Algorithmen II

Peter Sanders

Übungen:

Moritz Laupichler, Nikolai Maas

Institut für Theoretische Informatik

Web:

`algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php`

9 Fixed-Parameter-Algorithmen

Praktische Beobachtung: Auch bei NP-harten Problemen können wir u.U. exakte Lösungen finden:

...für einfache Instanzen.

Wie charakterisiert man Einfachheit ?

Durch einen weiteren Parameter k (neben der Eingabegröße)

Beispiel: $k =$ Ausgabegröße

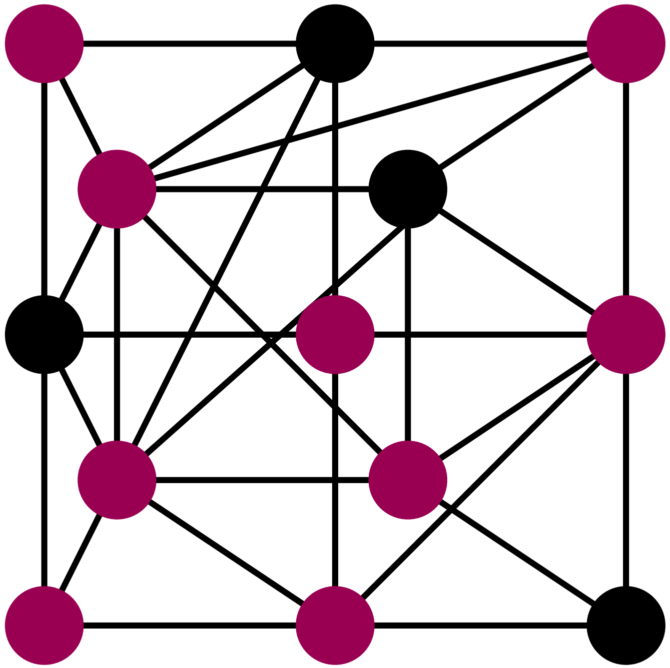
[Niedermeier, Invitation to Fixed Parameter Algorithms, Oxford U. Press, 2006]

Beispiel: VERTEX COVER (Knotenüberdeckung)

Gegeben: ungerichteter Graph $G = (V, E)$,

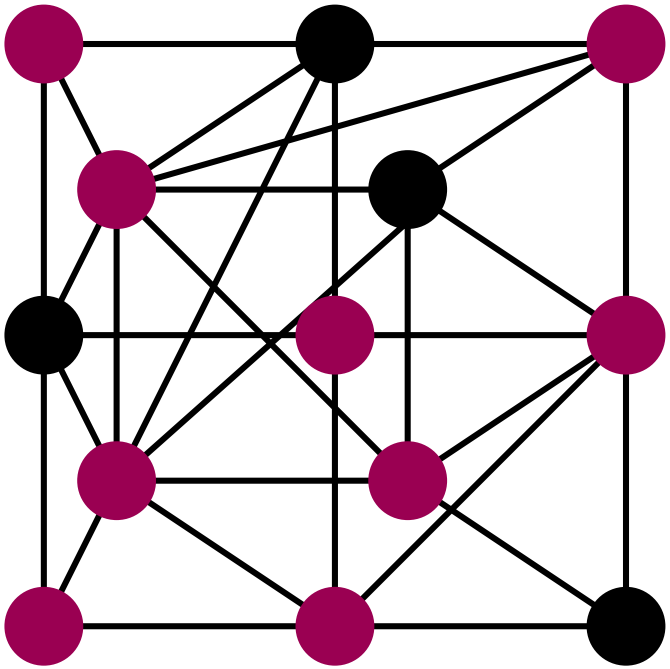
Parameter $k \in \mathbb{N}$.

Frage: $\exists V' \subseteq V : |V'| = k \wedge \forall \{u, v\} \in E : u \in V' \vee v \in V'$



VERTEX COVER Grundlegendes

- Eines der (21) klassischen NP-harten Probleme
- Trivialer $\mathrm{O}\left(n^{k+1}\right)$ Brute-Force-Algorithmus
- Äquivalent zu max. independent set (Komplement)



Fixed parameter tractable

Eine formale Sprache $L \in$ FPT bzgl. Parameter $k \Leftrightarrow$

$\exists$ Algorithmus mit Laufzeit $\mathrm{O}(f(k) \cdot p(n))$,

f berechenbare Funktion, nicht von n abhängig,

p Polynom, nicht von k abhängig.

