Algorithmen II

Peter Sanders

Übungen:

Moritz Laupichler, Nikolai Maas

Institut für Theoretische Informatik

Web:

`algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php`

8 Approximationsalgorithmen

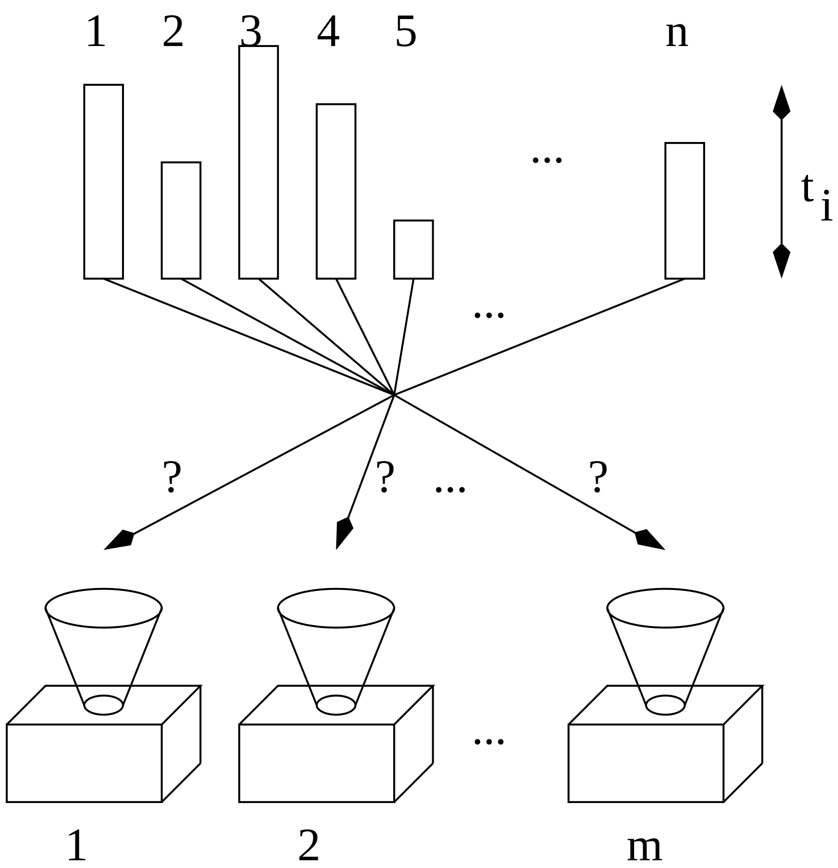
Eine Möglichkeit zum Umgang mit NP-harten Problemen

Beobachtung: Fast alle interessanten Optimierungsprobleme sind NP-hart

Auswege:

- Trotzdem optimale Lösungen suchen und riskieren, dass der Algorithmus nicht fertig wird
- Ad-hoc Heuristiken. Man kriegt eine Lösung aber wie gut ist die?
- Approximationsalgorithmen:
  Polynomielle Ausführungszeit.
  Lösungen garantiert "‘nah"’ am Optimum.
- Problem umdefinieren/spezialisieren

Scheduling unabhängiger gewichteter Jobs auf parallelen Machinen



$\mathbf{x}(j)$: Maschine auf der

Job j ausgeführt wird

L_i: $\sum_{\mathbf{x}(j)=i} t_j$, Last

von Maschine i

Zielfunktion: Minimiere Makespan

$$L_{\max} = \max_i L_i$$

Details: Identische Machinen, unabhängige Jobs, bekannte Ausführungszeiten, offline

List Scheduling

ListScheduling(n, m, $\mathbf{t}$)

J := $\{1,\ldots,n\}$

array $L[1..m] = [0,\ldots,0]$

while $J \neq \emptyset$ **do**

pick any $j \in J$

J := $J \setminus \{j\}$

// Shortest Queue:

