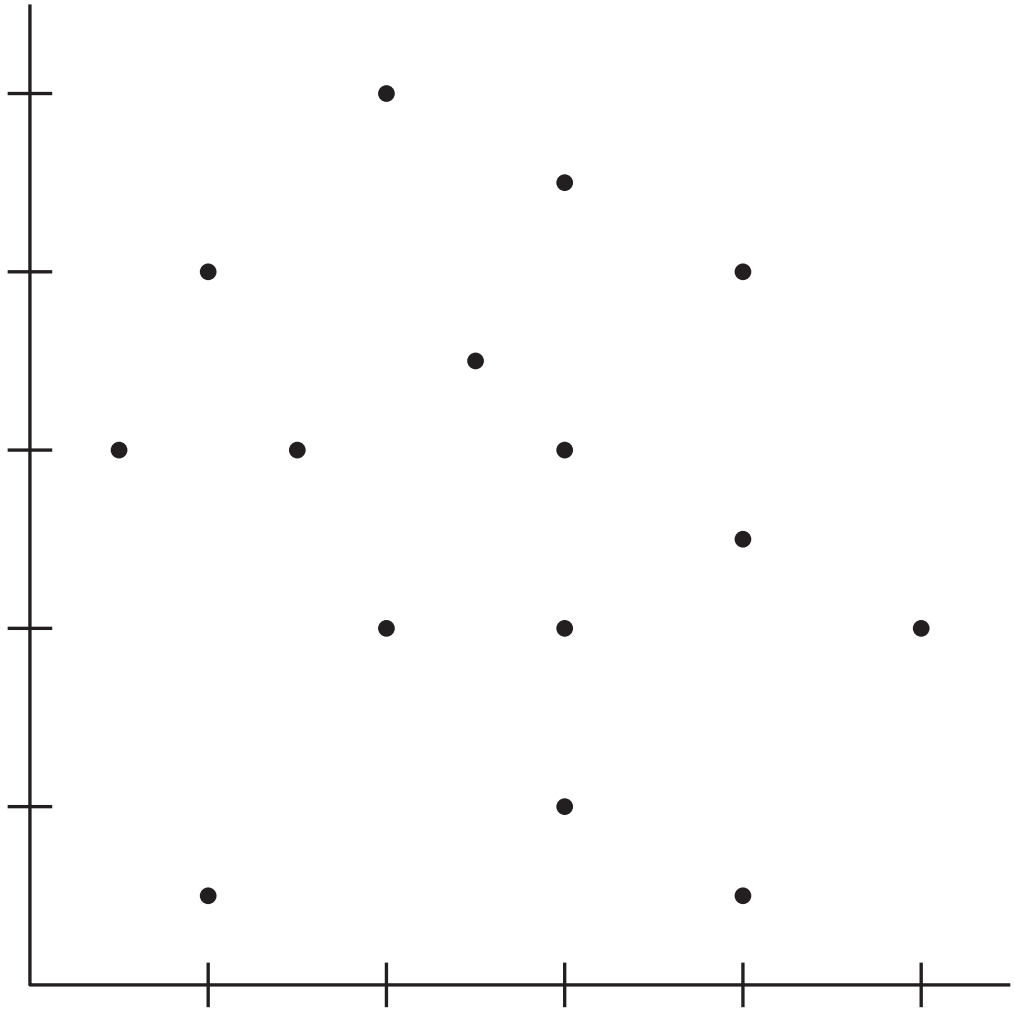




Konvexe Hülle

Graham-Scan

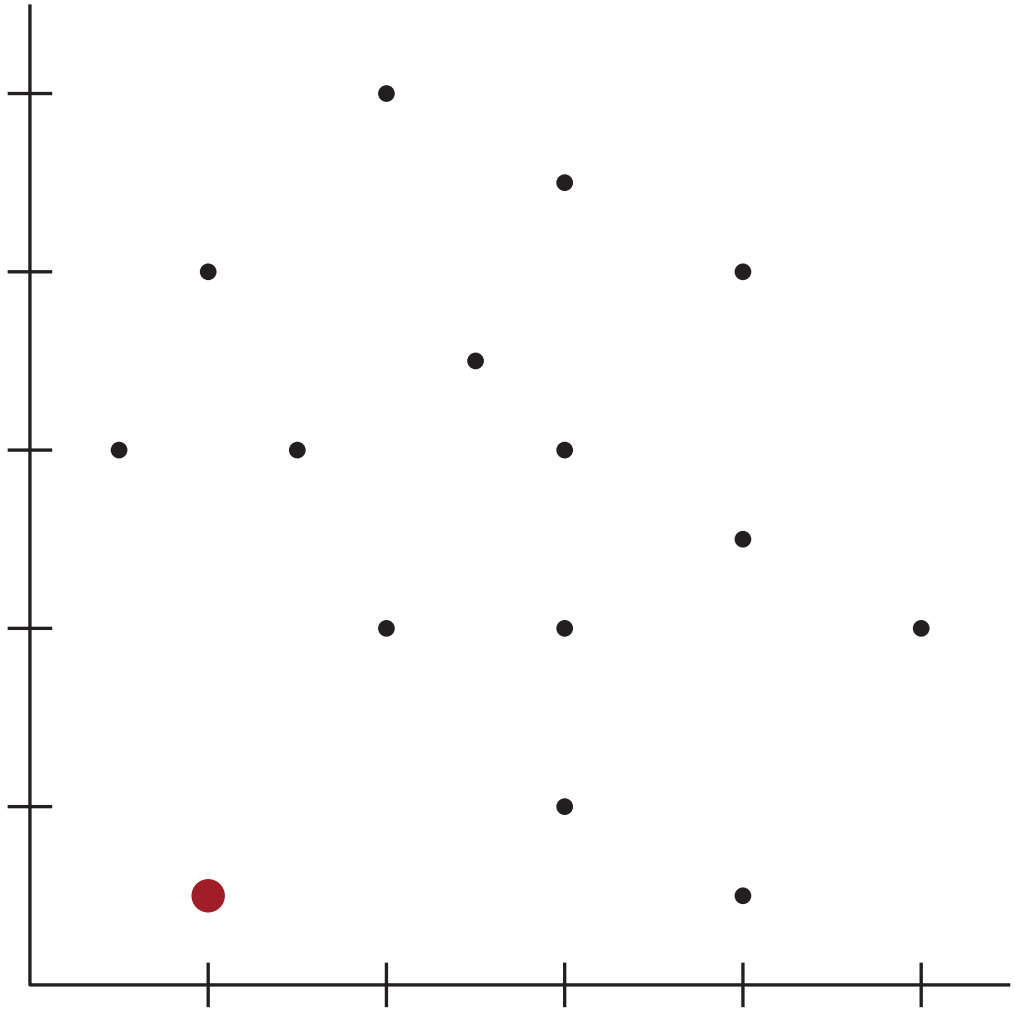
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1} H_k P_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

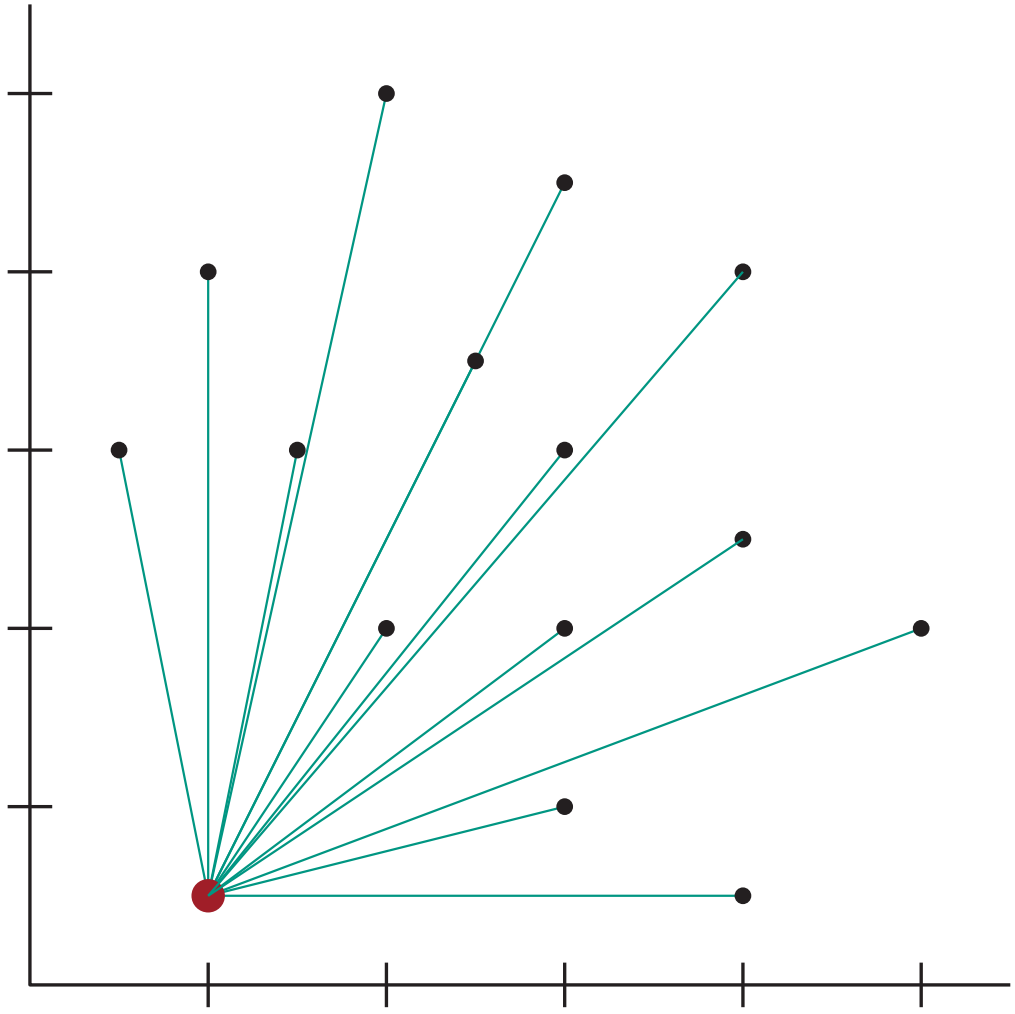
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1} H_k P_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

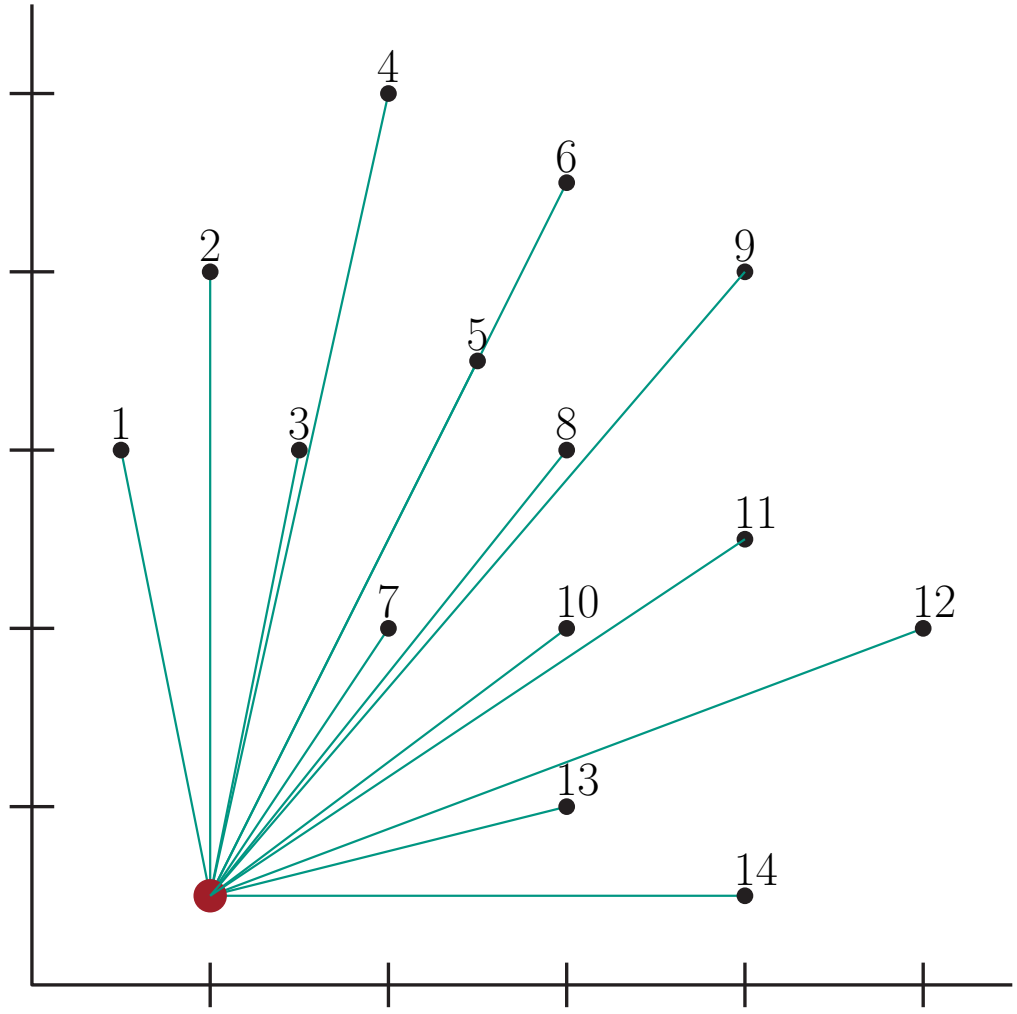
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1} H_k P_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

