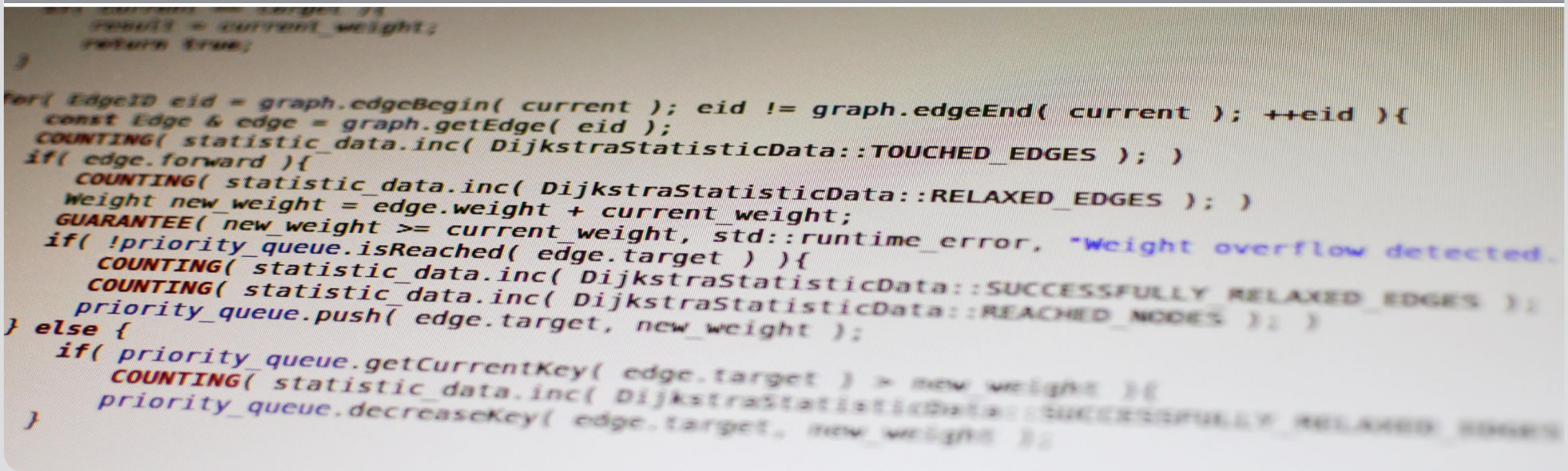
Karlsruher Institut für Technologie

Übung 12 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Hans-Peter Lehmann – *{moritz.laupichler, hans-peter.lehmann}@kit.edu*

`http://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS22.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II



Themenübersicht

- Stringology
  - Multikey Quicksort
  - Suche mit Suffix-Arrays
- Blatt 05, A4
- Blatt 05, A6

Multikey Quicksort

Bentley, Sedgewick (1997)

Three-way Radix Quicksort

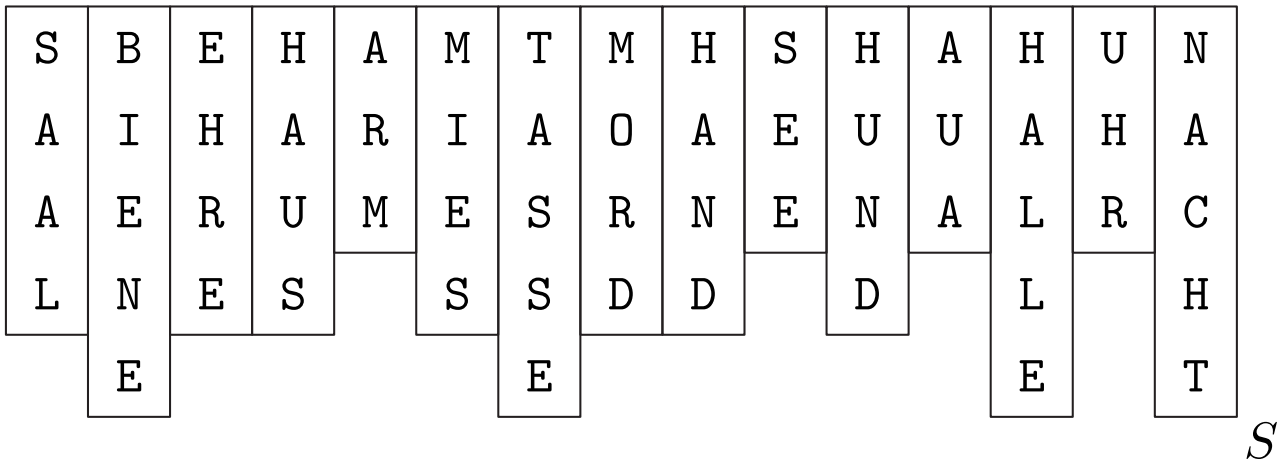
- sortiert Elemente mit mehreren Schlüsseln wie msd-*Radixsort*
  $\rightarrow$ z.B. Stellen einer Zahl, Zeichen eines Strings