pick i such that $L[i]$ is minimized

$\mathbf{x}(j)$:= i

$L[i]$:= $L[i] + t_j$

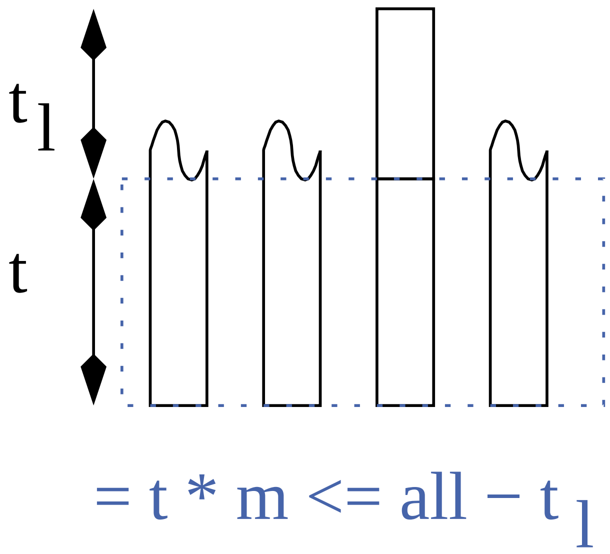
return $\mathbf{x}$

Viele Kleine Jobs

Lemma 1. *Falls ℓ der zuletzt beendete Job ist, dann*

$$L_{\max} \leq \sum_j \frac{t_j}{m} + \frac{m-1}{m} t_\ell$$

Beweis



$$L_{\max} = t + t_\ell \leq \sum_{j \neq \ell} \frac{t_j}{m} + t_\ell = \sum_j \frac{t_j}{m} + \frac{m-1}{m} t_\ell$$

Untere Schranken

Lemma 2. $L_{\max} \geq \sum_j \frac{t_j}{m}$

Lemma 3. $L_{\max} \geq \max_j t_j$

Der Approximationsfaktor

Definition:

Ein Minimierungsalgorithmus erzielt Approximationsfaktor ρ bezüglich Zielfunktion f falls er für alle Eingaben I, eine Lösung $\mathbf{x}(I)$ findet, so dass

$$\frac{f(\mathbf{x}(I))}{f(\mathbf{x}^*(I))} \leq \rho$$

wobei $\mathbf{x}^*(I)$ die optimale Lösung für Eingabe I bezeichnet.

Satz: ListScheduling erzielt Approximationsfaktor $2 - \frac{1}{m}$.

Beweis:

$$\frac{f(\mathbf{x})}{f(\mathbf{x}^*)}$$

$$\leq \frac{\sum_j t_j/m}{f(\mathbf{x}^*)} + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{t_\ell}{f(\mathbf{x}^*)}$$

$$\leq 1 + \frac{m-1}{m} \cdot \frac{t_\ell}{f(\mathbf{x}^*)}$$

$$\leq 1 + \frac{m-1}{m} = 2 - \frac{1}{m}$$

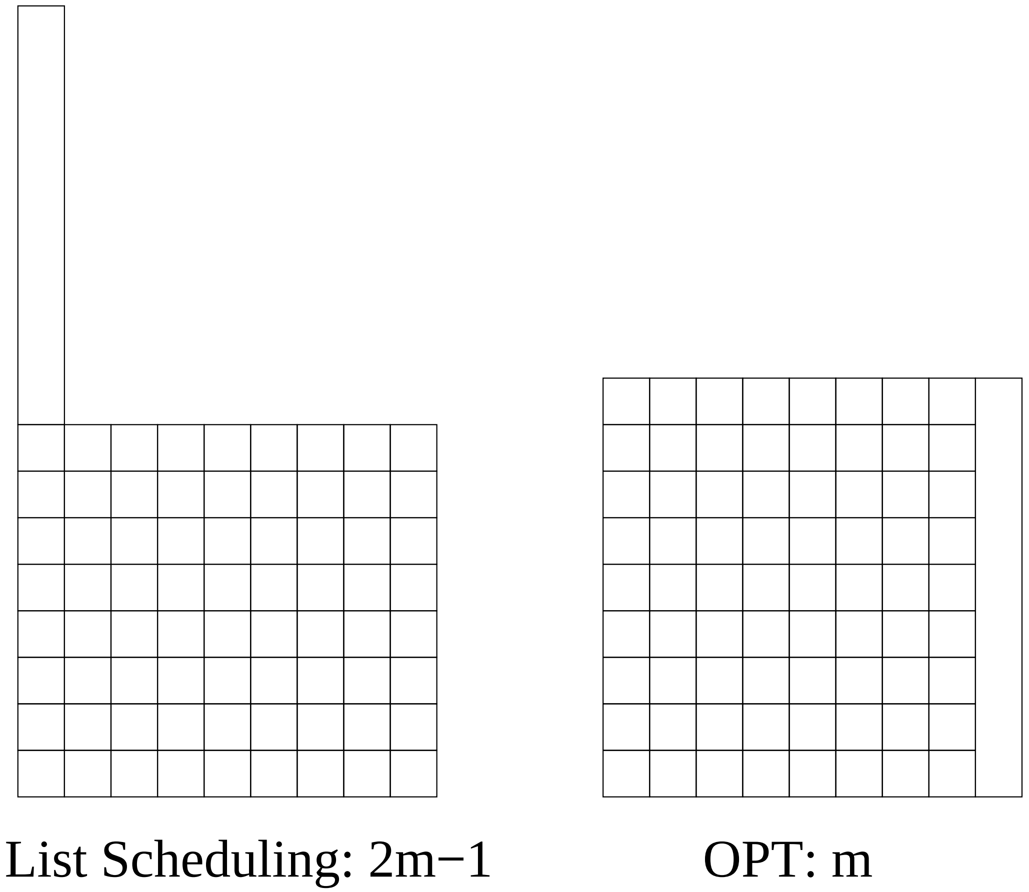
Lemma 1: $L_{\max} \leq \sum_j \frac{t_j}{m} + \frac{m-1}{m} t_\ell$