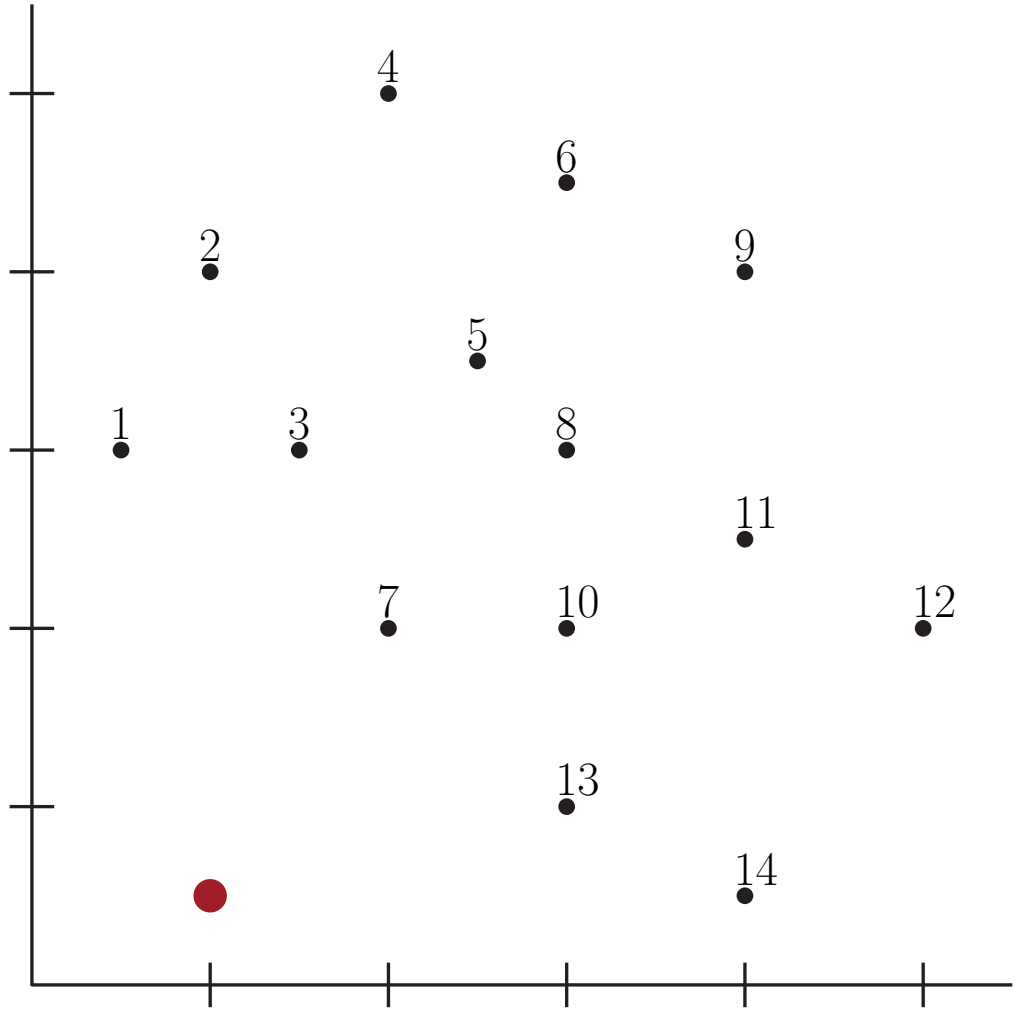
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

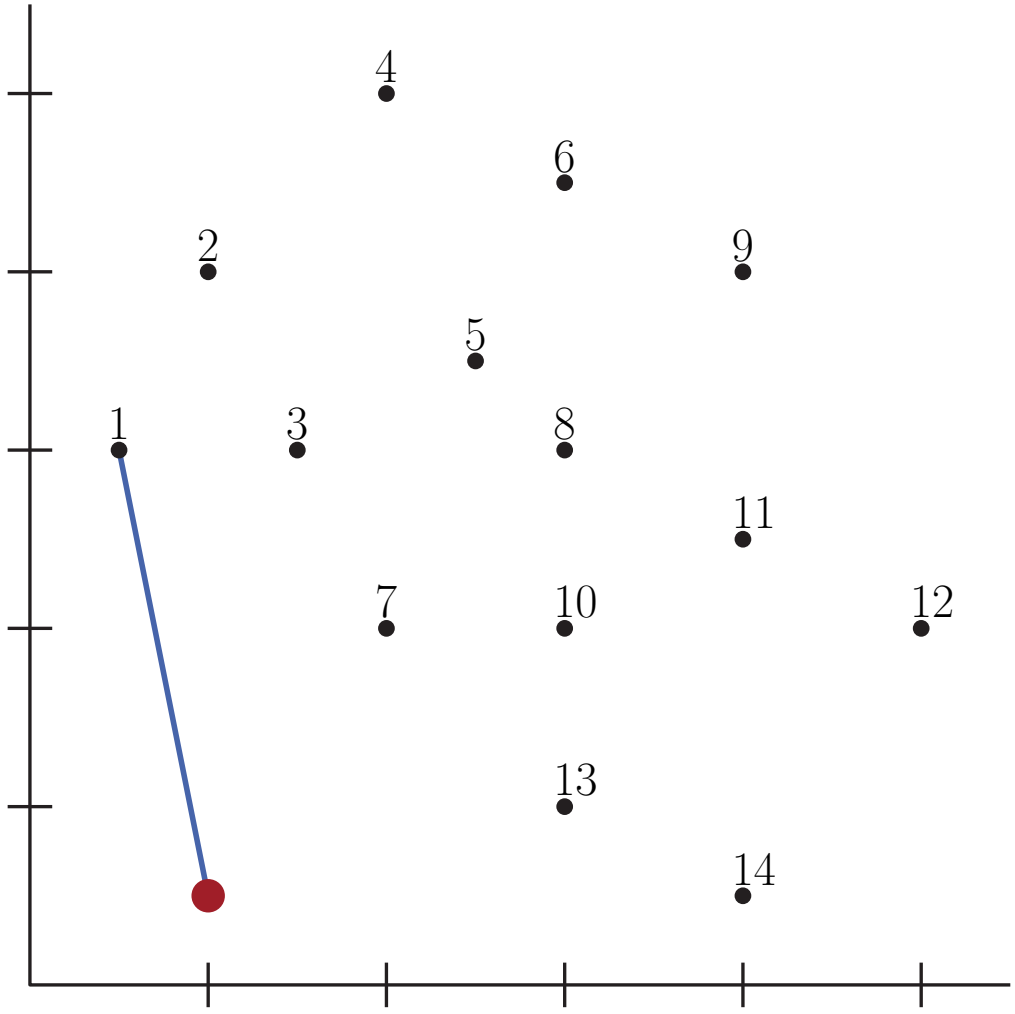
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

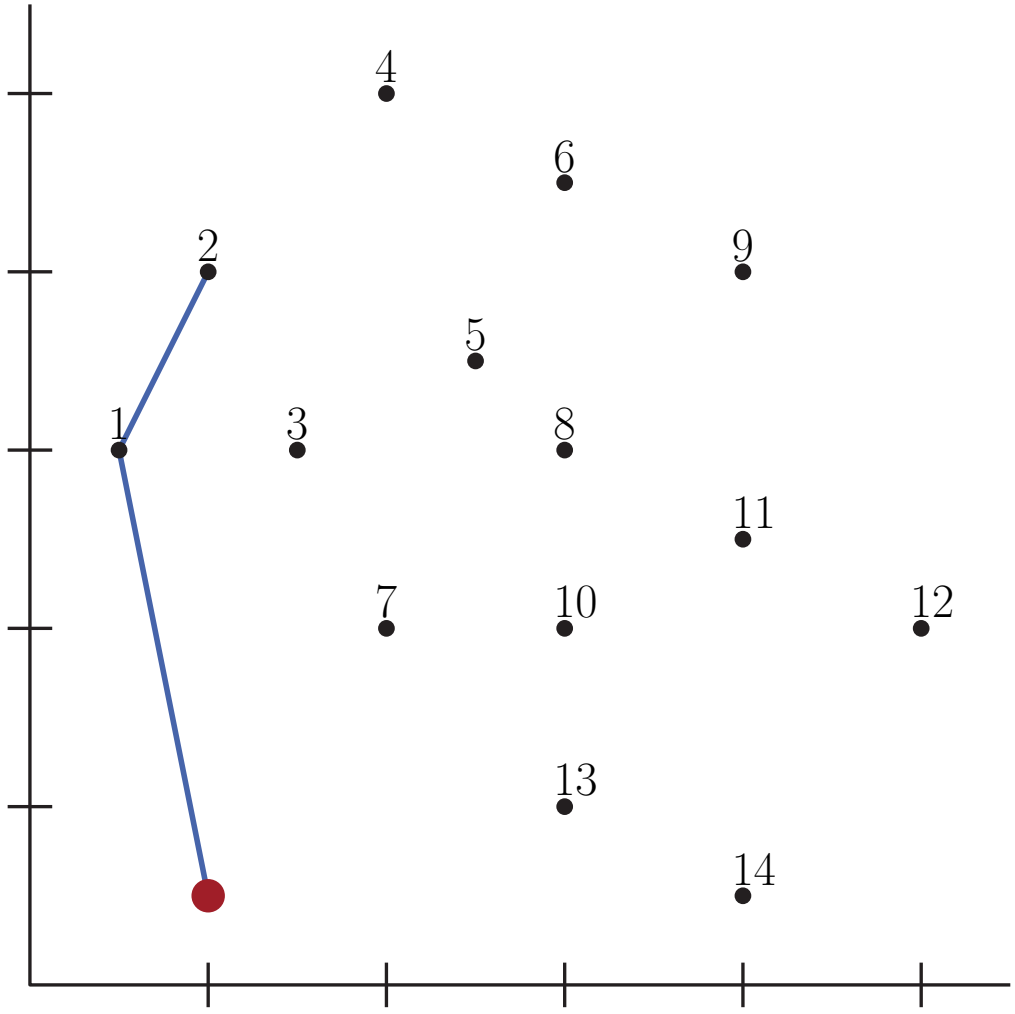
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

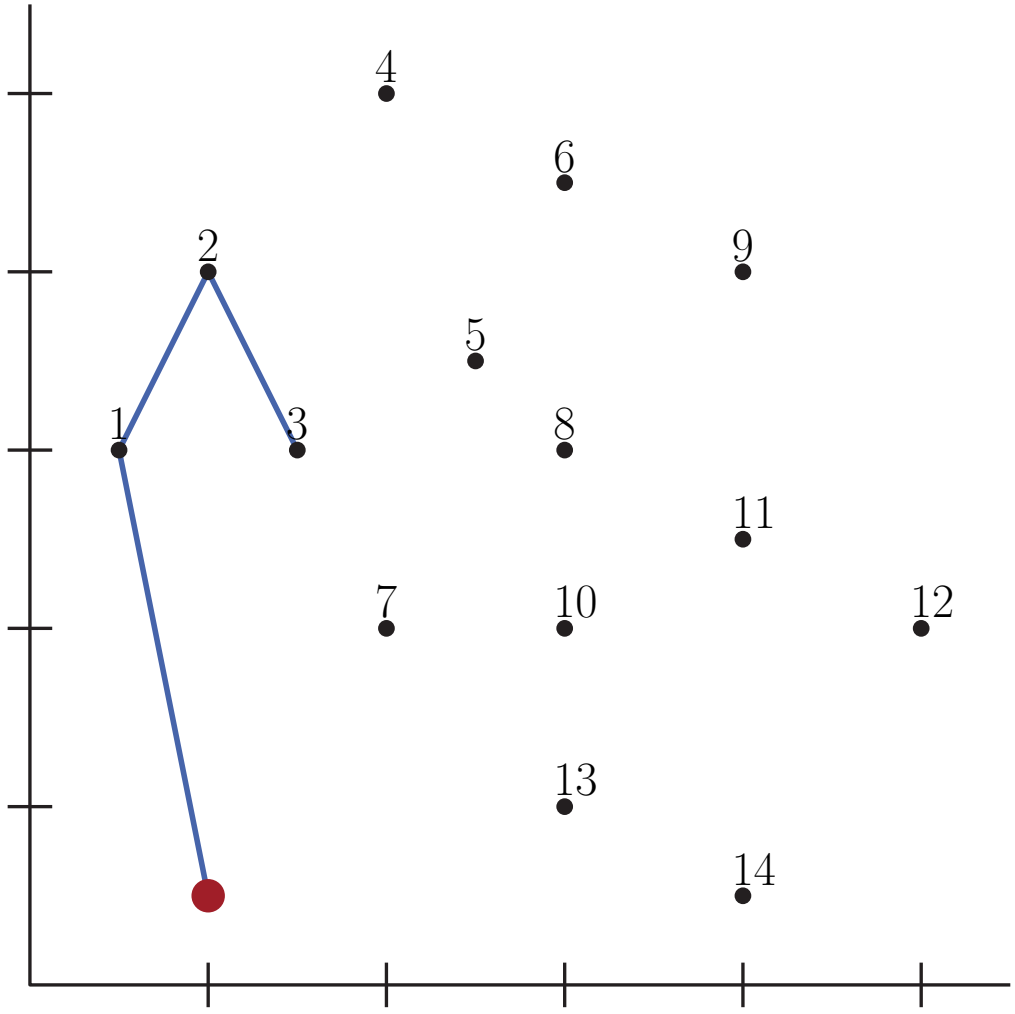
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

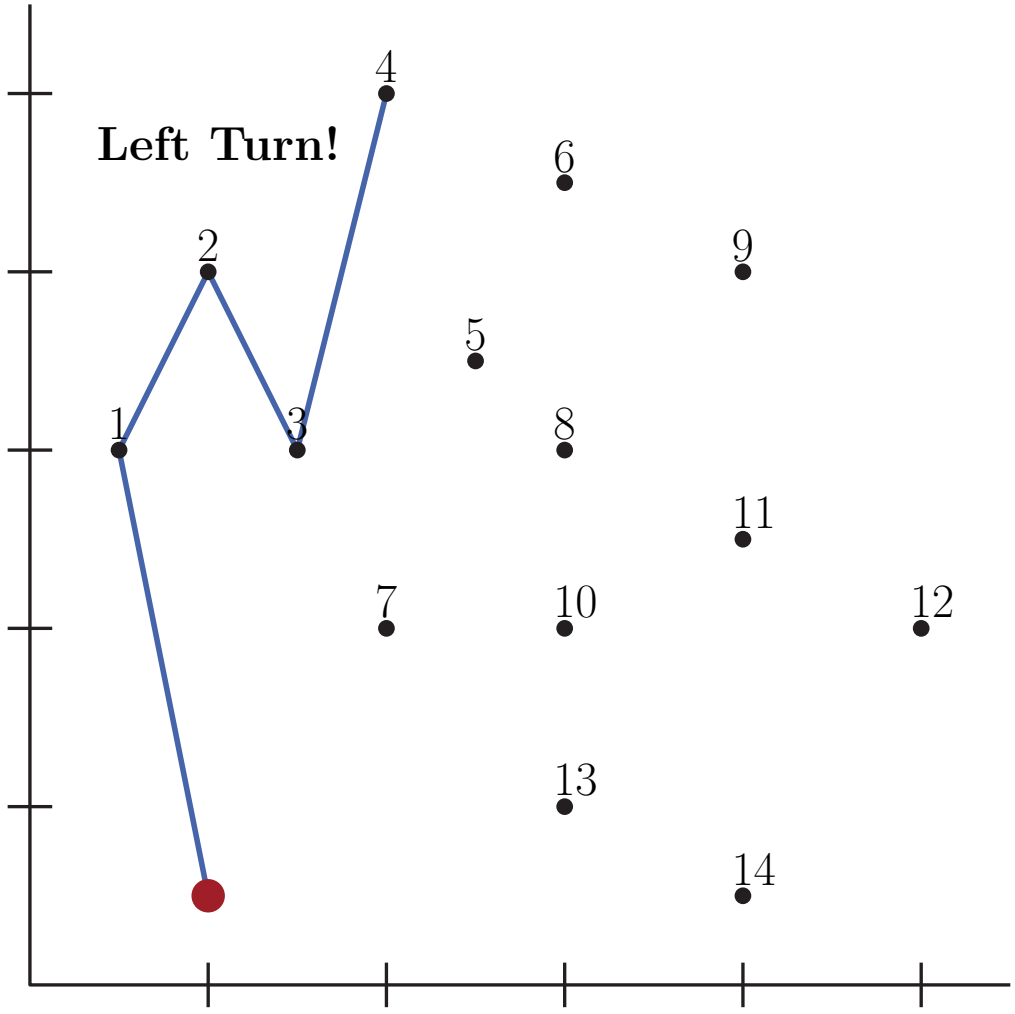
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