- für einen Schlüssel wird *Quicksort* mit drei Fällen ausgeführt
  $\rightarrow$ kleiner als, gleich, größer als das Pivotelement

Multikey Quicksort

Ablauf

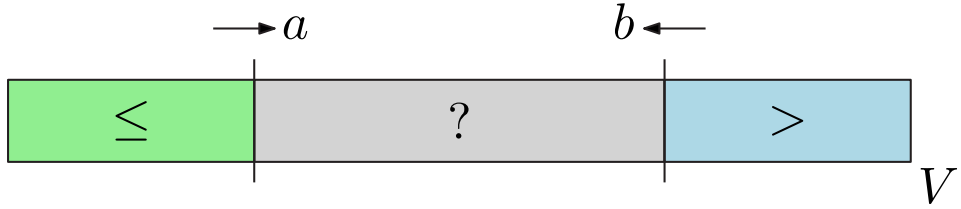
Function mkqSort(S: Array of String, i : Integer) : Array of String
  if $|S| \leq 1$ **then return** S — Basisfall
  choose $p \in S$ uniformly at random — Pivotelement
  return concatenation of — Rekursion
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] < p[i] \rangle, i$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] = p[i] \rangle, i+1$),
    mkqSort($\langle e \in S : e[i] > p[i] \rangle, i$)



in-place Multikey Quicksort

in-place bei Quicksort für Integer

- teilt Elemente in kleiner gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger a, b wandern von außen “in die Mitte”
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i < a] \leq p$, $V[i > b] > p$
  - Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = 2, b = n$
  - $a \rightarrow a + 1$, solange $V[a] \leq p$, $b \rightarrow b - 1$, solange $V[b] > p$,
  - Tausch, wenn $V[a] > p$ und $V[b] \leq p$
  - Ende, wenn $a > b$

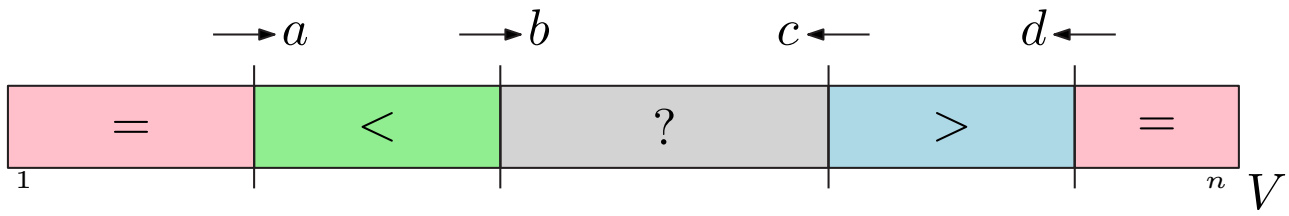


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort

- teilt Elemente in kleiner, gleich und größer als Pivotelement p
- zwei Zeiger b, c wandern von außen “in die Mitte”
- gleiche Elemente werden mit Zeiger a, d “außen” gesammelt
  $\rightarrow$ Invariante: $V[i \in [a, b)\ {}_{a \neq b}] \leq p$, $V[i < a \vee i > d] = p$, $V[i \in (c, d]\ {}_{c \neq d}] > p$