Lemma 2: $L_{\max} \geq \sum_j \frac{t_j}{m}$

Lemma 3: $L_{\max} \geq \max_j t_j \geq t_\ell$

Diese Schranke is bestmöglich

Eingabe: $m(m-1)$ Jobs der Größe 1 und ein Job der Größe m.

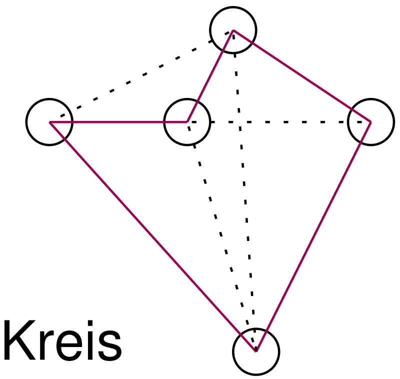


Also ist der Approximationsfaktor $\geq 2-1/m$.

Mehr zu Scheduling (siehe Approx-Vorlesung)

- $4/3$-Approximation: Sortiere die Jobs nach absteigender Größe. Dann List-Scheduling. Zeit $\mathrm{O}(n \log n)$.
- Schnelle $7/6$ Approximation: Rate Makespan (binäre Suche). Dann Best Fit Decreasing.
- PTAS ... später ...
- Uniform machines: Maschine i hat Geschwindigkeit v_i job j braucht Zeit t_j/v_i auf Maschine j. $\rightsquigarrow$ relative einfache Verallgemeinerung
- Unrelated Machines Job j braucht Zeit t_{ji} auf Maschine j. 2-Approximation. Ganz anderer Algorithmus.
- uvam: Andere Zielfunktionen, Reihenfolgebeschränkungen, ...

Nichtapproximierbarkeit des Handlungsreisendenproblems (TSP)



Gegeben ein Graph $G = (V, V \times V)$, finde einen einfachen Kreis $C = (v_1, v_2, \ldots, v_n, v_1)$ so dass $n = |V|$ und $\sum_{(u,v) \in C} d(u,v)$ minimiert wird.

Satz: Es ist NP-hart das TSP innerhalb irgendeines Faktors a zu approximieren.

Beweisansatz: Es genügt zu zeigen, dass

HamiltonCycle$\leq_p$ a-Approximation von TSP

a-Approximation von TSP

Gegeben:

Graph $G = (V, V \times V)$ mit Kantengewichten $d(u,v)$,

Parameter W.

Gesucht ist ein Algorithmus, mit folgenden Eigenschaften:

$[G,W]$ wird akzeptiert $\longrightarrow \exists$ Tour mit Gewicht $\leq aW$.

$[G,W]$ wird abgelehnt $\longrightarrow \nexists$ Tour mit Gewicht $\leq W$.

HamiltonCycle$\leq_p$ a-Approximation von TSP

Sei $G = (V, E)$ beliebiger ungerichteter Graph.

Definiere $d(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{falls } (u, v) \in E \\ 1 + an & \text{sonst} \end{cases}$

Dann und nur dann, wenn G einen Hamiltonkreis hat gilt

$\exists$ TSP Tour mit Kosten n

(sonst optimale Kosten $\geq (n-1) \cdot 1 + (an+1) = an + n > an$)

Entscheidungsalgorithmus für Hamiltonkreis:

Führe a-approx TSP auf $[G, n]$ aus.

