Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Theoretische Informatik

Prof. Dr. Peter Sanders
Moritz Laupichler
Nikolai Maas

4. Übungsblatt zu Algorithmen II im WS 2023/2024

https://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php
{sanders, moritz.laupichler, nikolai.maas}@kit.edu

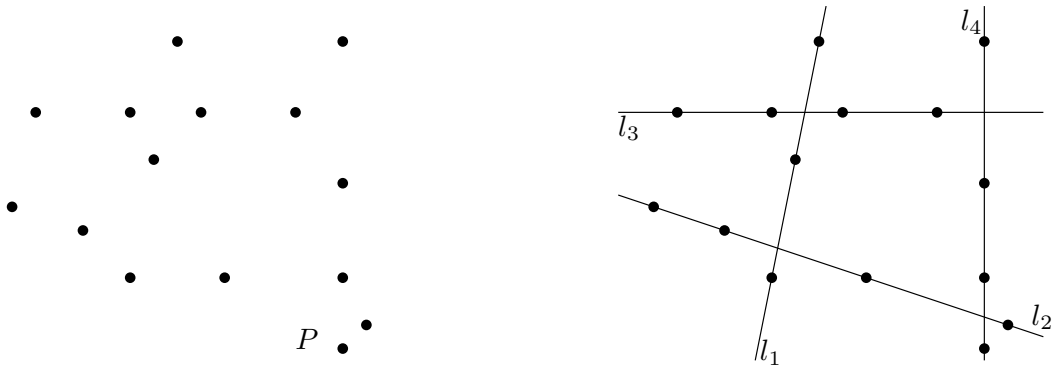
Aufgabe 1 (*Kleinaufgaben: Laufzeiten*)

Sei $f(n, k)$ die Laufzeit eines Algorithmus mit n der Eingabegröße des Problems und k ein beliebiger Parameter. Geben Sie an, welche der folgenden Laufzeiten ein Problem *fixed-parameter-tractable* machen. Begründen Sie Ihre Antwort jeweils kurz.

- $f_1(n, k) = 3k^2n^2$
- $f_2(n, k) = n^k \cdot k^2 \cdot \sqrt{n^e}$
- $f_3(n, k) = 3n^2 + 2nk$
- $f_4(n, k) = e^k \cdot \sqrt{n}$
- $f_5(n, k) = e^n \cdot \sqrt{k}$
- $f_6(n, k) = k^3 \cdot \log n^2$

Aufgabe 2 (*Analyse:* line shooting *Problem*)

Gegeben seien n Punkte $P \subset \mathbb{R}^2$ in der Ebene sowie eine Zahl $k > 0$. Das *line shooting* Problem besteht darin zu bestimmen, ob es eine Menge L von k Geraden gibt, so dass jeder Punkt in P von mindestens einer dieser Geraden getroffen wird. Eine Probleminstanz wird durch das Tupel (P, k) charakterisiert.
In den Bildern sehen Sie links eine Punktmenge P und rechts eine mögliche Lösung für $(P, 4)$.



a) Begründen Sie kurz, warum eine Gerade l, die mehr als k Punkte trifft, Teil einer Lösung für die Probleminstanz (P, k) sein muss bei beliebigem P.

b) Begründen Sie kurz, warum die Instanz $(P, 3)$ des *line shooting* Problems keine Lösung besitzt mit P wie in obiger Abbildung.

c) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Instanz (P, k) des *line shooting* Problems exakt löst für beliebiges P. Bauen Sie dazu einen Suchbaum mit beschränkter Tiefe auf, der alle Kombination von k Geraden, die jeweils mindestens zwei Punkte treffen, generiert. Die Suchbaumtiefe und der Verzweigungsgrad sollen dabei polynomiell in k, der Aufwand pro Knoten polynomiell in $n = |P|$ sein.

   Hinweise: Verwalten Sie in jedem Knoten des Suchbaumes k Einträge, die jeweils bis zu zwei Punkte halten können (und damit eine Gerade definieren). Ein Suchbaum der Höhe $O(k)$ genügt.

d) Zeigen Sie, dass das *line shooting* Problem *fixed parameter tractable* bezüglich k ist. Geben Sie dazu die asymptotische Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von n und k an.