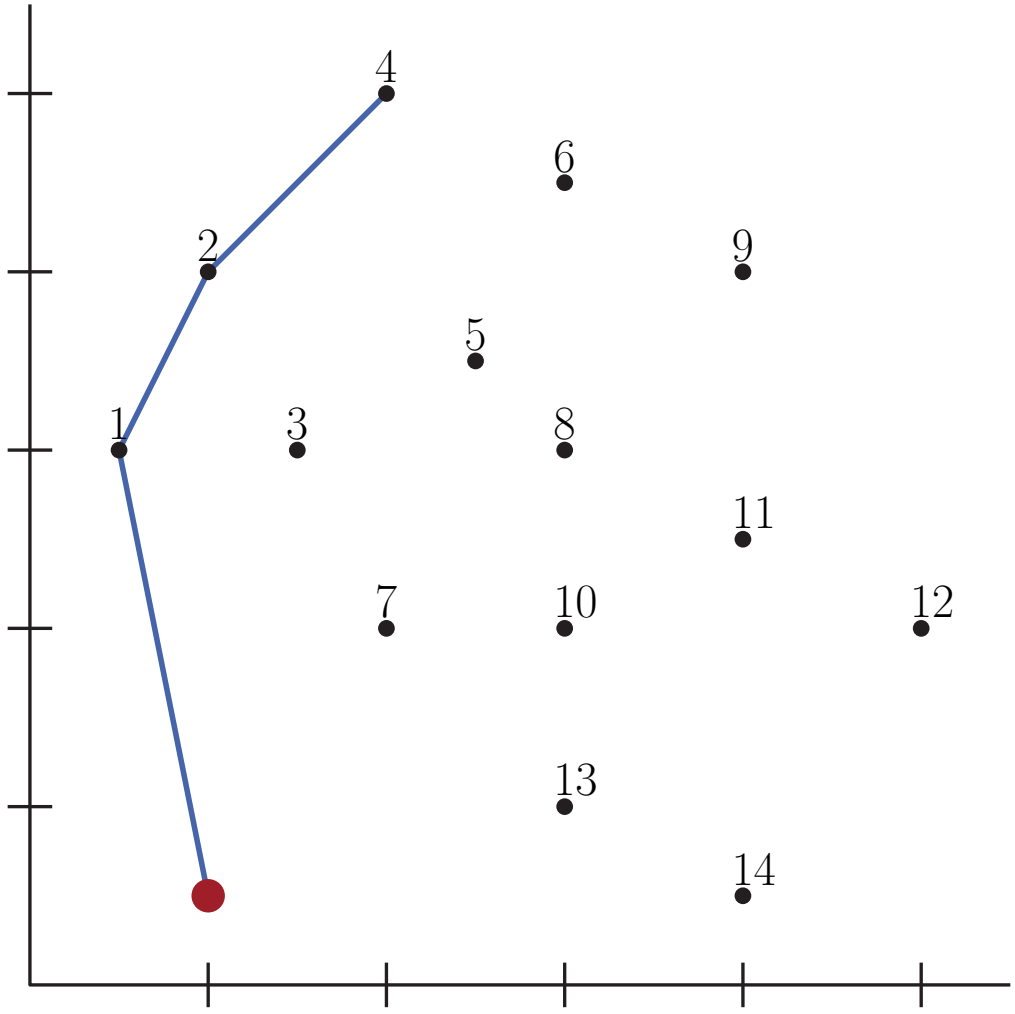
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

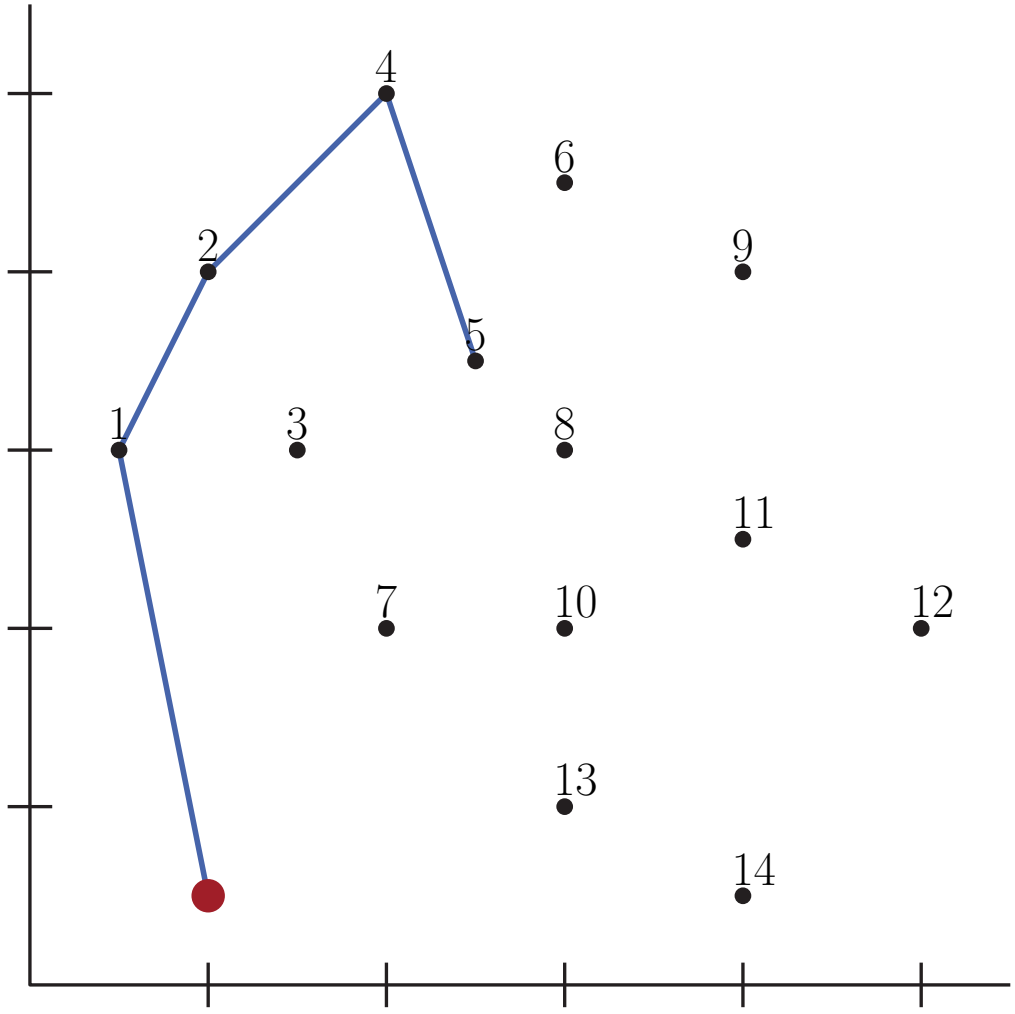
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

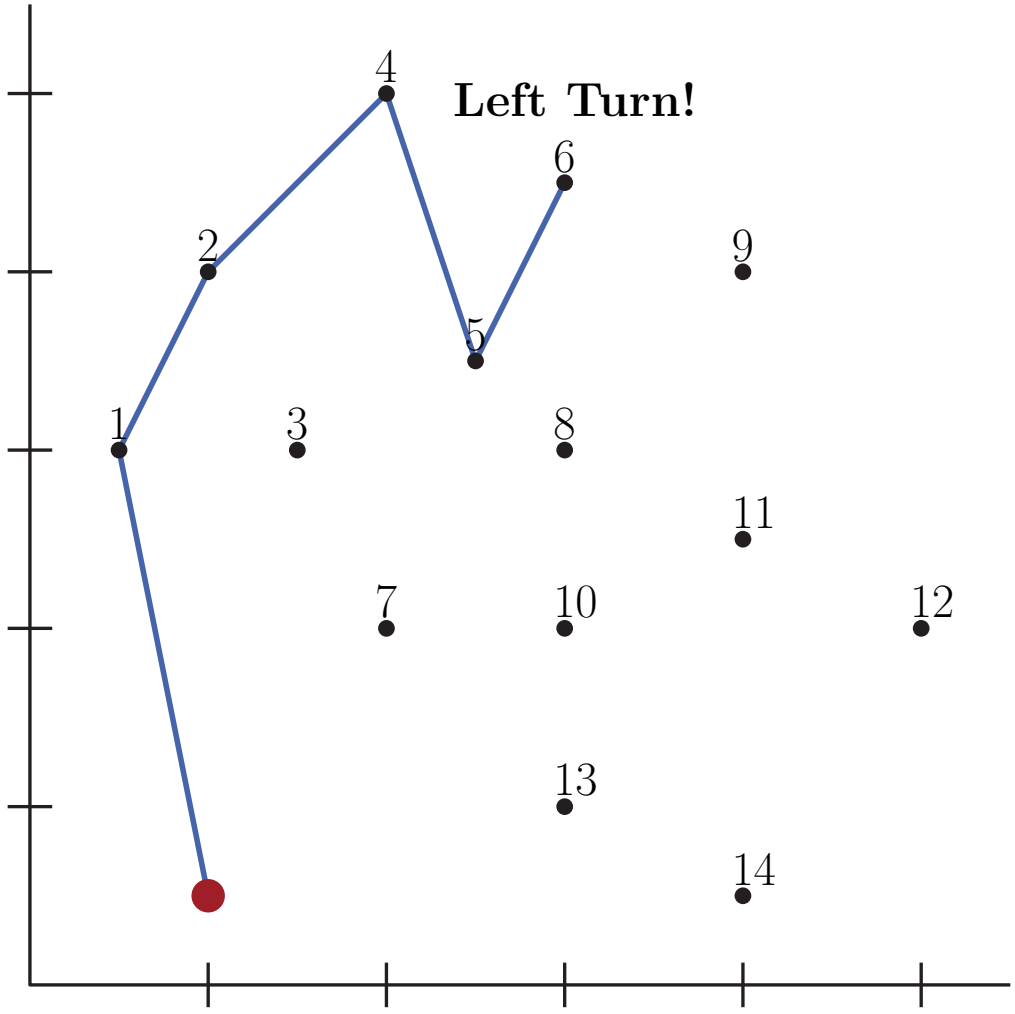
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

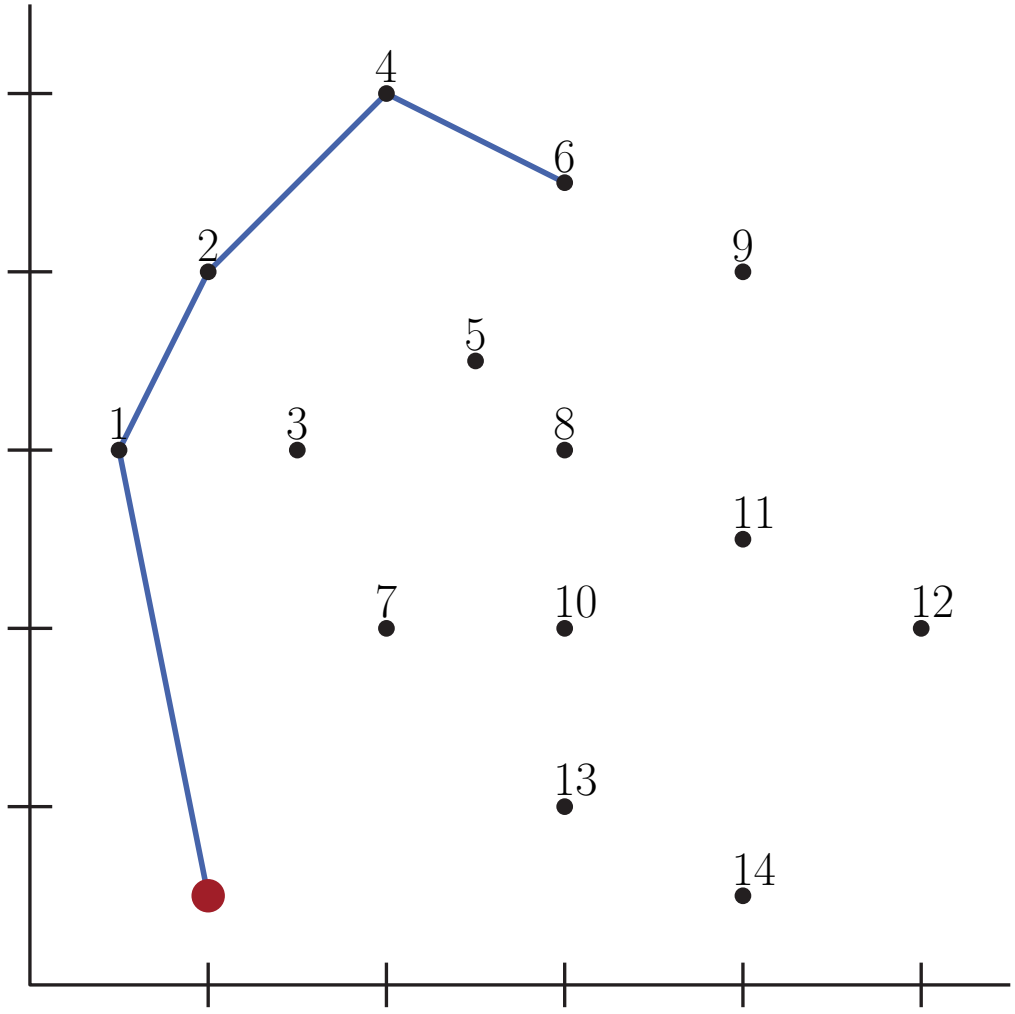
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