Wird akzeptiert

$\longrightarrow \exists$ Tour mit Gewicht $\leq an$

$\longrightarrow \exists$ Tour mit Gewicht $n \longrightarrow \exists$ Hamiltonpfad

sonst $\nexists$ Hamiltonpfad

TSP mit Dreiecksungleichung

G (ungerichtet) erfüllt die Dreiecksungleichung

$\forall u, v, w \in V : d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$

Satz: für solche Graphen gibt es einen 2-Approximationsalgorithmus

Metrische Vervollständigung

Betrachte beliebigen unger. Graph $G = (V,E)$ mit Gewichtsfunktion $c : E \to \mathbb{R}_+$. Definiere

$d(u,v) :=$ Länge des kürzesten Pfades von u nach v

Beispiel: (ungerichteter) Strassengraph $\longrightarrow$ Abstandstabelle

Euler-Touren/-Kreise

Betrachte beliebigen zusammenhängenden ungerichteten (Multi-)Graph $G=(V,E)$ mit $|E|=m$.

Ein Pfad $P=\langle e_1,\ldots,e_m\rangle$ ist ein Euler-Kreis falls $\{e_1,\ldots,e_m\}=E$.

(Jede Kante wird genau einmal besucht)

Satz: G hat Euler-Kreis gdw. G ist zusammenhängend und $\forall v\in V$:Grad(v) ist gerade.

Euler-Kreise lassen sich in Zeit $\mathrm{O}(|E|+|V|)$ finden.

2-Approximation durch minimalen Spannbaum

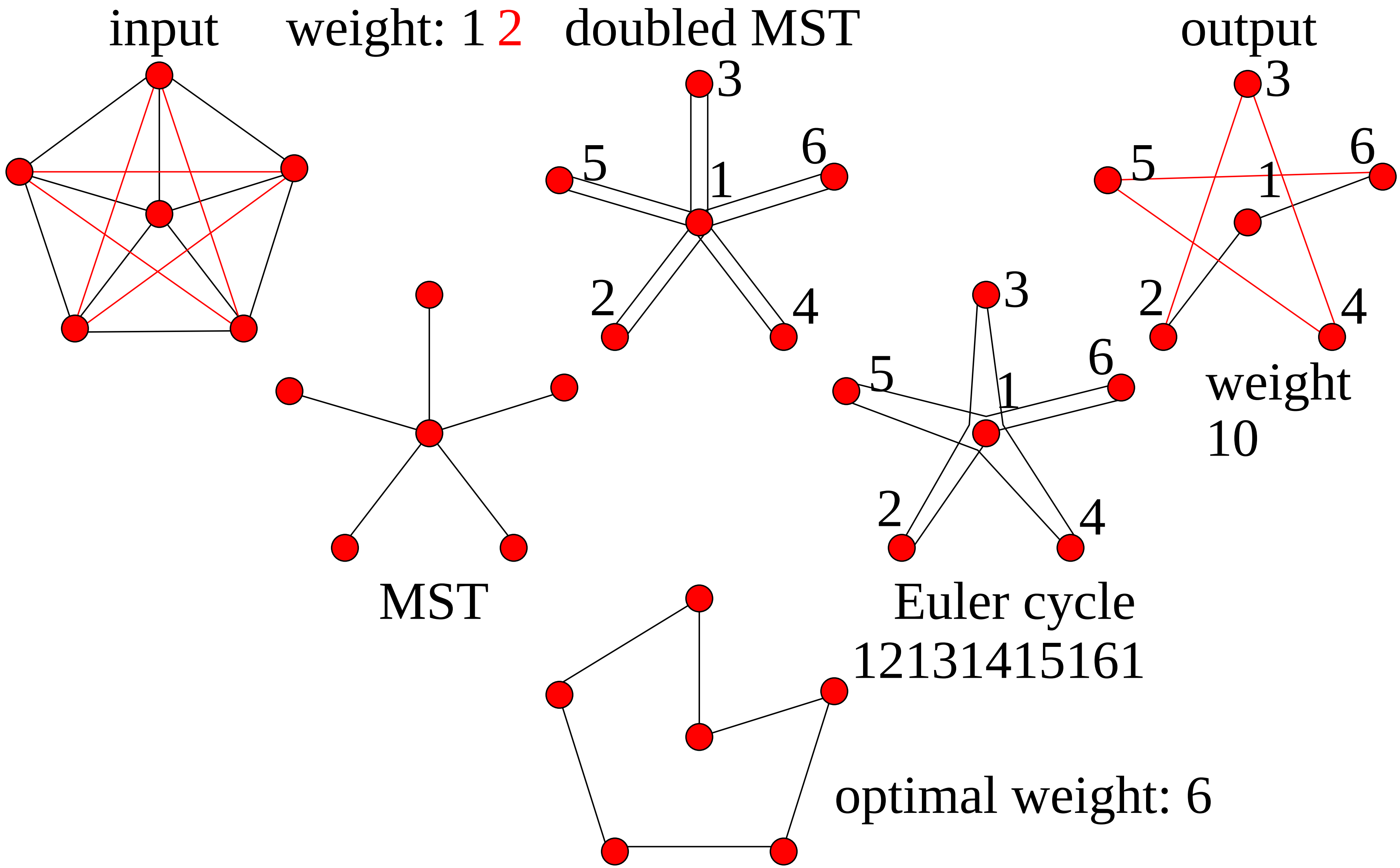
Lemma 4.

