Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
Moritz Laupichler
Nikolai Maas

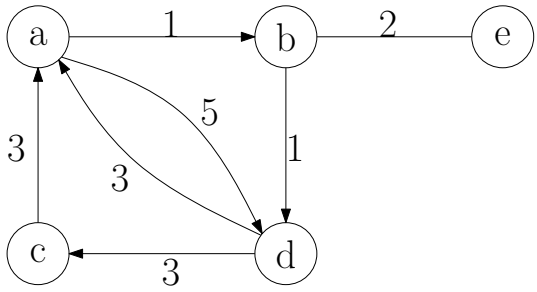
2. Übungsblatt zu Algorithmen II im WS 2023/2024

https://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php
{sanders, moritz.laupichler, nikolai.maas}@kit.edu

Aufgabe 1 (*Einführung+Analyse: Bidirektionaler Dijkstra*)

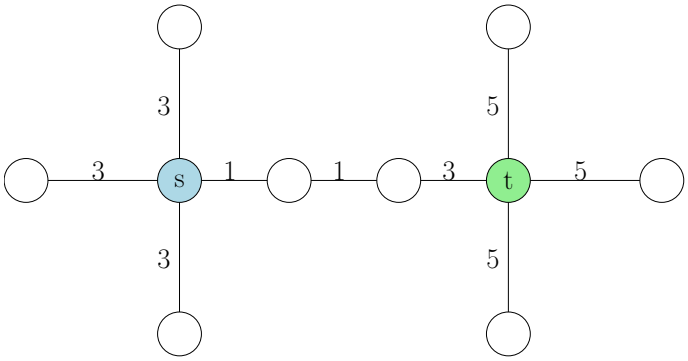
Gegeben sei – wie üblich – ein gerichteter Graph $G = (V,\ E)$ mit $|V| = n$ und $|E| = m$, sowie eine Kantengewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_0^+$. Gesucht ist der kürzeste Pfad $p = \langle s, \ldots, t \rangle$ zwischen zwei Punkten $s,\ t \in V$.
Eine bidirektionale Suche löst dieses Problem wie folgt: Es werden zwei unidirektionale Suchen mit Dijkstra's Algorithmus gestartet. Die *Vorwärtssuche* beginnt bei Knoten s und operiert auf dem normalen Graphen G, auch *Vorwärtsgraph* genannt. Die *Rückwärtssuche* beginnt bei Knoten t und operiert auf dem *Rückwärtsgraph* $G^r = (V, E^r)$ mit Kantengewichtsfunktion c^r. Dieser Graph entsteht aus G durch Umkehrung aller Kanten. Der Algorithmus scannt abwechselnd einen Knoten in der Vorwärtssuche und in der Rückwärtssuche, beginnend mit der Vorwärtssuche.
Wird während des Scans von Knoten u Kante $(u,\ v)$ relaxiert, so wird überprüft, ob die Distanz $d_{\text{forward}}[v] + d_{\text{backward}}[v]$ kleiner ist als die momentan minimale gefundene Distanz von s nach t und diese gegebenenfalls angepasst ($d_{\text{forward}}[v]$ gibt die bisher kürzeste gefundene Distanz von s nach v in der Vorwärtssuche und $d_{\text{backward}}[v]$ die bisher kürzeste gefundene Distanz von v nach t in der Rückwärtssuche an).
Sobald ein Knoten in einer Richtung gescannt werden soll, der bereits in der anderen Richtung gescannt worden ist, kann die Suche beendet werden (*Abbruchbedingung*). Die aktuelle minimale gefundene Distanz ist dann die tatsächliche minimale Distanz zwischen s und t.

a) Zeichnen Sie den Rückwärtsgraph G^r zum angegebenen Graphen. Geben Sie die Kantengewichte $c(a, d)$, $c^r(a, d)$ sowie $c(b, e)$, $c^r(b, e)$ an.



(Kante (b, e) ist eine bidirektionale [bzw. ungerichtete] Kante)

b) Geben Sie an, in welcher Reihenfolge der unten angegebene Graph durchlaufen wird.



c) Zeigen Sie, dass die Abbruchbedingung korrekt ist.

d) Wann kann es passieren, dass die Suche nach dem Scan von Knoten u beendet wird, dieser aber nicht Teil des kürzesten Weges ist? Geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 2 (*Kleinaufgaben: A*-Suche*)

a) Sei pot$(\cdot)$ eine gültige Potentialfunktion für die A*-Suche nach Knoten t in Graph $G(V,\ E)$. Überprüfen Sie, ob