Aufgabe 3 (*Kleinaufgaben: Parallele Algorithmen*)

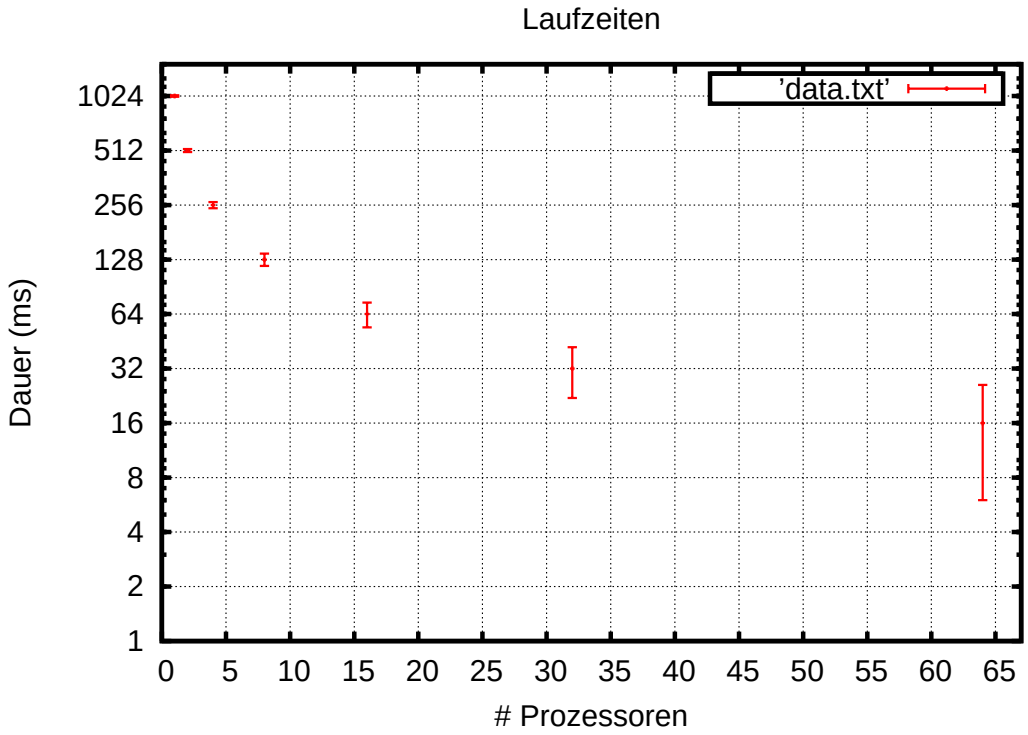
a) Gegeben sei ein paralleler vergleichsbasierter Sortieralgorithmus zum Sortieren von n komplexen Objekten auf p Prozessoren mit einer Laufzeit von

$$T(p) := \Theta(\frac{n^2 \log^2 n}{p^2}).$$

Geben Sie den absoluten *speed-up* und die *efficiency* an.

b) Wie muss in der vorherigen Teilaufgabe die Prozessorzahl p mit der Eingabegröße n wachsen, damit der absolute *speed-up* konstant bleibt?

c) Sie haben für einen parallelen Algorithmus folgende Laufzeiten bei unterschiedlicher Prozessorzahl gemessen. Was können Sie über die Skalierung dieses Algorithmus aussagen?



Aufgabe 4 (*Entwurf+Analyse:* `findif`-*Anweisung*)

Gegeben sei ein Array $a[\cdot]$ im verteilten Speicher der n Objekte hält. Gesucht ist ein Algorithmus, der eine parallele `findif` Anweisung auf $a[\cdot]$ ausführt. Die Anweisung sortiert die Elemente von $a[\cdot]$ anhand eines Prädikats $pred(\cdot)$, so dass Elemente, die das Prädikat erfüllen, vorne stehen. Die relative Ordnung der Elemente untereinander soll dabei erhalten bleiben.

Bsp.: `findif( {1,4,9,7,3},` *is_bigger_than_3* `) = {4,9,7,1,3}`

a) Beschreiben Sie einen Algorithmus, der eine parallele `findif` Anweisung auf $a[\cdot]$ möglichst schnell ausführt. Sie haben $p = n$ Prozessoren zur Verfügung.

b) Untersuchen Sie die Laufzeit der Anweisung für den Fall, dass $p = n$ Prozessoren zur Verfügung stehen und das Prädikat in $T(n) = O(1),\ O(\log n)$ bzw. $O(n)$ ausgewertet werden kann.

c) Wie verhalten sich die Laufzeiten, wenn Sie nur noch $p < n$ Prozessoren zur Verfügung haben?