Gesamtgewicht eines MST $\leq$
Gesamtgewicht jeder TSP-Tour

Algorithmus:

T:= MST(G) // weight(T) $\leq$opt
T':= T with every edge doubled // weight(T') $\leq$2opt
T'':= EulerKreis(T') // weight(T'') $\leq$ 2opt
output removeDuplicates(T'') // shortcutting

Beispiel


input
weight: 1 2
doubled MST
3
5
6
1
2
4
output
3
5
6
1
2
4
weight
10
MST
3
5
6
1
2
4
Euler cycle
12131415161
optimal weight: 6

Beweis von Gewicht MST$\leq$ Gewicht TSP-Tour

Sei T die optimale TSP tour

entferne eine Kante macht T leichter

nun ist T ein Spannbaum

der nicht leichter sein kann als der

MST ■

Allgemeine Technik: Relaxation

hier: ein TSP-Pfad ist ein Spezialfall eines Spannbaums

Mehr TSP I

- Praktisch bessere 2-Approximationen, z.B. lightest edge first
- Relativ einfache aber unpraktische 3/2-Approximation (MST$+$min. weight perfect matching$+$Euler-Kreis) Christofides76
- $3/2 - 10^{36}$ approximation KarlinKleinGharan21
- 117/116 Approximation ist NP-hart
- 1.4 Approximation wenn Abstände kürzeste Wege in einem ungewichteten Graphen sind.
- PTAS für Euklidisches TSP

Mehr TSP II

- Versuchskanichen für praktisch jede Optimierungsheuristik
- Optimale Lösungen für praktische Eingaben. Faustregel:
  Falls es in den Speicher passt, läßt sichs lösen.
  [http://www.tsp.gatech.edu/concorde.html]
  sechsstellige Anzahl Codezeilen.
- TSP-artige Anwendungen sind meist komplizierter

Pseudopolynomielle Algorithmen

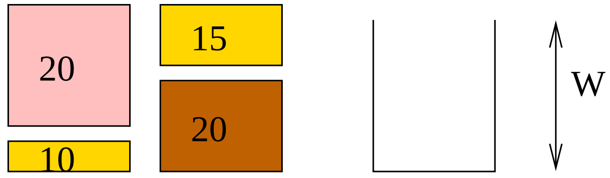
$\mathscr{A}$ ist pseudopolynomieller Algorithmus falls

$$\mathrm{Time}_{\mathscr{A}}(n) \in \mathbf{P}(n)$$

wobei n die Anzahl Eingabebits ist,

wenn alle Zahlen unär codiert werden ($k \equiv 1^k$).

Beispiel Rucksackproblem



- n Gegenstände mit Gewicht $w_i \in \mathbb{N}$ und profit p_i

  oBdA: $\forall i \in 1..n : w_i \leq W$
- Wähle eine Teilmenge $\mathbf{x}$ von Gegenständen
- so dass $\sum_{i \in \mathbf{x}} w_i \leq W$ und
- maximiere den Profit $\sum_{i \in \mathbf{x}} p_i$

Dynamische Programmierung nach Profit

$C(i,P)$:= kleinste Kapazität für Gegenstände $1,\ldots,i$ die Profit $\geq P$ ergeben.