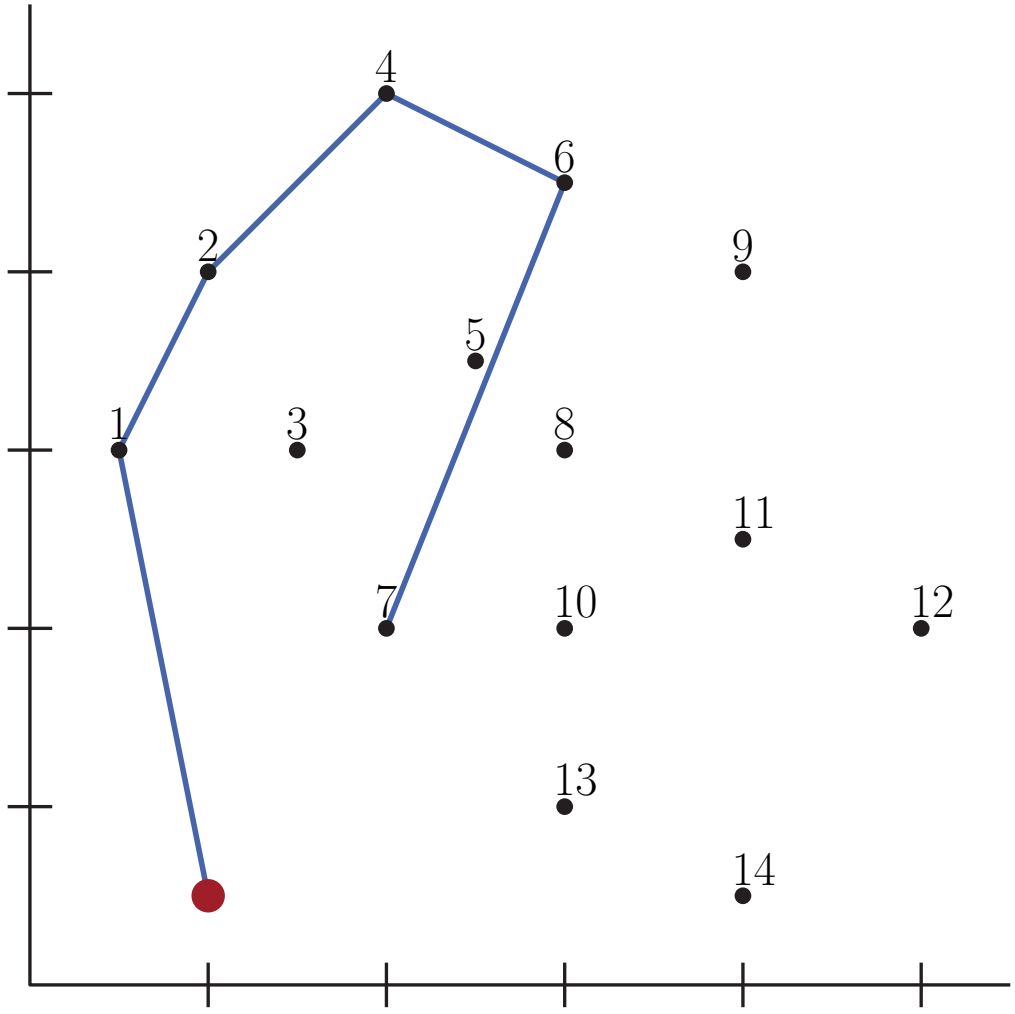
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

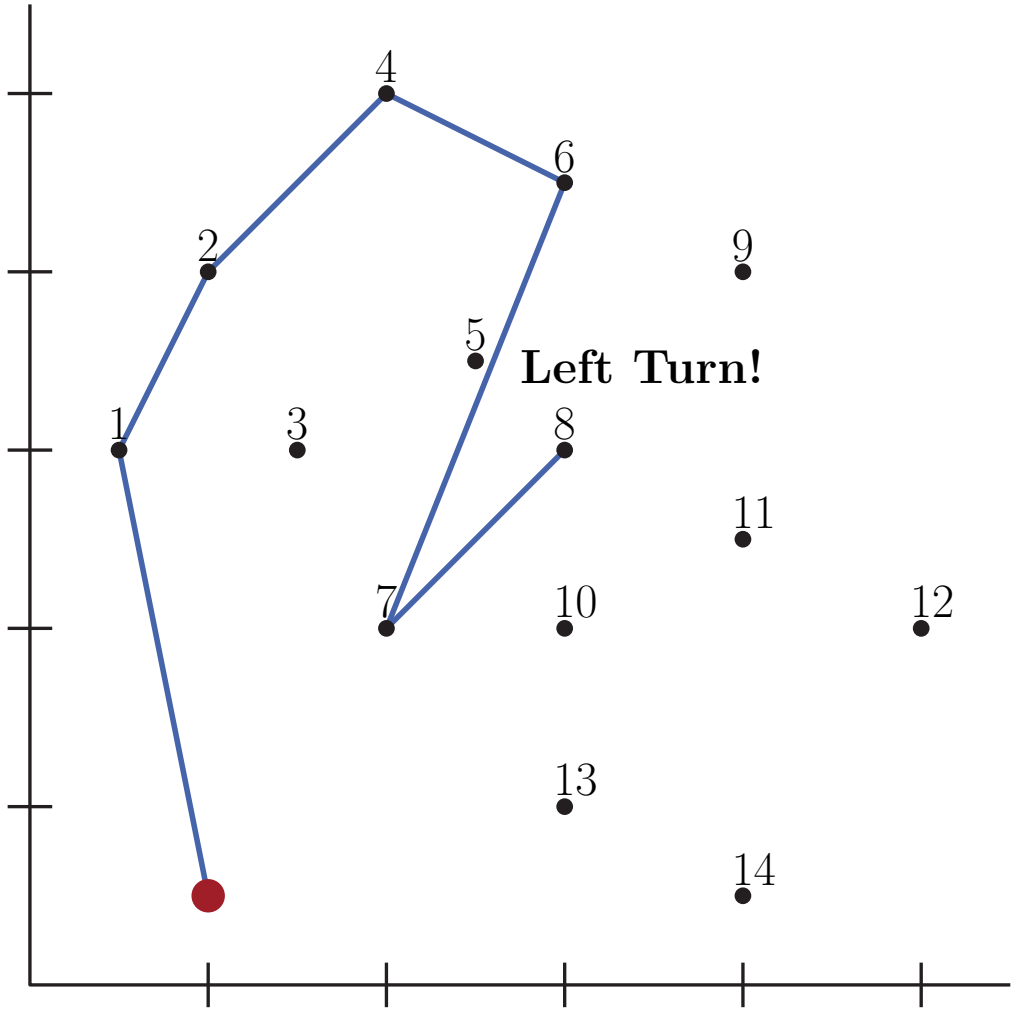
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

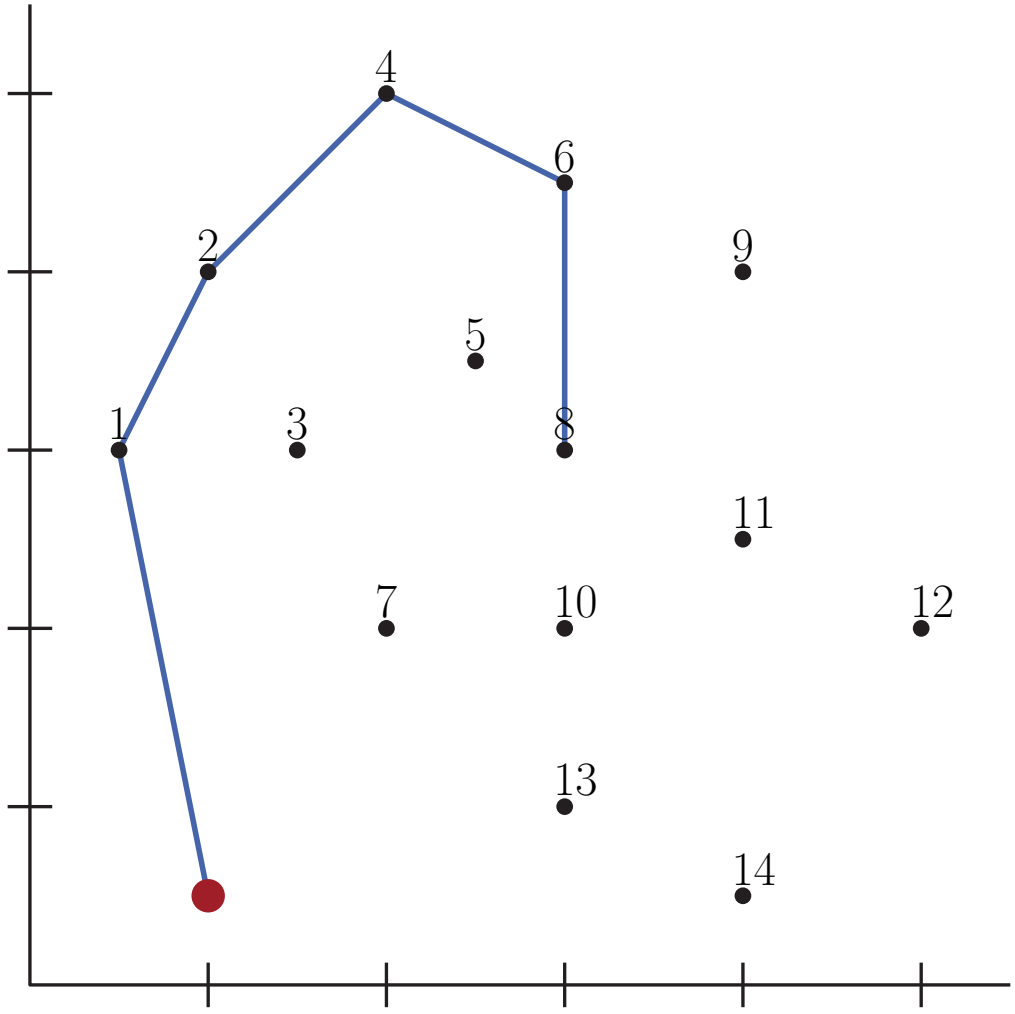
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

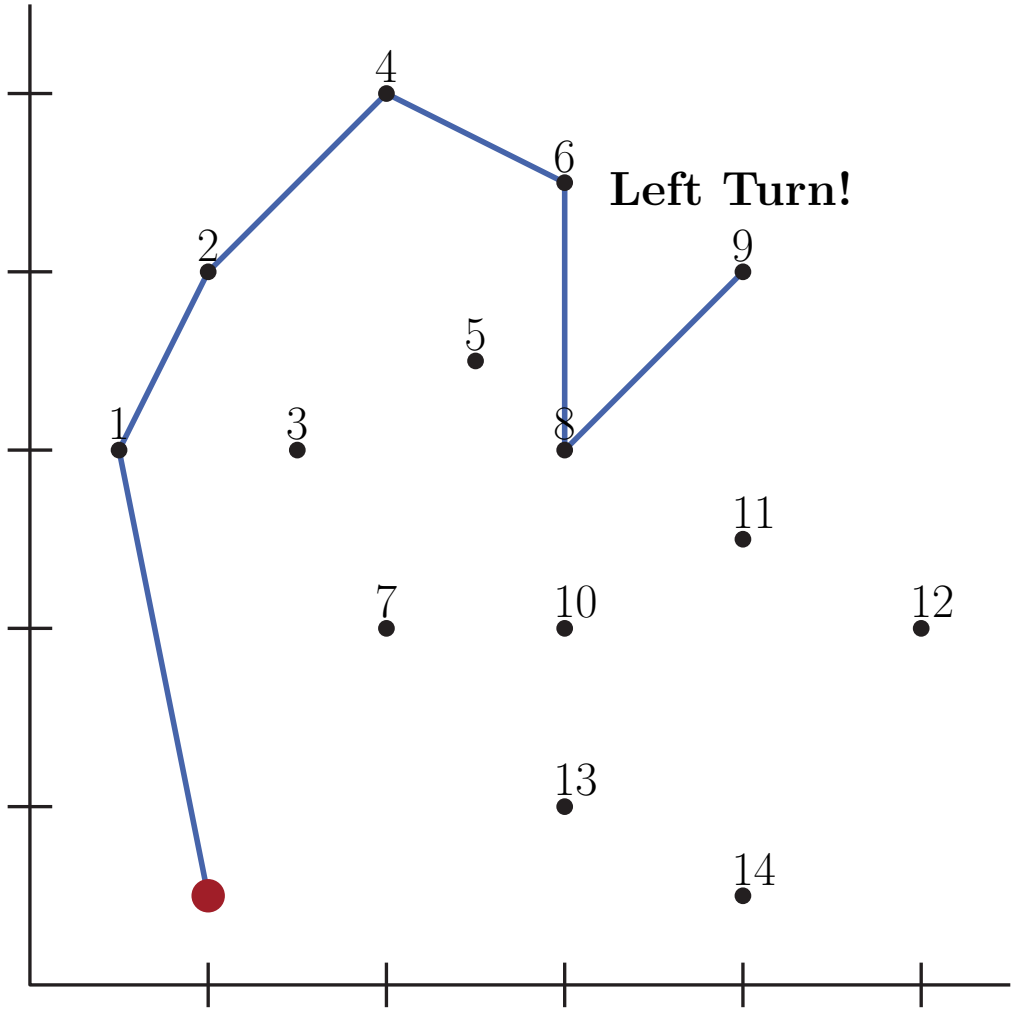
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

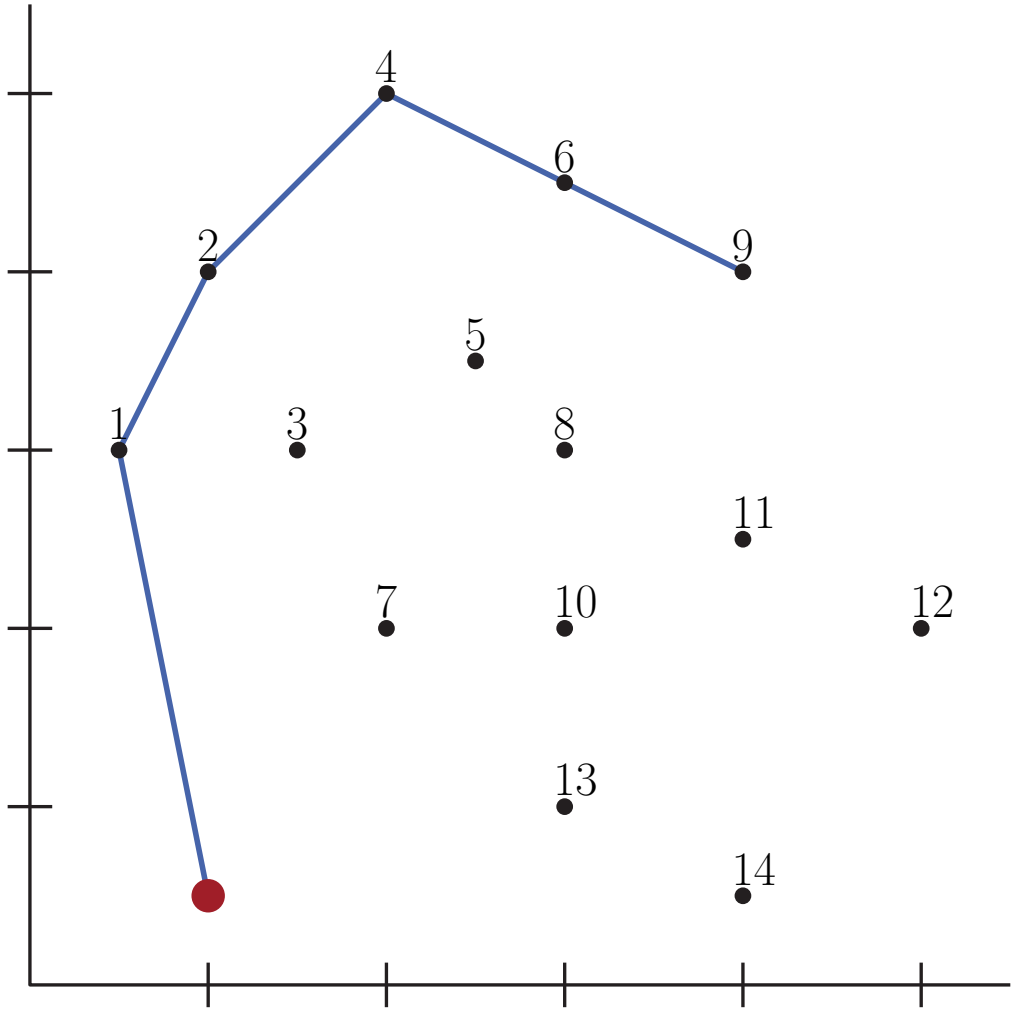
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

