Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
Moritz Laupichler
Nikolai Maas

1. Übungsblatt zu Algorithmen II im WS 2023/2024

https://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php
{sanders, moritz.laupichler, nikolai.maas}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Analyse: Kleinaufgaben*)

a) Geben Sie die wesentlichen Unterschiede –laut Vorlesung– zwischen einer (normalen) *Priority Queue* und einer adressierbaren *Priority Queue* an.

b) Vergleichen Sie die Laufzeit einer `merge`-Operation für *Pairing Heaps* und Array basierte *Binary Heaps* (also wie aus Algorithmen I bekannt).

Aufgabe 2 (*Analyse: Laufzeitverhalten*)

a) Beweisen Sie allgemein für adressierbare *Priority Queues* die untere Laufzeitschranke von $\Omega(\log n)$ für `deleteMin` unter der Voraussetzung, dass `insert` konstante Laufzeit benötigt.

b) Warum muss diese untere Laufzeitschranke nicht gelten, wenn `insert` mehr Zeit benötigen darf?

Aufgabe 3 (*Analyse:* best-case *Verhalten*)

a) Geben Sie einen Zustand eines *Fibonacci Heaps* an, für den die nächsten n `deleteMin`-Operationen jeweils konstante Laufzeit benötigen (nicht amortisiert). Begründen Sie Ihre Antwort. Gehen Sie davon aus, dass zwischen den `deleteMin`-Operationen keine anderen Operationen ausgeführt werden.

b) Geben Sie einen Algorithmus an, welcher den von Ihnen angegebene Zustand für beliebige n erzeugt. Beweisen Sie die Korrektheit des Algorithmus.

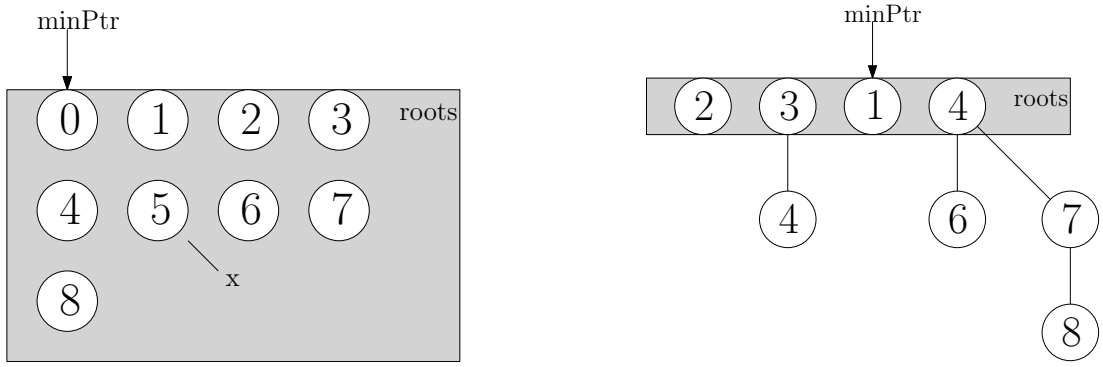
Aufgabe 4 (*Rechnen:* Fibonacci Heaps)

Gegeben sei ein *Fibonacci Heap* mit unten eingezeichnetem Zustand (a).

a) Geben Sie eine möglichst kurze Folge von Operationen an, die diesen Zustand erzeugt.

b) Führen Sie anschließend die Operationen `deleteMin()` auf dem Heap aus. Zeichnen Sie den Zustand des Heaps nach jedem Einfügen eines Baums in ein leeres Bucket und nach jeder Union-Operation.

c) Geben Sie eine möglichst kurze Folge von Operationen an, die den unten eingezeichneten Zustand (b) erzeugt. Tipp: der eingezeichnete Zustand lässt sich aus dem Heap in Abbildung (a) nach der `deleteMin`-Operation durch weitere Operationen erzeugen.



(a) (b)

Aufgabe 5 (*Entwurf: Datenstrukturen*)

a) Erweitern Sie die Datenstruktur *Pairing Heap* um die Operation `increaseKey(h: Handle, k: Key)`. Ihre Operation sollte amortisiert $O(\log n)$ Laufzeit benötigen. Geben Sie Pseudocode an. Wie würden Sie bei einem *Binary Heap* vorgehen?

b) Entwerfen Sie eine Datenstruktur welche die Operationen `insert` in $O(\log n)$, Median bestimmen in $O(1)$ und Median entfernen in $O(\log n)$ unterstützt (d.h. `delete` muss nur für das Median-Element funktionieren). Eine Beschreibung in Worten ist ausreichend.

Aufgabe 6 (*Rechnen: Monotone ganzzahlige* Priority Queues)

Bei einer Ausführung von *Dijkstra's Algorithmus* wird folgender Ausschnitt an *Priority Queue* Operationen protokolliert:

...

- `insert(a, 06 [00110] )` (Parameter: Knotenbezeichnung, Distanz [Distanz binär])
- `insert(b, 10 [01010] )`
- `insert(c, 07 [00111] )`
- `deleteMin()`
- `deleteMin()`
- `insert(d, 12 [01100] )`
- `deleteMin()`
- `insert(e, 16 [10000] )`

...

Zusätzlich wissen Sie, dass das maximale Kantengewicht im Graphen $C = 6$ beträgt und dass vor der ersten protokollierten Operation das letzte enthaltene Element aus der *Priority Queue* entfernt wurde. Dieses hatte den Wert $min = 5$.

a) Führen Sie die Operationen auf einer *Bucket Queue* aus. Geben Sie den Zustand der Datenstruktur nach jeder Operation an.

b) Wieviele *Buckets* werden für eine Ausführung auf einem *Radix Heap* benötigt? Führen Sie die Operationen auf einem *Radix Heap* aus. Geben Sie den Zustand der Datenstruktur und den Wertebereich der *Buckets* nach jeder Operation an.

Aufgabe 7 (*Analyse: Laufzeit von Dijkstra's Algorithmus*)

Gegeben sei ein gerichteter Graph $G = (V,\ E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, sowie eine Kantengewichtungsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_0^+$.

a) Beweisen Sie die Behauptung aus der Vorlesung, dass für $m \in \Omega(n \log n \log\log n)$ Dijkstra's Algorithmus mit einem *binary heap* eine durchschnittliche Laufzeit von $O(m)$ besitzt.

b) Eine spezielle *Priority Queue* habe folgende Laufzeiteigenschaften:

- `insert`: $O(\log n)$
- `decreaseKey`: $O(1)$
- `deleteMin`: $O(\sqrt{m})$

(ob eine Datenstruktur mit diesen Eigenschaften existiert und Dijkstra's Algorithmus mit ihr korrekt arbeitet, ist eine andere Frage, aber wir nehmen für diese Aufgabe an es ginge :-))

Geben Sie eine kleinste obere Schranke für die Laufzeit von Dijkstra's Algorithmus unter Verwendung dieser *Priority Queue* an. Unter welcher Bedingung an das Verhältnis der Anzahl Knoten n zu Kanten m wird die Laufzeit linear in der Eingabegröße? Die Eingabe erfolgt in Form einer Adjazenzliste.

Ausgabe: 31.10.2023
Besprechung: 14.11.2023