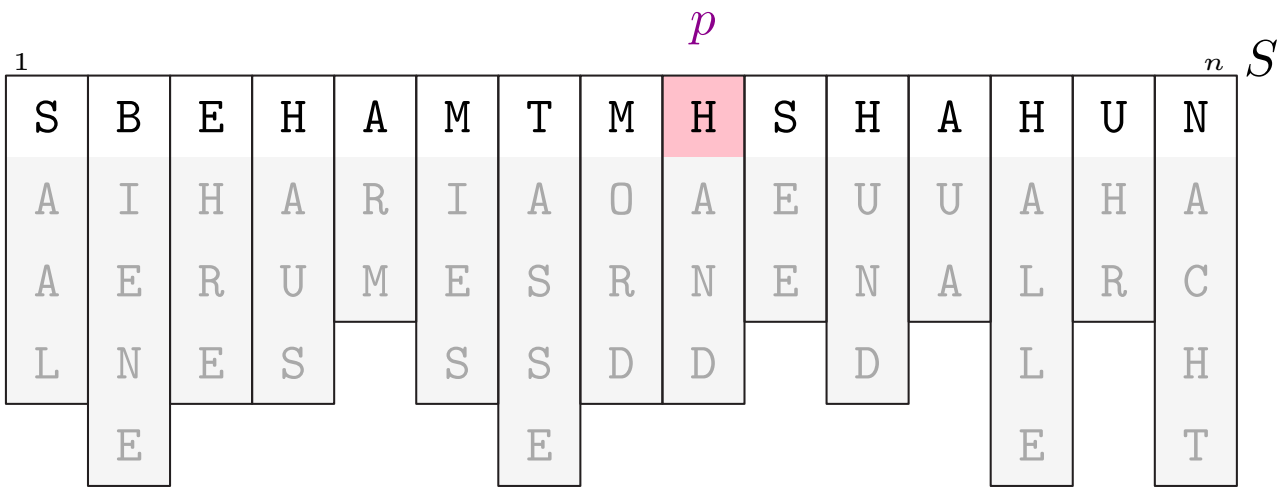


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort Algorithmus

- Wähle Pivot p und tausche mit erstem Element, setze $a = b = 2, c = d = n$
- $b \to b+1$, solange $V[b] \leq p$, wenn $V[b] = p$: Tausch mit $V[a]$, $a \to a+1$, $c \to c-1$, solange $V[c] \geq p$, wenn $V[c] = p$: Tausch mit $V[d]$, $d \to d-1$
- Tausch, wenn $V[b] > p$ und $V[c] < p$
- Ende, wenn $b > c$