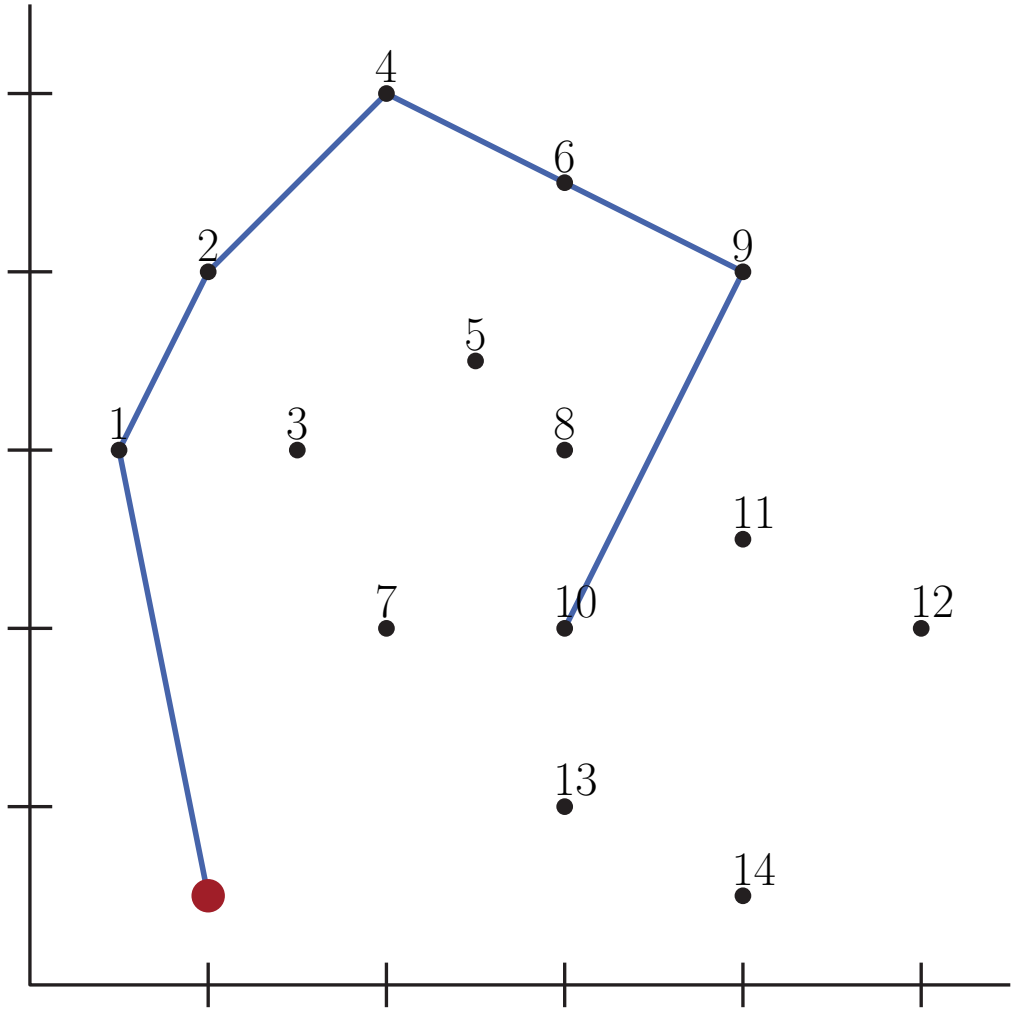
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

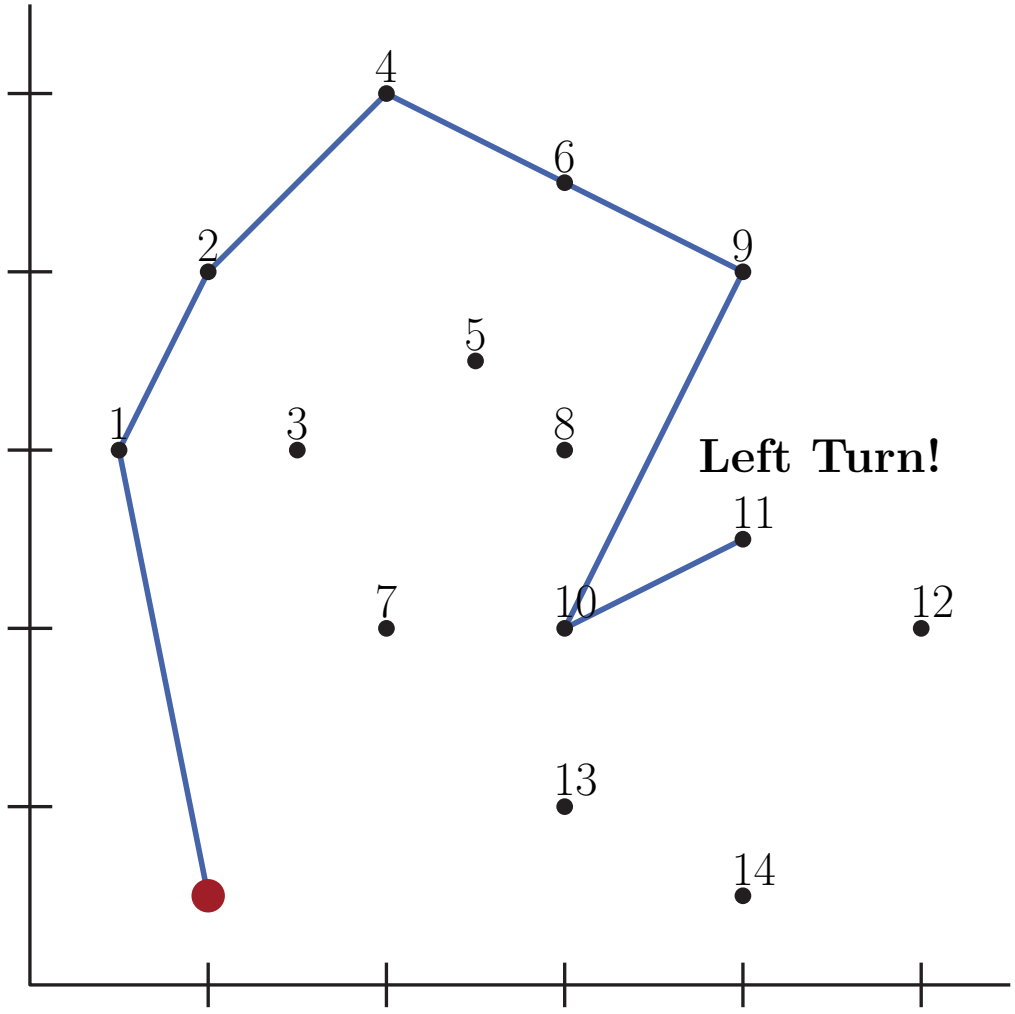
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

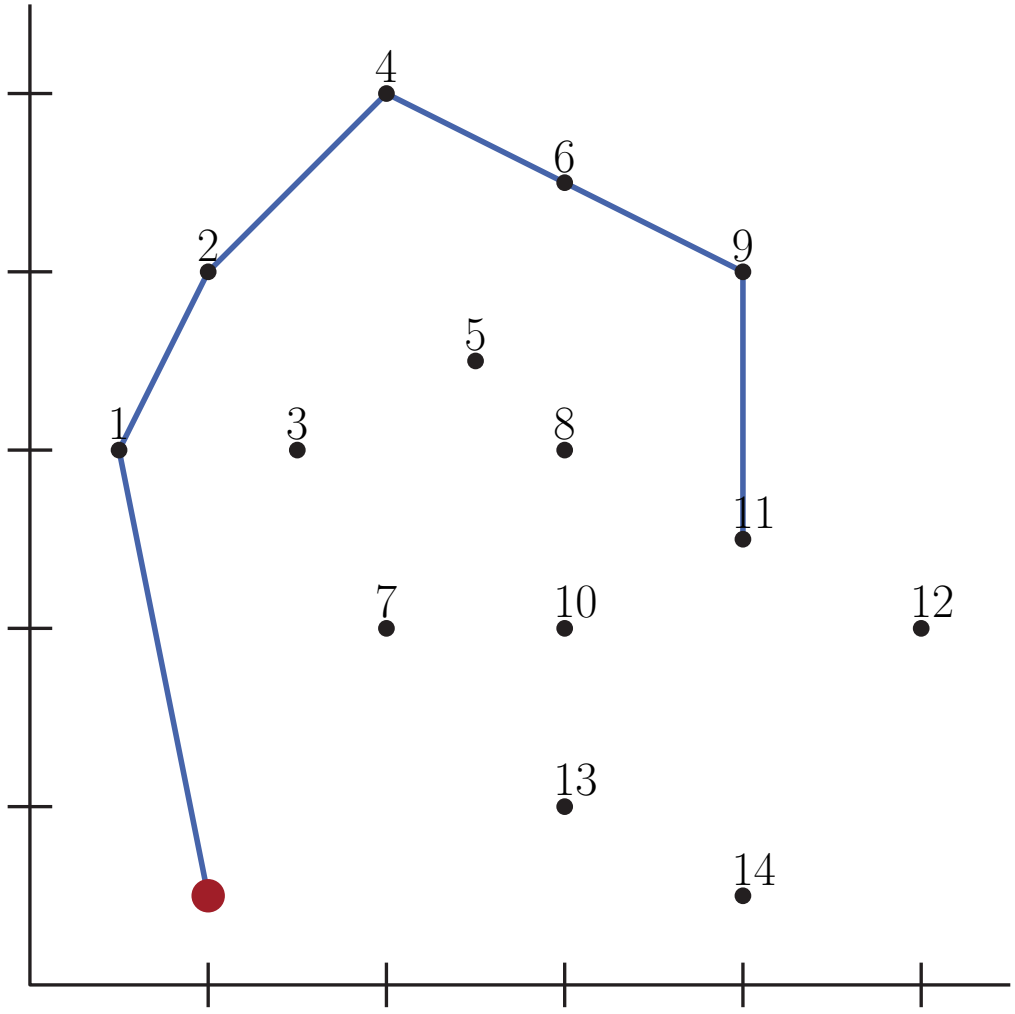
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

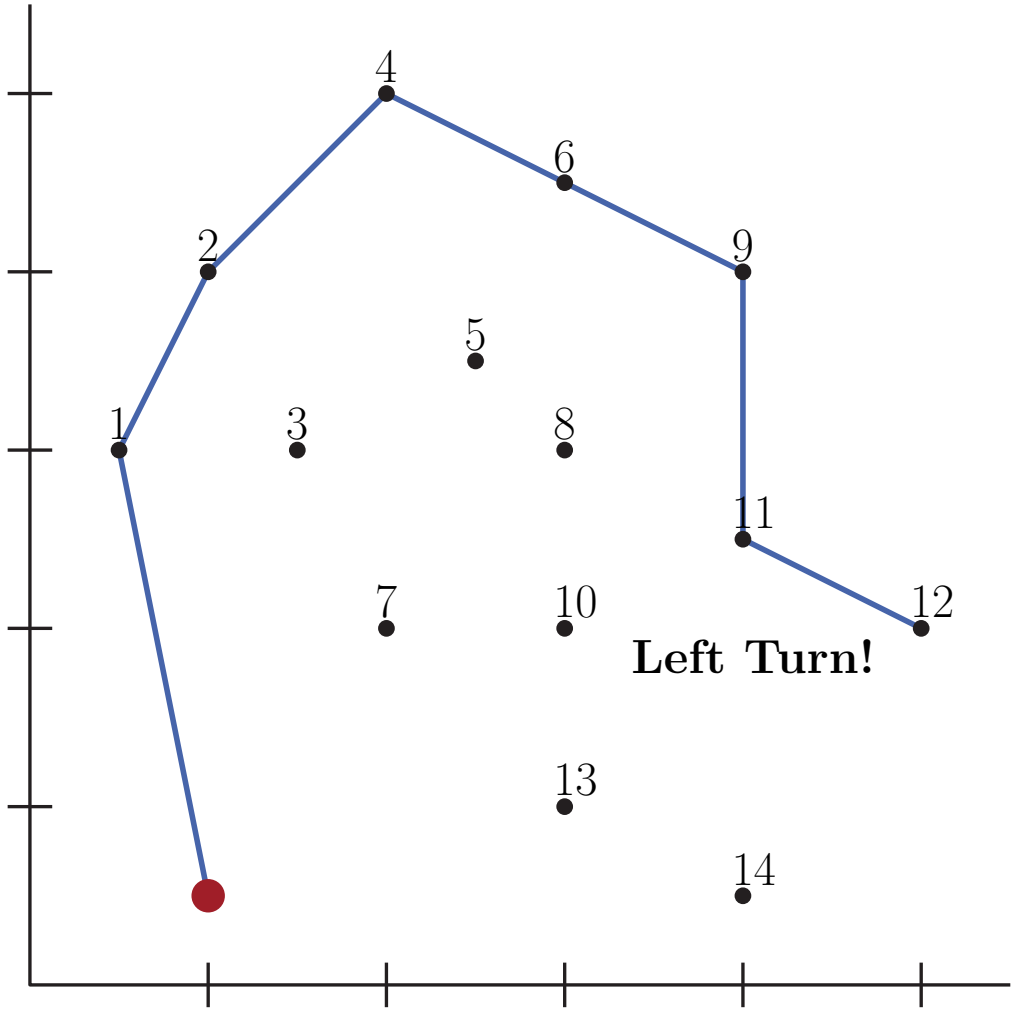
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