Lemma 5.

$$\forall 1 \leq i \leq n : C(i,P) = \min(C(i-1,P), \\ C(i-1,P-p_i)+w_i)$$

Dynamische Prgrammierung nach Profit

Sei $\hat{P}$ obere Schranke für den Profit (z.B. $\sum_i p_i$).

Zeit: $\mathrm{O}\left(n\hat{P}\right)$ pseudo-polynomiell

z.B. $0..n \times 0..\hat{P}$ Tabelle $C(i,P)$ spaltenweise ausfüllen

Platz: $\hat{P} + \mathrm{O}(n)$ Maschinenworte plus $\hat{P}n$ bits.

Fully Polynomial Time Approximation Scheme

Algorithm $\mathscr{A}$ ist ein

(Fully) Polynomial Time Approximation Scheme

für $\begin{matrix}\text{minimization}\\ \text{maximization}\end{matrix}$ Problem Π falls:

Eingabe: Instanz I, Fehlerparameter ε

Ausgabequalität: $f(\mathbf{x}) \begin{matrix}\leq\\ \geq\end{matrix} (\begin{matrix}1+\varepsilon\\ 1-\varepsilon\end{matrix})\text{opt}$

Zeit: Polynomiell in $|I|$ (und $1/\varepsilon$)

Beispielschranken

PTAS	FPTAS
$n+2^{1/\varepsilon}$	$n^2+\frac{1}{\varepsilon}$
$n^{\log\frac{1}{\varepsilon}}$	$n+\frac{1}{\varepsilon^4}$
$n^{\frac{1}{\varepsilon}}$	n/ε
n^{42/ε^3}	$\vdots$
$n+2^{2^{1000/\varepsilon}}$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$

FPTAS für Knapsack

P:= $\max_i p_i$ // maximaler Einzelprofit

$K := \dfrac{\varepsilon P}{n}$ // Skalierungsfaktor

$p'_i := \left\lfloor \frac{p_i}{K} \right\rfloor \leq \frac{n}{\varepsilon}$ // skaliere Profite

$\mathbf{x}' :=$ dynamicProgrammingByProfit$(\mathbf{p}', \mathbf{w}, C)$

gib $\mathbf{x}'$ aus

Lemma 6. $\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}' \geq (1-\varepsilon)\mathrm{opt}$.

Proof. Betrachte die optimale Lösung $\mathbf{x}^*$.

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* - K\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}^* = \sum_{i\in\mathbf{x}^*}\left(p_i - K\left\lfloor\frac{p_i}{K}\right\rfloor\right)$$

$$\leq \sum_{i\in\mathbf{x}^*}\left(p_i - K\left(\frac{p_i}{K}-1\right)\right) = |x^*|K \leq nK,$$

also, $K\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}^* \geq \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* - nK$. Weiterhin,

$$K\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}^* \leq K\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}' = \sum_{i\in x'} K\left\lfloor\frac{p_i}{K}\right\rfloor \leq \sum_{i\in x'} K\frac{p_i}{K} = \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}'.$$ Also,

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}' \geq K\mathbf{p}'\cdot\mathbf{x}^* \geq \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}^* - nK = \mathrm{opt} - \varepsilon\underbrace{P}_{\leq\mathrm{opt}} \geq (1-\varepsilon)\mathrm{opt}$$

$\square$

Lemma 7. *Laufzeit* $O\left(n^3/\varepsilon\right)$.

Proof. Die Laufzeit $O\left(n\hat{P}'\right)$ der dynamischen Programmierung dominiert:

$$n\hat{P}' \leq n \cdot (n \cdot \max_{i=1}^{n} p_i') = n^2 \left\lfloor \frac{P}{K} \right\rfloor = n^2 \left\lfloor \frac{Pn}{\varepsilon P} \right\rfloor \leq \frac{n^3}{\varepsilon}.$$

□

Das beste bekannte FPTAS

[Kellerer, Pferschy 04]

$$\mathrm{O}\left(\min\left\{n\log\frac{1}{\varepsilon}+\frac{\log^2\frac{1}{\varepsilon}}{\varepsilon^3},\ldots\right\}\right)$$

- Weniger buckets C_j (nichtuniform)
- Ausgefeilte dynamische Programmierung

Optimale Algorithmem für das Rucksackproblem

Annähernd Linearzeit für fast alle Eingaben! In Theorie und Praxis.

[Beier, Vöcking, An Experimental Study of Random Knapsack Problems, European Symposium on Algorithms, 2004.]

[Kellerer, Pferschy, Pisinger, Knapsack Problems, Springer 2004.]