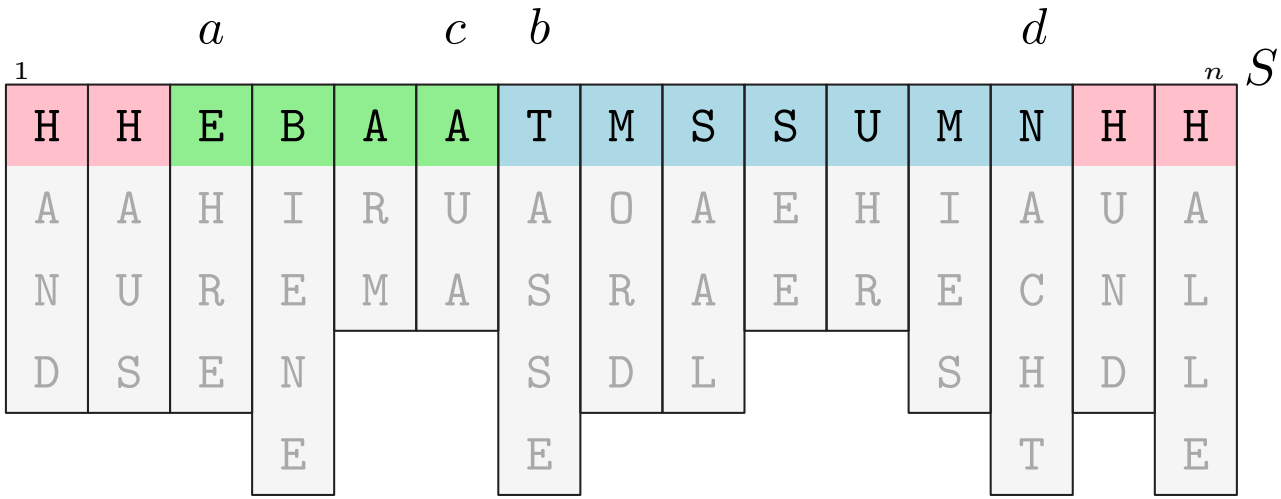


in-place Multikey Quicksort

Partitionierung

in-place bei Multikey Quicksort Umgruppierung

- $r = \min(a - 1, b - a)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[1, r)$ und $[b - r, b)$
- $r = \min(d - c, n - d)$
  Tausch von r Zeichen zwischen $[c + 1, c + r)$ und $[n - r + 1, n + 1)$



in-place Multikey Quicksort

Zusammenfassung

- *Three-way Radix Quicksort*
  Partitionierung in kleiner, gleich, größer über alle Stellen analog zu msd-*Radixsort*
- effizient $\mathcal{O}(|S| \log |S| + d)$
  $d \triangleq$ Summe der Länge der unterscheidenden Präfixe
- *in-place* Partitionierung möglich
  durch geschicktes Speichern und Verschieben der gleichen Elemente
- sehr einfache Implementierung

Suffix-Arrays

Wiederholung

Suffix-Array *SA* von *T* indiziert alle Suffixe in sortierter Reihenfolge

Im Beispiel $\mathcal{O}(n^3)$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$

i	SA[i]														
1	15	$													
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$						
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
4	10	a	r	b	e	r	$								
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
7	9	b	a	r	b	e	r	$							
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
9	12	b	e	r	$										
10	13	e	r	$											
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$					
12	14	r	$												
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
14	11	r	b	e	r	$									
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

n = Textlänge, m = Pattern-Länge

- Naiv: $\mathcal{O}(n \cdot m)$
- KMP: $\mathcal{O}(n + m)$
- Mit Suffix-Arrays zunächst: $\mathcal{O}(m \cdot \log n)$
- Optimiert: $\mathcal{O}(m + \log n)$

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{bar}$

- (SA bestimmen)
- finde Start binäre Suche

  $l = 1, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lfloor \frac{l+r}{2} \rfloor$

    if $(P > T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q + 1$

      else $r = q$

  $s = l$

  if $(P \neq T_{SA[s]..SA[s]+m-1})$

    then break

- finde Ende binäre Suche

  $l = s, r = n$

  while $(l < r)$ **do**

    $q = \lceil \frac{l+r}{2} \rceil$

    if $(P = T_{SA[q]..SA[q]+m-1})$

      then $l = q$

      else $r = q + 1$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
i	SA[i]															
1	15	$														
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$							
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
4	10	a	r	b	e	r	$									
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
7	9	b	a	r	b	e	r	$								
$q =$ 8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
9	12	b	e	r	$											
10	13	e	r	$												
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
12	14	r	$													
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
14	11	r	b	e	r	$										
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					

$s = 6, t = 8$

Suche mit Suffix-Arrays

Zusammenfassung

- Verlagerung des Aufwands von Anfrage in Vorverarbeitung
  - $\rightarrow$ einmal Suffix-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ danach Anfragen in $\mathcal{O}(m \log n)$ möglich, statt in $\mathcal{O}(m+n)$

  gut, wenn auf einem Text viele Anfragen stattfinden

- Ausnutzung der Eigenschaften des Suffix-Arrays
  - $\rightarrow$ jeder Substring ist Präfix eines Suffix
  - $\rightarrow$ alle Substrings liegen "sortiert" vor

    mögliche Ausnahme: Substring ist Präfix von Substring

  das Suffix-Array indiziert alle Suffixe in sortierter Reihenfolge

LCP-Array

Längster gemeinsamer Präfix

Definition:

- LCP$[i]$: Länge des längsten gemeinsamen Präfixes von je zwei lexikographisch benachbarten Suffixen $A[\mathrm{SA}[i-1]\ldots n]$ und $A[\mathrm{SA}[i]\ldots n]$

Erweiterung auf beliebige Suffixe

- LCP$[i][j]$: Länge des längsten gemeinsamen Präfix beliebiger lexikographischer Suffixe $A[\mathrm{SA}[i]\ldots n]$ und $A[\mathrm{SA}[j]\ldots n]$
- Konstruktion: $\mathcal{O}(n \log n)$ Zeit und Platz
- Zugriff: $\mathcal{O}(1)$

Schnelle Suche mit Suffix-Arrays

Erster Ansatz

Suche: $P = \texttt{bar}$

- Ziel: kein wiederholtes Vergleichen von Zeichen aus P
- Nutze LCP-Array um Suche zu beschleunigen
- Starte Suche bei *mlr*
  - $l := \text{LCP}(L, P)$
  - $r := \text{LCP}(R, P)$
  - $mlr := \min(l, r)$
  - Update von l, r, keine Neuberechnung
- Oft $\mathcal{O}(m + \log n)$
- Worst case $\mathcal{O}(m \log n)$

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$T =$		b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
i	SA[i]															
1	15	$														
2	8	a	b	a	r	b	e	r	$							
3	2	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$	
4	10	a	r	b	e	r	$									
5	5	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$				
$L =$ 6	1	b	a	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$
$q =$ 7	9	b	a	r	b	e	r	$								
8	4	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$			
$R =$ 9	12	b	e	r	$											
10	13	e	r	$												
11	7	h	a	b	a	r	b	e	r	$						
12	14	r	$													
13	3	r	b	a	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$		
14	11	r	b	e	r	$										
15	6	r	h	a	b	a	r	b	e	r	$					

$L = 6, R = 9$

$l = 3, r = 1$

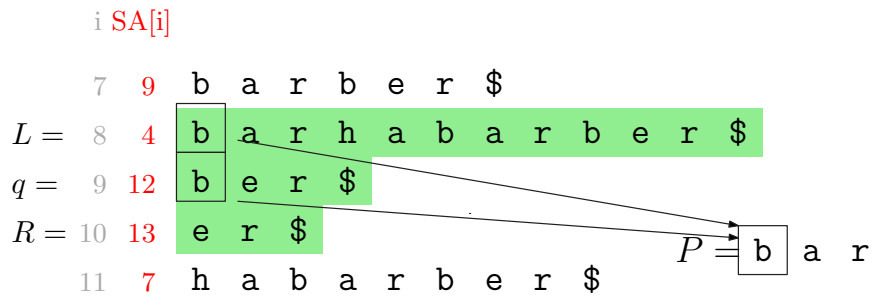
$mlr := 1 = \min(l, r)$

Schnelle Suche mit Suffix-Arrays

Redundante Vergleiche

Problem

- Falls $l \neq r \rightarrow$ wiederholtes Vergleichen



Definition

- Vergleich eines Zeichens aus P ist redundant, falls das Zeichen vorher schon einmal überprüft wurde.

Ziel

- Beschränke rendundante Vergleiche auf $\mathcal{O}(1)$ pro Iteration
- Vergleiche bei $\max(l, r)$ beginnen