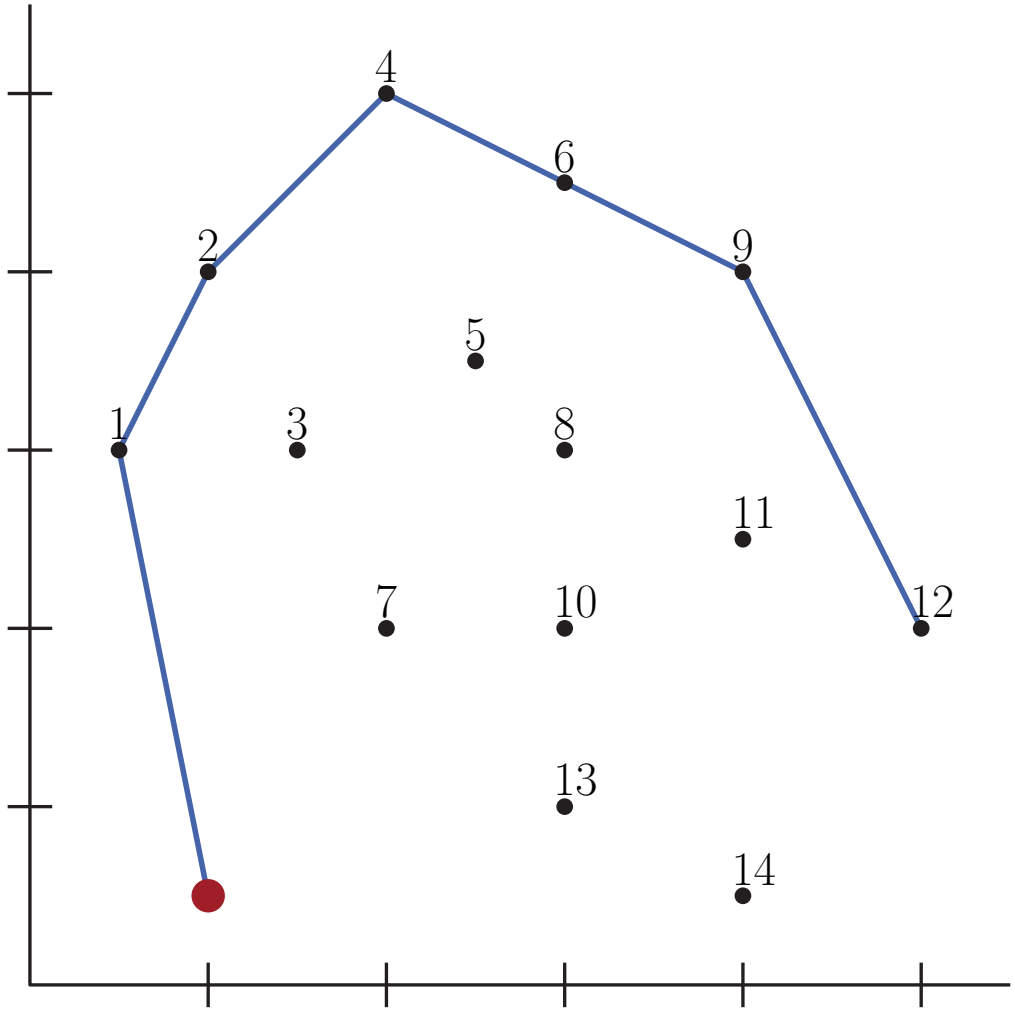
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

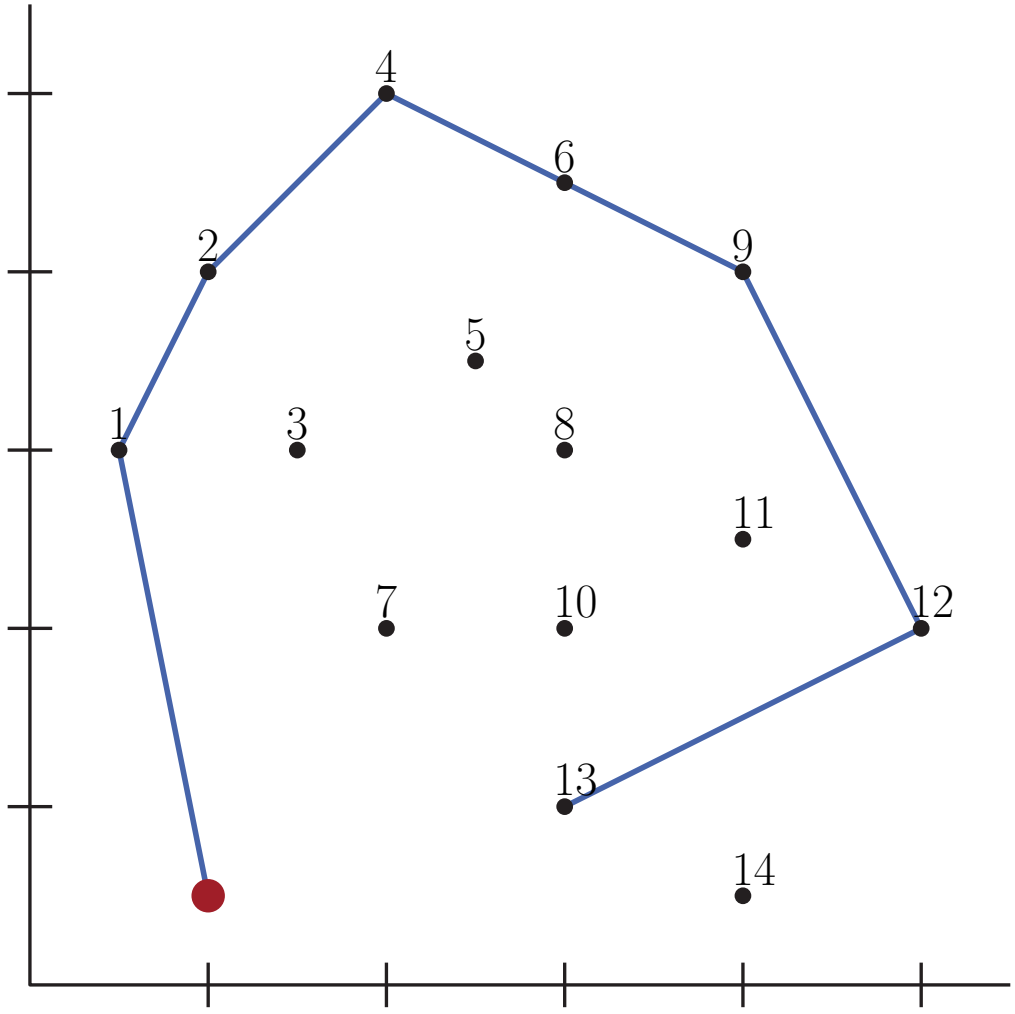
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1} H_k P_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

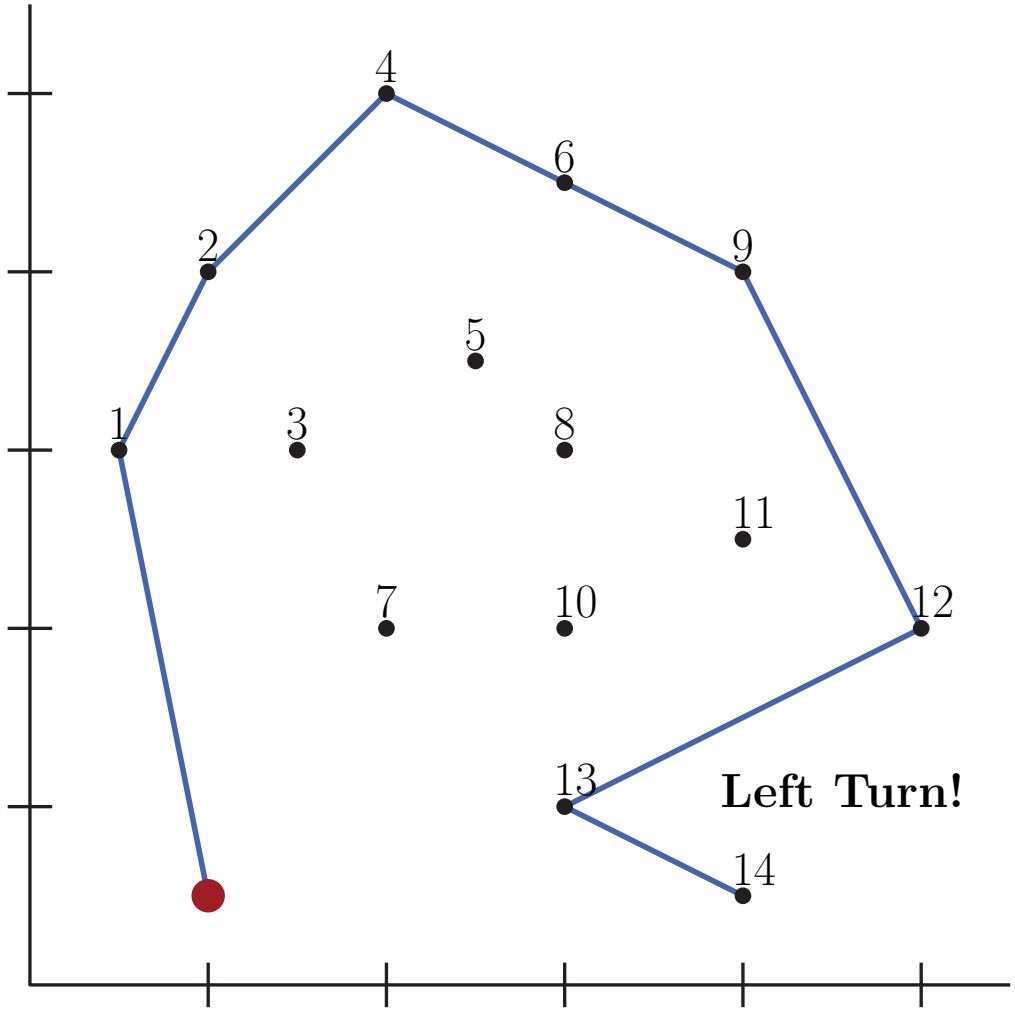
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

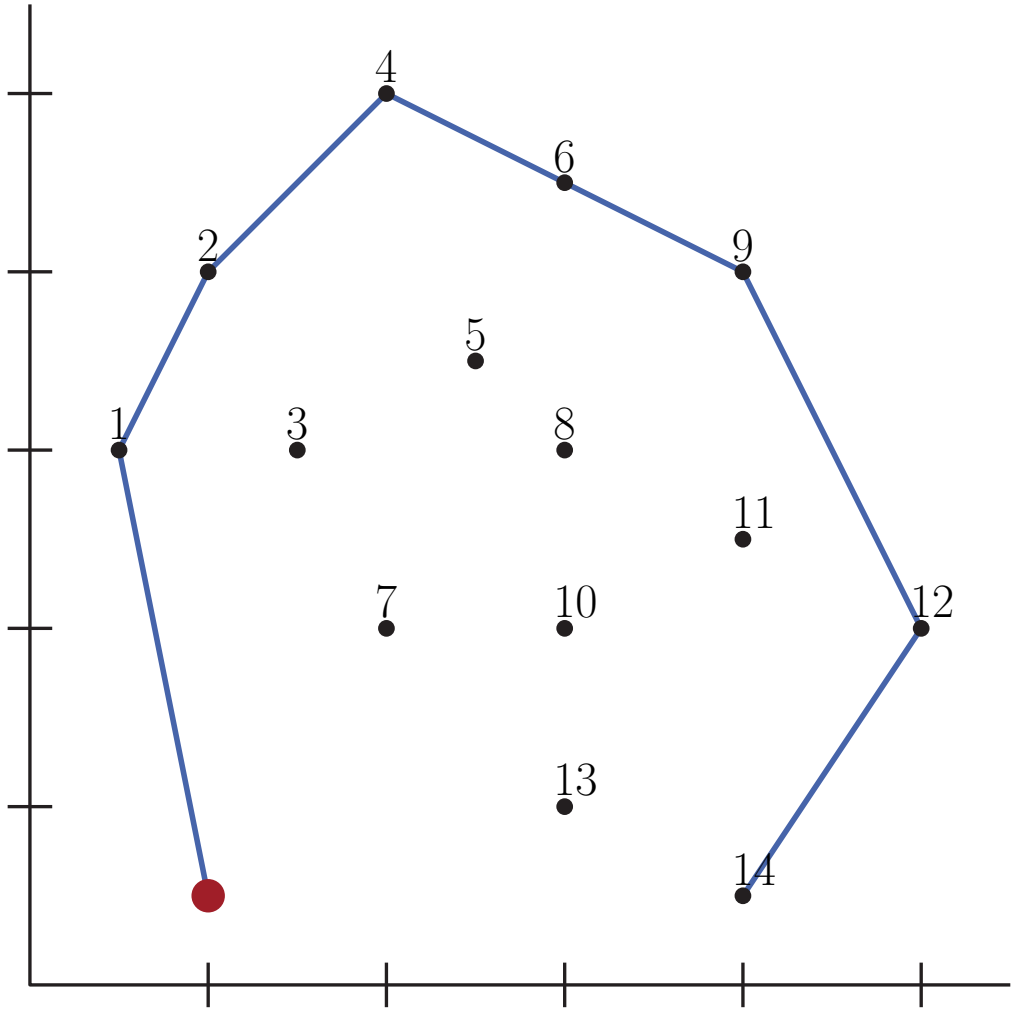
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1} H_k P_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

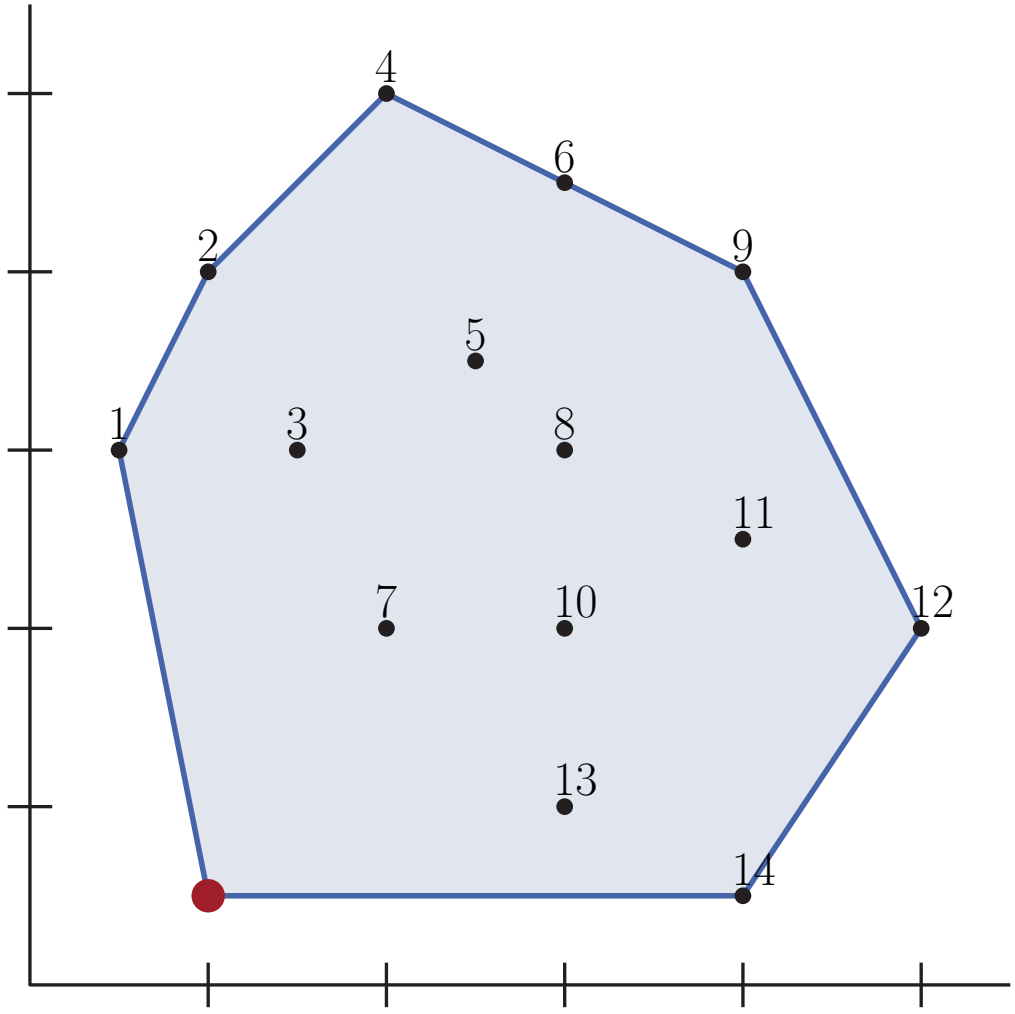
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1} H_k P_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