Beispiele: $2^k n^2$, $k^{k!} n^{333}$, $n + 1.1^k$

Gegenbeispiele: n^k, $n^{\log\log k}$

Beispiel: VERTEX COVER

Satz: Vertex Cover ist in FPT bzgl. des Parameters Ausgabekomplexität

Wir entwickeln Algorithmen mittels zweier auch praktisch wichtiger Entwurfstechniken:

1. Kernbildung: (Kernelization) Reduktionsregeln reduzieren Problem auf Größe $\mathrm{O}(f(k))$
2. Systematische Suche mit beschränkter Tiefe.

Naive tiefenbeschränkte Suche

Function vertexCover$(G=(V,E),k)$: Boolean

  if $|E|=0$ **then return** true

  if $k=0$ **then return** false

  pick any edge $\{u,v\}\in E$

  return vertexCover$(G-v,k-1)\vee$

    vertexCover$(G-u,k-1)$

Operation $G-v$ removes node v and its incident edges

Naive tiefenbeschränkte Suche – Korrektheit

Function vertexCover$(G=(V,E),k)$: Boolean

  if $|E|=0$ **then return** true // triviales Problem

  if $k=0$ **then return** false // unmögliches Problem

  pick any edge $\{u,v\}\in E$ // u oder v müssen im cover sein !

  //Fallunterscheidung:

  return vertexCover$(G-v,k-1)\vee$ // Fall v in cover

    vertexCover$(G-u,k-1)$ // Fall u in cover

Naive tiefenbeschränkte Suche – Laufzeit

Function vertexCover$(G = (V, E), k)$: Boolean

- **if** $|E| = 0$ **then return** true // $\mathrm{O}(1)$
- **if** $k = 0$ **then return** false // $\mathrm{O}(1)$
- pick any edge $\{u, v\} \in E$ // $\mathrm{O}(1)$
- **return** vertexCover$(G - v, k - 1) \vee$ // $\mathrm{O}(n + m) + T(k - 1)$
  vertexCover$(G - u, k - 1)$ // $T(k - 1)$

Rekursionstiefe $k \rightsquigarrow \mathrm{O}(2^k)$ rekursive Aufrufe also
Laufzeit $\mathrm{O}(2^k(n + m))$.

Formaler: Lösung der Rekurrenz $T(k) = (n + m) + 2T(k - 1)$

Kernbildung für Vertex Cover

[Buss 1993]

Beobachtung: $\forall v \in V$: degree$(v) > k \Longrightarrow v \in$ Lösung $\vee$ unlösbar

Function kernelVertexCover$(G = (V, E), k)$: Boolean

 if $|E| = 0$ **then return** true

 while $\exists v \in V$: degree$(v) > k$ **do**

  if $k = 0$ **then return** false

  $G := G - v$

  $k := k - 1$

 remove isolated nodes

 if $|E| > k^2$ **then return** false

 return vertexCover(G, k)

Kernbildung für Vertex Cover – Korrektheit

Beobachtung: $\forall v \in V$: degree$(v) > k \Longrightarrow v \in$ Lösung $\vee$ unlösbar

Function kernelVertexCover$(G = (V, E), k)$: Boolean

    if $|E| = 0$ **then return** true
    while $\exists v \in V$: degree$(v) > k$ **do** // siehe Beobachtung
        if $k = 0$ **then return** false // $m > k = 0$!
        $G := G - v$ // v muss in die Lösung!
        $k := k - 1$
    remove isolated nodes // nutzlose Knoten
    if $|E| > k^2$ **then return** false // $\leq k$ nodes $\times \leq k$ neighbors
    return vertexCover(G, k)

Kernbildung für Vertex Cover – Laufzeit

Function kernelVertexCover$(G = (V, E), k)$: Boolean
  if $|E| = 0$ **then return** true
  while $\exists v \in V$: degree$(v) > k$ **do** // $\leq k\times$
    if $k = 0$ **then return** false // $m \geq k > 0$!
    $G{:=}\, G - v$// v muss in die Lösung! // $\mathrm{O}(n+m)$
    $k{:=}\, k-1$
  remove isolated nodes // nutzlose Knoten
  //Insgesamt $\mathrm{O}((n+m)k)$
  if $|E| > k^2$ **then return** false // $\leq k$ nodes $\times \leq k$ neighbors
  return vertexCover(G, k) // $\mathrm{O}(2^k k^2)$

Insgesamt $\mathrm{O}\left((n+m)k + 2^k k^2\right)$ Aufgabe: $\mathrm{O}\left(n+m+2^k k^2\right)$