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Ansatz

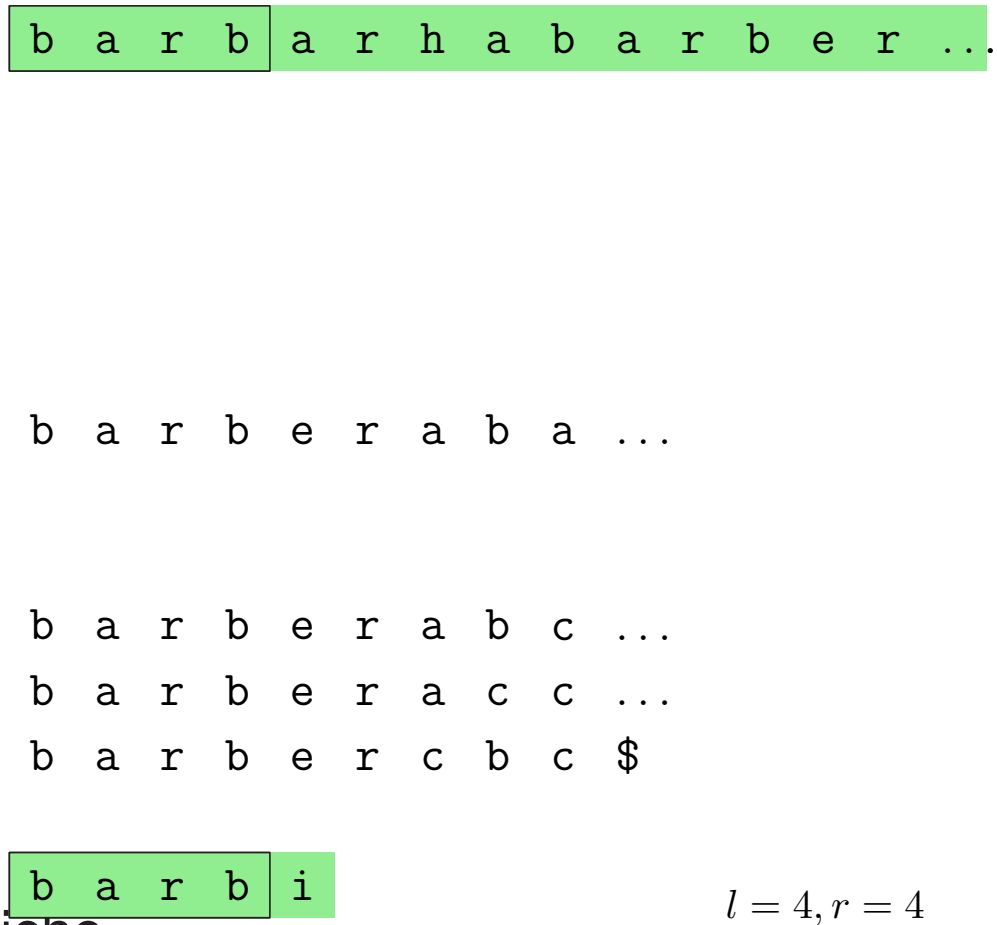
- **if** $(l = r)$
  start at mlr
  Update l, r, L, R
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] > l)$
  $L := q + 1$
  Update l
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] < l)$
  $R := q$
  $r := \mathrm{LCP}[L, q]$
- **if** $(l > r \wedge \mathrm{LCP}[L, q] = l)$
  start at l

Suche mit Suffix-Arrays

Ablauf

Suche: $P = \texttt{barberac}$

- **if** $(l = r)$
  start at mlr
  Update l, r, L, R
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] > l)$
  $L := q + 1$
  Update l
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] < l)$
  $R := q$
  $r := \text{LCP}[L, q]$
- **if** $(l > r \wedge \text{LCP}[L, q] = l)$
  start at l



Laufzeit

- LCP + SA: $\mathcal{O}(m + \log n)$ Vergleiche
- Beweisidee
  - l, r werden nur größer

Suche mit Suffix-Arrays

Zusammenfassung

- Verlagerung des Aufwands von Anfrage in Vorverarbeitung
  - $\rightarrow$ einmal Suffix-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ danach Anfragen in $\mathcal{O}(m \log n)$ möglich, statt in $\mathcal{O}(m+n)$

  gut, wenn auf einem Text viele Anfragen stattfinden

- Verhindern redundanter Vergleiche
  - $\rightarrow$ einmal Suffix-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ einmal LCP-Array generieren in $\mathcal{O}(n)$,
  - $\rightarrow$ einmal erweitertes LCP-Array generieren in $\mathcal{O}(n \log n)$,
  - $\rightarrow$ danach Anfragen in $\mathcal{O}(m + \log n)$

Ende!

Feierabend!