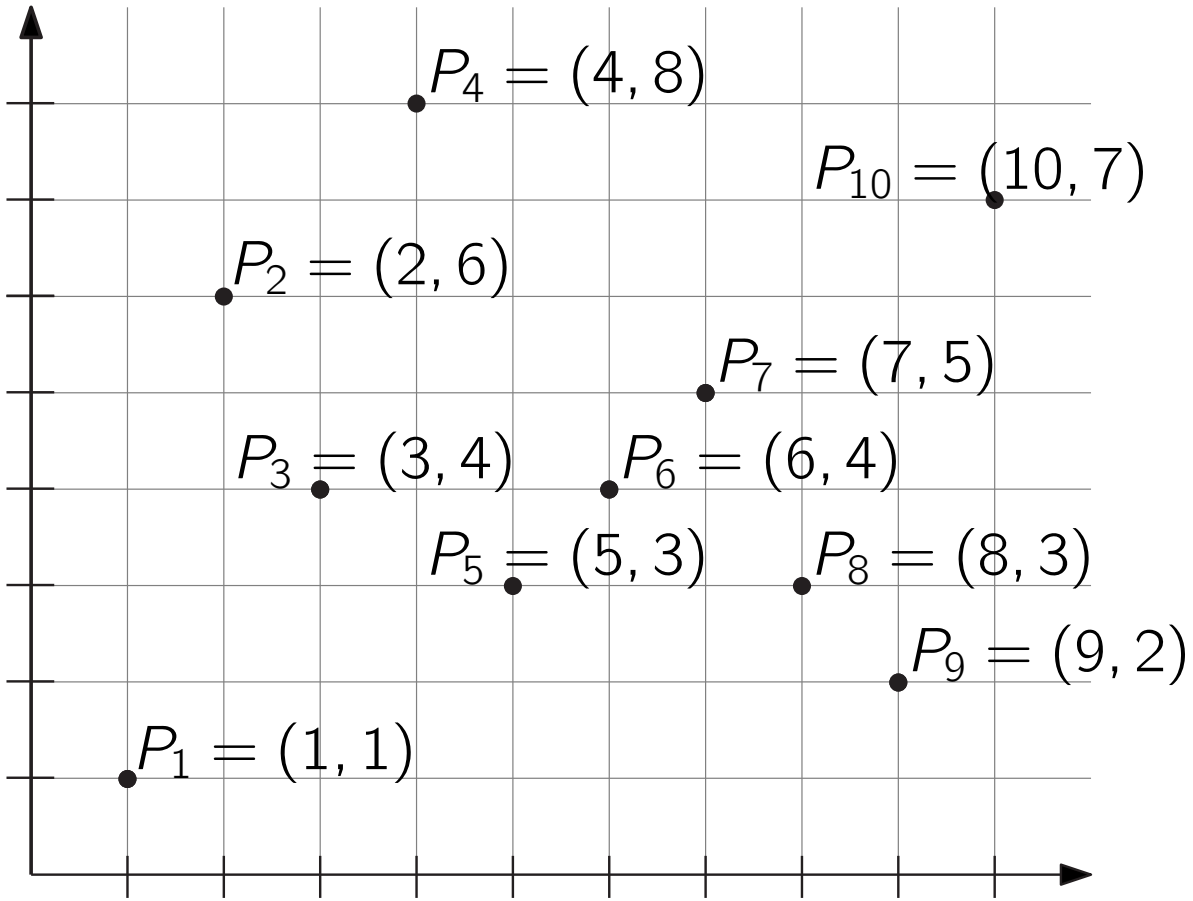
Graham-Scan

1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y-Koordinate
   - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y-Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x-Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Itereriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i-ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
   - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
   - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



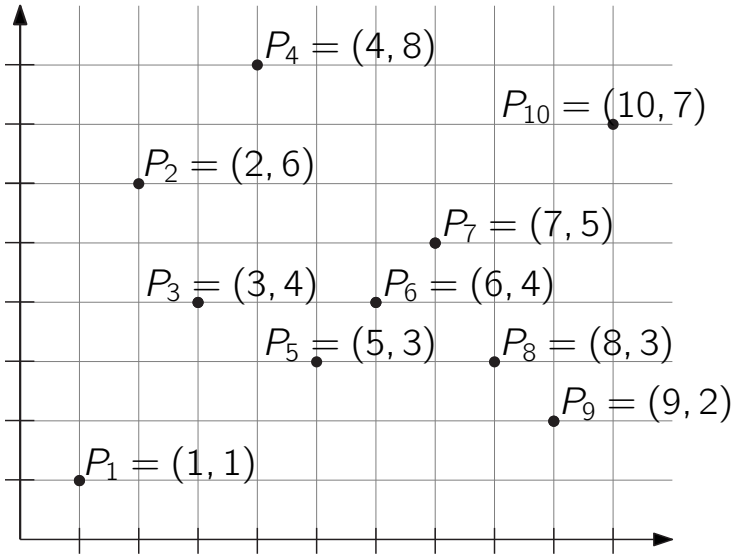
2D Range Queries

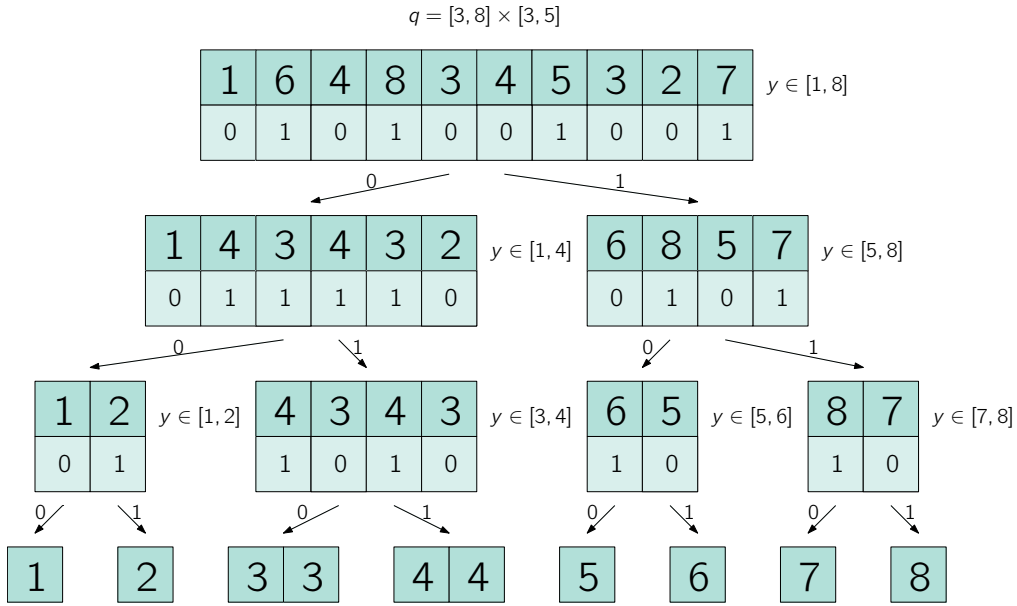
Wavelet Tree



2D Range Queries

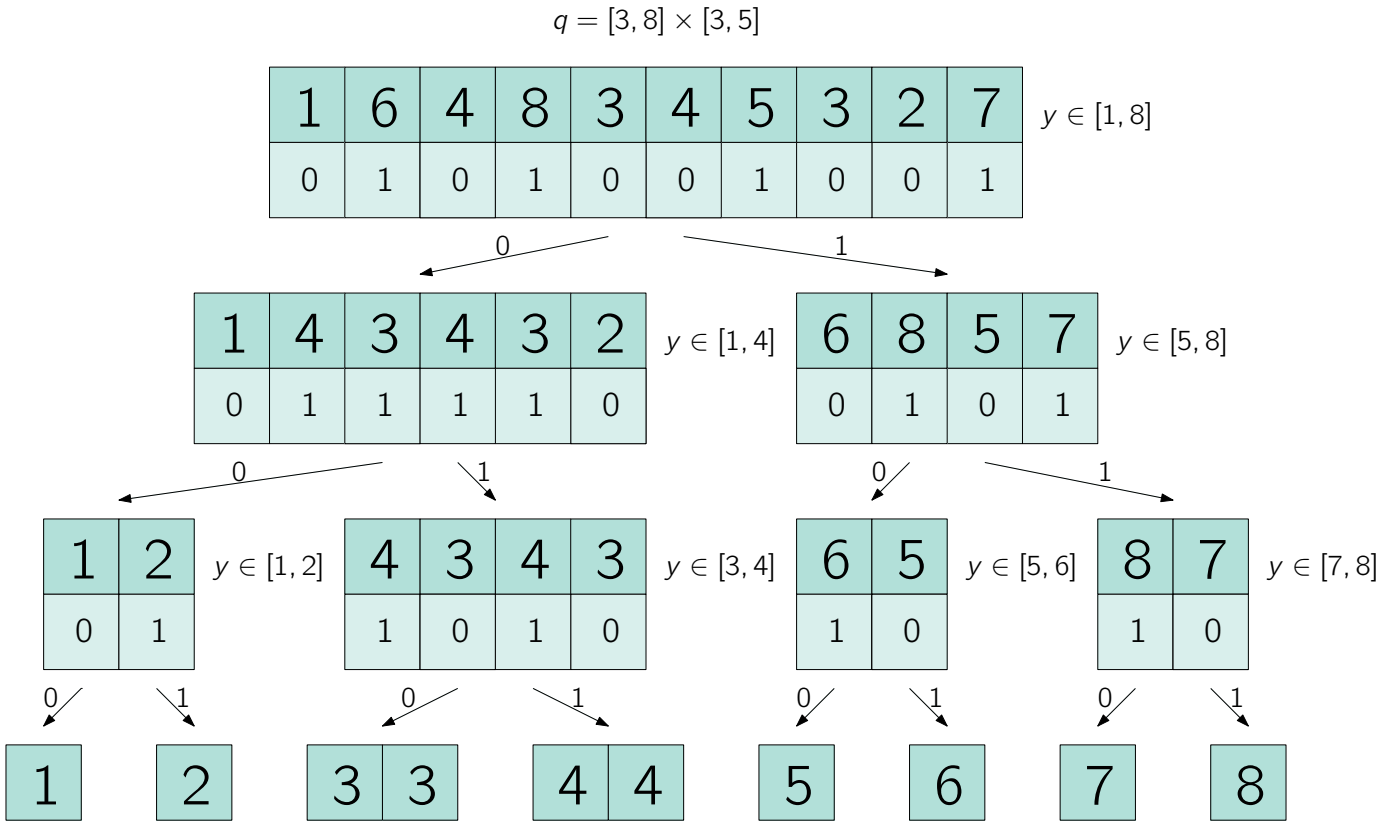
Wavelet Tree





2D Range Queries

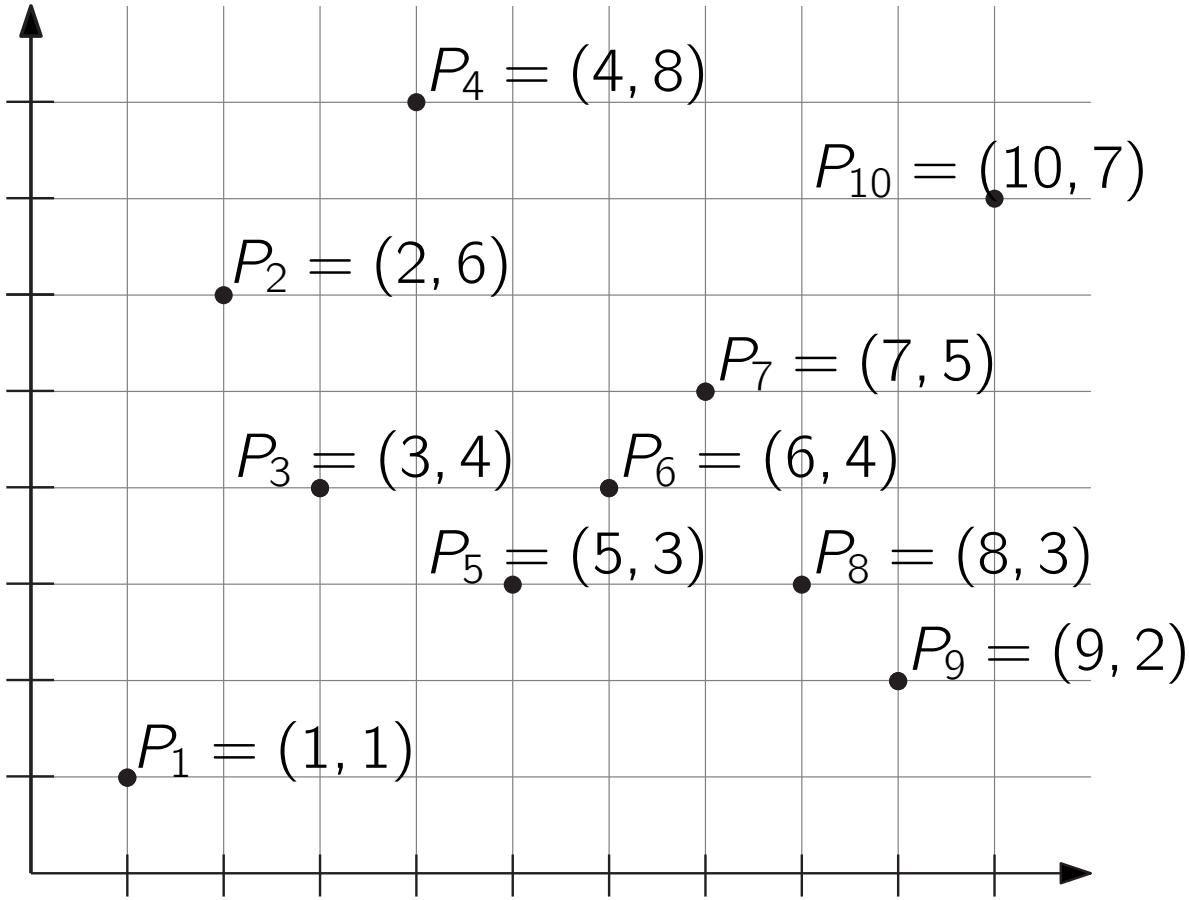
Wavelet Tree



Auf einem $n \times n$ Grid braucht ein Wavelet Tree $n \log n + o(n \log n)$ Bits Speicherplatz