$$\text{pot}^c = \text{pot} + c,\ c = const.$$

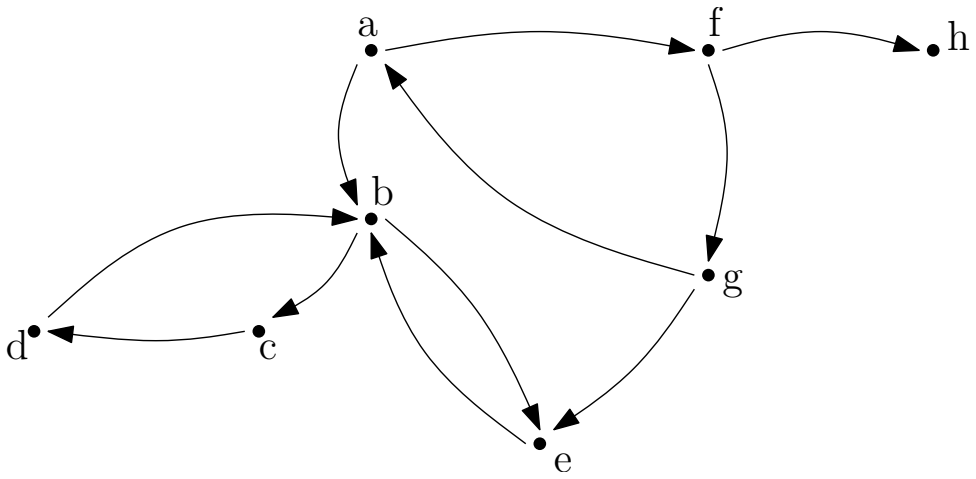
ebenfalls eine gültige Potentialfunktion darstellt.

b) Bei manchen Algorithmen kann es sinnvoll sein, unterschiedliche Potentialfunktionen zu kombinieren. Zeigen Sie in diesem Zusammenhang: Sind π_1 und π_2 gültige Potentialfunktionen, so ist auch $\pi = \frac{\pi_1+\pi_2}{2}$ eine gültige Potentialfunktion.

c) Kann es vorkommen, dass eine A*-Suche mehr Knoten absucht als eine Suche mit Dijkstra's Algorithmus für die gleiche Anfrage? Kann es auch dann vorkommen, wenn das Potential auf jedem kürzesten Pfad zu t monoton fallend ist (d.h. für jede Kante (u, v) mit $\mu(v, t) \leq \mu(u, t)$ gilt $\text{pot}(v) \leq \text{pot}(u)$)? Begründen Sie, warum nicht, oder geben Sie ein Beispiel an.

Aufgabe 3 (*Rechnen: SCC mit Tiefensuche*)

Gegeben sei folgender Graph $G = (V, E)$:



Führen Sie den Algorithmus zur Bestimmung aller starken Zusammenhangskomponenten aus der Vorlesung auf dem Graph G aus. Geben Sie nach jedem Schritt den Zustand von `oReps`, `oNodes` und `component` an.

Aufgabe 4 (*Analyse+Entwurf: Artikulationspunkte*)

Sei $G = (V, E)$ ein zusammenhängender, ungerichteter Graph. Ein Knoten v des Graphen G wird als *Gelenkpunkt* bezeichnet, wenn dessen Entfernen die Zahl der Zusammenhangskomponenten erhöht.

a) Zeigen Sie, dass es in jedem Graphen G *ohne Gelenkpunkte* und mit $|V| \geq 3$ immer mindestens ein Knotenpaar (i, j), $i, j \in V$, $i \neq j$ gibt, so dass zwei Pfade $P_1 = \langle i, \ldots, j \rangle$ und $P_2 = \langle i, \ldots, j \rangle$ existieren, die bis auf die Endpunkte knotendisjunkt sind, d.h.: $P_1 \cap P_2 = \{i, j\}$.

b) Zeigen Sie, dass in jedem Graphen G *mit Gelenkpunkten* ein Knoten v existiert, für den gilt: Man kann einen Knoten w entfernen, so dass es von v aus keine Pfade mehr zu mindestens der Hälfte der verbleibenden Knoten gibt.

c) Zeigen Sie, dass in einem zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ stets ein Knoten v existiert, so dass G nach Entfernen von v weiterhin zusammenhängend ist.

d) Vervollständigen Sie den angegebenen allgemeinen DFS-Algorithmus, so dass er in $O(|V| + |E|)$ alle Gelenkpunkte eines ungerichteten Graphen berechnet. Geben Sie an, was die Funktionen `init`, `root(s)`, `traverseTreeEdge(v,w)`, `traverseNonTreeEdge(v,w)` und `backTrack(u,v)` machen.
Überlegen Sie sich zunächst, wie Sie mit Hilfe der DFS-Nummerierung Gelenkpunkte erkennen können.

```
Depth-first search of graph G = (V, E)
unmark all nodes
init
for all s ∈ V do
    if s is not marked then
        mark s
        root(s)
        DFS(s,s)
    end if
end for

procedure DFS(u,v : NodeID)
    for all (v, w) ∈ E do
        if w is marked then
            traverseNonTreeEdge(v,w)
        else
            traverseTreeEdge(v,w)
            mark w
            DFS(v,w)
        end if
    end for
    backtrack(u,v)
end procedure
```

Aufgabe 5 (*Kleinaufgaben: Eigenschaften von Flüssen*)

a) Nach Vorlesung ist eine gültige Distanzfunktion $d(\cdot)$ für *Dinitz Algorithmus* gegeben durch:

- $d(t) = 0$
- $d(u) \leq d(v) + 1 \quad \forall\ (u, v) \in G_f$

Zeigen Sie, falls $d(s) \geq n$, existiert kein *augmentierender Pfad*.

b) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Laufzeit von *Dinitz Algorithmus* für Graphen mit Kantengewichten gleich 1 (*unit edge weights*) in $O((n + m)\sqrt{m})$ liegt. Vergleichen Sie diese Laufzeit zum *Ford Fulkerson Algorithmus*. Für welche Graphen mit *unit edge weights* ist welcher der beiden Algorithmen schneller?

c) Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph, in dem maximale Flüsse berechnet werden sollen. Sei $e = (i, j) \in E$ ebenso wie $e' = (j, i) \in E$, d. h. G besitzt ein Paar entgegengesetzter Kanten. Außerdem sei $c(e) \geq c(e')$. Widerlegen Sie durch ein Gegenbeispiel:

Entfernt man e' aus E und reduziert $c(e) := c(e) - c(e')$, so ändert sich der maximale Fluss nicht (d. h. man kann entgegengesetzte Kanten a-priori gegeneinander aufrechnen).

Aufgabe 6 (*Rechnen: Segmentierung mit Flüßen*)

Wir betrachten einen einfachen Fall für Bildbearbeitung: die Vorder-/Hintergrundsegmentierung. Das Ziel dieses Prozesses ist es, ein Bild in Vorder- und Hintergrund zu zerlegen. Die Transformation dafür weist jedem Pixel $p_{i,j}$ des Bildes einen Knoten $v_{i,j}$ im Graphen zu. Für jedes Paar von benachbarten Pixeln $p_{i,j}$ und $p_{k,l}$ ($|i-k|+|j-l|=1$) fügen wir eine ungerichtete Kante $(v_{i,j}, v_{k,l})$ ein. Zusätzlich fügen wir je einen Knoten s für Vordergrund (Quelle) und einen Knoten t für Hintergrund (Senke) ein. Von Knoten s existiert eine gerichtete Kante zu jedem Knoten $p_{i,j}$ und von jedem Knoten $p_{i,j}$ existiert eine gerichtete Kante zu Knoten t. Wir definieren darüber hinaus folgende Kantengewichte:

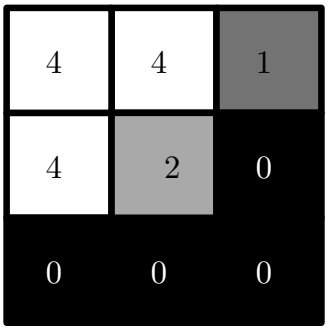
$$c(e=(u,v)) = \begin{cases} p_v(v) & u = s \\ p_h(u) & v = t \\ f(u,v) & \textit{sonst} \end{cases}$$

Wobei mit $p_v(x)$ die Wahrscheinlichkeit gegeben ist, dass x Vordergrundknoten ist, mit $p_h(x)$ die Wahrscheinlichkeit für einen Hintergrundknoten und mit $f(x,y)$ eine Penaltyfunktion für das Trennen der beiden Knoten x und y. Für ein Graustufenbild B definieren wir
$p_v(x,y) = B[x,y]^2$, $p_h(x,y) = (4 - B[x,y])^2$ sowie $f((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = (4 - |B[x_1,y_1] - B[x_2,y_2]|)^2$.
Hinweis: Diese Modellierung ist nur ein Beispiel und keine allgemeingültige Modellierung. Sie soll nur verdeutlichen, wie Flow-Algorithmen für andere Probleme eingesetzt werden können.

a) Geben Sie den Flussgraphen für das unten angegebene Graustufenbild an.

b) Führen Sie einen Augmenting-Path-Algorithmus auf dem entstandenen Graphen aus.

c) Wie würde die Segmentierung in Vorder- und Hintergrund im Bild als Ergebnis aussehen?



Aufgabe 7 (*Analyse: Eigenschaften von Flüssen*)

a) Seien (S, T) und (S', T') zwei minimale (s, t)-Schnitte in einem Flussgraphen G. Zeigen oder widerlegen Sie, dass $(S \cup S', T \cap T')$ und $(S \cap S', T \cup T')$ auch minimale (s, t)-Schnitte sind.

b) Sei (S, T) ein minimaler (s, t)-Schnitt in einem Flussgraphen G. Zeigen oder widerlegen Sie, dass (S, T) ein minimaler (x, y)-Schnitt ist für alle $(x, y) \in S \times T$.

c) Wir betrachten den *Preflow-Push-Algorithmus* aus der Vorlesung mit beliebiger Wahl des nächsten Knotens. Zeigen Sie, dass es Eingaben gibt, für die immer $\Omega(n^2)$ *relabel*-Operationen benötigt werden.

Ausgabe: 14.11.2023
Besprechung: 28.11.2023