Aufgabe 5 (*Entwurf+Analyse: Assoziative Operationen*)

Gegeben sei ein Array A im gemeinsamen Speicher bestehend aus n Objekten vom Typ X. Auf den Objekten sei ein Operator $\odot$ definiert. Es wird nach dem Ergebnis von $\bigodot_{i=1}^{n} a_i$ gesucht.

a) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und der Operator definiert als

$$(x_1, x_2) \odot (y_1, y_2) := (x_1 y_1, x_2 + y_2)$$

Zeigen Sie, dass der Operator $\odot$ assoziativ ist.

b) Beschreiben Sie einen schnellen parallelen Algorithmus, der $\bigodot_{i=1}^{n} a_i$ berechnet, und geben Sie dessen Laufzeit $T(n, p)$ an.

c) Nun sei $\odot$ wie folgt definiert: Sei X das Alphabet $\{(,)\}$ und X^* die Menge aller möglichen Zeichenketten über X. Die Operation $x \odot y$ für $x, y \in X^*$ verknüpfe beide Zeichenketten und schiebe alle öffnenden Klammern nach links, alle schließenden Klammern nach rechts (Bsp.: $()(() \odot (()) = ((((()))))$.

Können Sie den selben Lösungsansatz wie in der vorherigen Teilaufgabe verwenden? Falls nein, geben Sie einen neuen parallelen Algorithmus an. Wie lange dauert die Ausführung?

Aufgabe 6 (*Analyse: Externer Stack*)

In der Vorlesung wurde eine Implementierung von *Stack* als externe Datenstruktur vorgestellt. Eine äquivalente Implementierung besitzt folgende Struktur: Im Speicher wird ein Puffer P der Größe $2B$ gehalten – B sei die Blockgröße beim Zugriff auf externen Speicher. Der Puffer ist in Form eines (internen) Stacks organisiert und enthält die neuesten gespeicherten Elemente. Folgende Operationen sind für die externe Datenstruktur definiert:

`pop` Falls P nicht leer, entferne das neueste Element aus P. Ansonsten, lese einen Block ein, um die Hälfte von P zu füllen bevor `pop` auf P ausgeführt wird.

`push` Falls P nicht voll, füge das neue Element direkt zu P. Ansonsten, schreibe die ältere Hälfte von P in den externen Speicher und verschiebe die aktuellere Hälfte an diese Stelle im Speicher. Anschließend führe ein `push` auf P aus.

Für die Analyse können Sie davon ausgehen, dass ein Block B Elemente des Stacks halten kann.

a) Zeigen Sie, dass die Operationen `push` und `pop` amortisiert $O(1/B)$ I/O-Operationen benötigen.

b) Warum genügt es nicht, nur einen Puffer mit Größe B zu verwenden?

Aufgabe 7 (*Entwurf+Analyse: Telekommunikationsgesellschaft*)

Eine Telekommunikationsgesellschaft beauftragt Sie eine Anwendung zu schreiben, die monatlich die k Kunden bestimmt, bei denen sich die Rechnung im Vergleich zum Vormonat am meisten verändert hat. Diese Kunden will sich die Telekommunikationsgesellschaft noch einmal genau anschauen, um ihnen eventuell einen neuen Vertrag anzubieten.
Die zu bearbeitenden Daten werden Ihnen auf (langsamen) Bandspeichern zur Verfügung gestellt. Sie erhalten eine Liste mit den aneinandergefügten Datensätzen jeder Zweigstelle ihres Auftraggebers für den aktuellen Monat. Außerdem haben Sie eine entsprechende Liste für den Vormonat zur Verfügung. Gespeichert sind jeweils Tupel $(Kundennummer, Kosten)$.

a) Geben Sie einen Algorithmus an, der die geforderte Aufgabe erfüllt. Geben Sie außerdem die Laufzeit Ihres Algorithmus an und begründen Sie diese. Sie können davon ausgehen, dass die k zu bestimmenden Kunden in den Hauptspeicher passen.

b) Seien nun die k zu bestimmenden Kunden zu groß, um im Hauptspeicher gehalten zu werden. Ändern Sie Ihren Algorithmus so ab, dass er mit der erhöhten Datenmenge zurecht kommt. Geben Sie die Laufzeit Ihres neuen Algorithmus an und begründen Sie diese.

Ausgabe: 12.12.2023
Besprechung: 09.01.2024