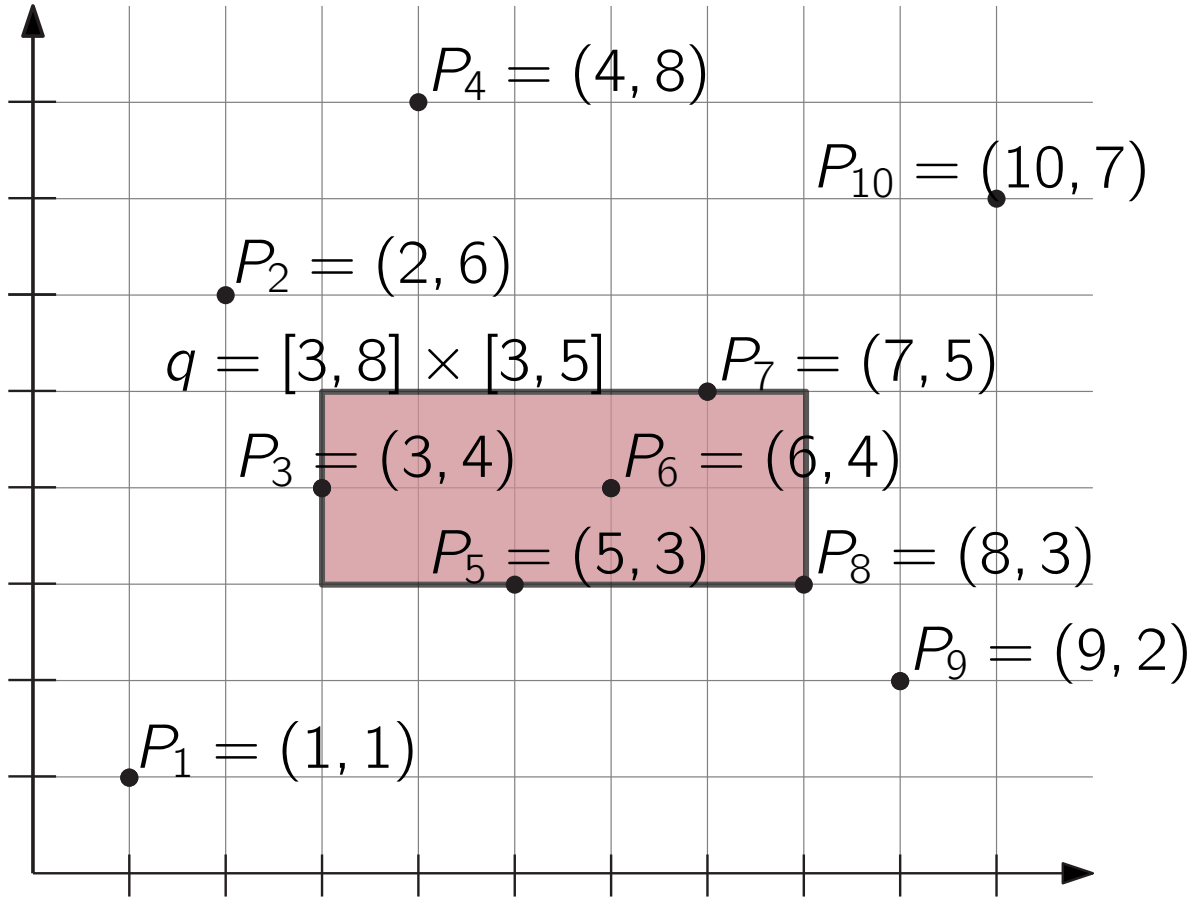
2D Range Queries

Wavelet Tree - Count Operation



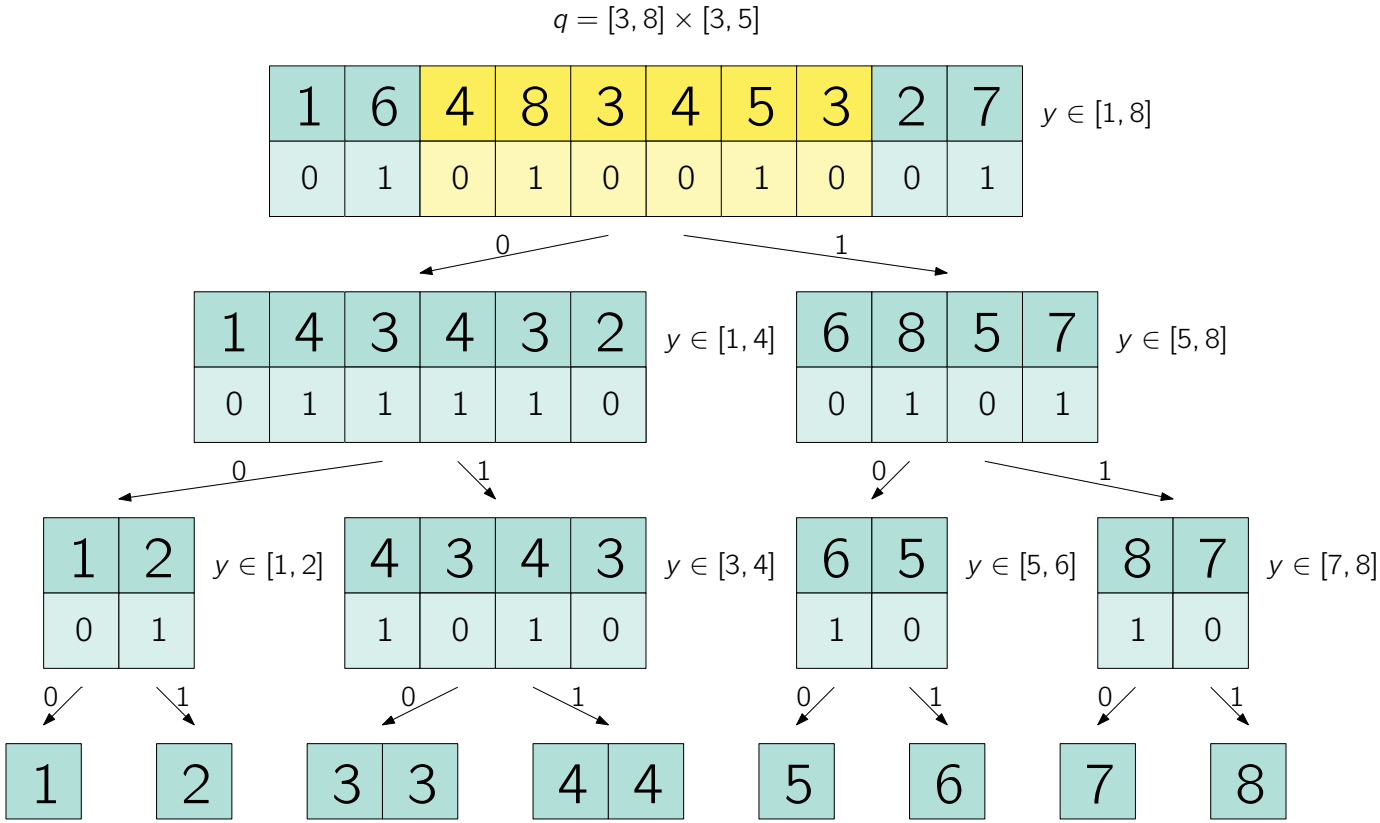
2D Range Queries

Wavelet Tree - Count Operation



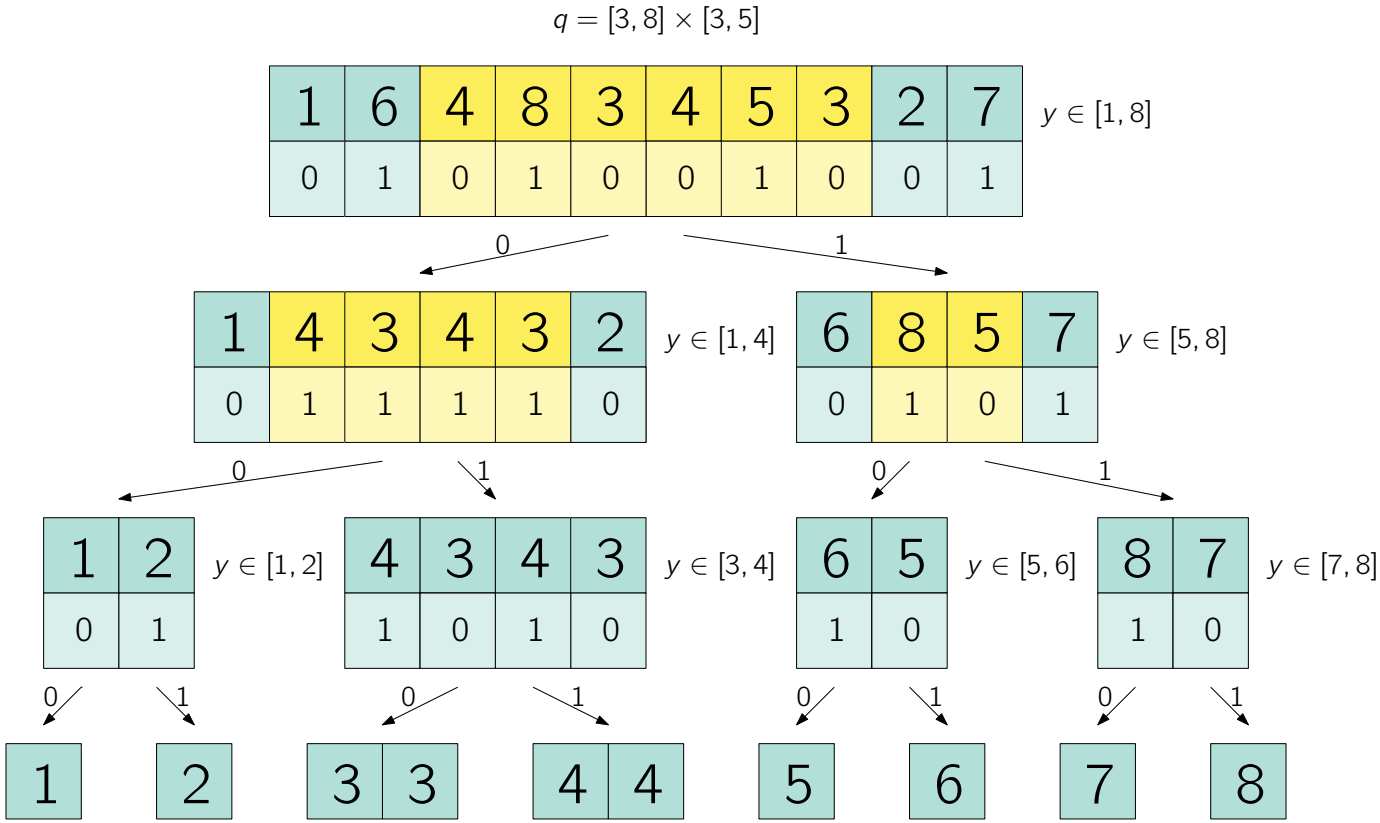
2D Range Queries

Wavelet Tree - Count Operation



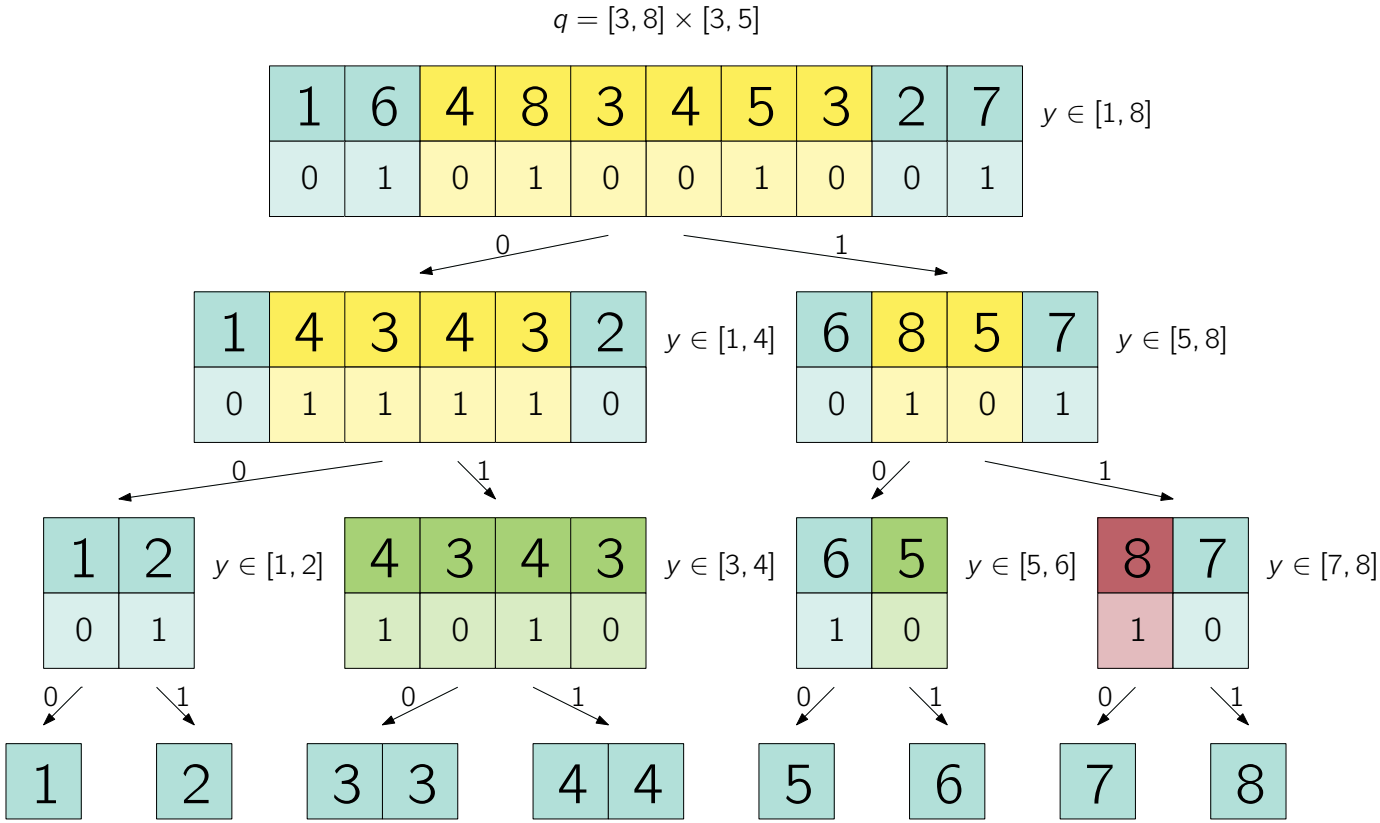
2D Range Queries

Wavelet Tree - Count Operation



2D Range Queries

Wavelet Tree - Count Operation



Ende!

Feierabend!