Kernbildung für Vertex Cover – Beispiel

Function kernelVertexCover$(G=(V,E),k)$: Boolean

  if $|E|=0$ **then return** true

  while $\exists v\in V$: degree$(v)>k$ **do**

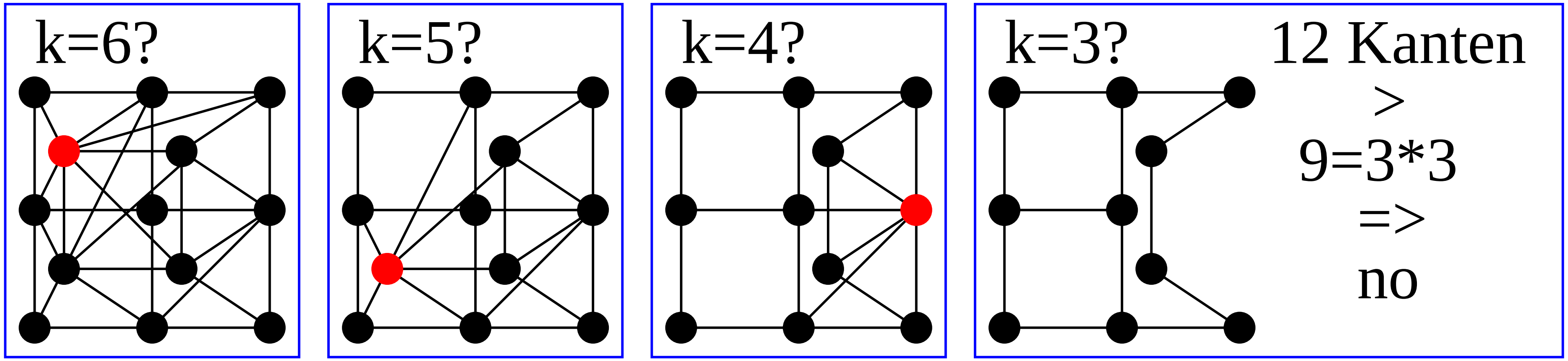
    if $k=0$ **return** false

    $G{:=}\,G-v;\quad k{:=}\,k-1$

  remove isolated nodes

  if $|E|>k^2$ **then return** false

  return vertexCover(G,k)



Reduktionsregeln

0: nicht im cover

1: OBdA Nachbar im cover

Aufgabe: vertex cover für Bäume?

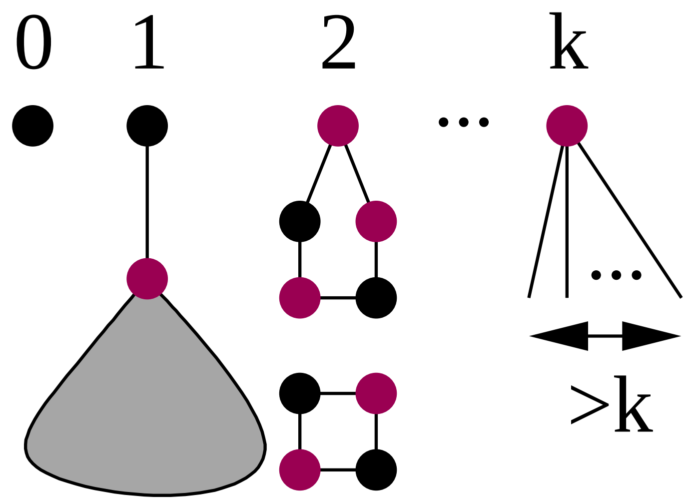
2: geht auch aber komplizierter. Aber,

trivial wenn alle Knoten Grad zwei haben

“Nimm jeden zweiten Knoten”

$> k$: muss ins cover

Mehr Regeln ?



Verbesserte tiefenbeschränkte Suche

Function vertexCover2$(G=(V,E),k)$: Boolean

  if $|E|=0$ **then return** true // $O(1)$

  if $k=0$ **then return** false // $O(1)$

  if $\exists v\in V$: degree$(v)=1$ **then**

    return vertexCover2$(G-$neighbor$(v),k-1)$

  if $\exists v\in V$: degree$(v)\geq 3$ **then**

    return vertexCover2$(G-v,k-1)\vee$

      vertexCover2$(G-\mathcal{N}(v),k-|\mathcal{N}(v)|)$

  assert all nodes have degree 2

  return vertexCoverCollectionOfCycles(G,k)

Analyse: Lösung der Rekurrenz

$$T(k)=(n+m)+T(k-1)+T(k-3)=O\left((n+m)1.4656^k\right)$$

$\rightsquigarrow$ benutze erzeugende Funktionen

Weitere Verbesserungen

- Kerne der Größe $2k$ (mittels Matching-Algorithmen)
- Reduziere Zeit pro rekursivem Aufruf auf $\mathrm{O}(1)$
- Detaillierte Fallunterscheidungen $\rightsquigarrow$

  kleinere Konstante im exponentiellen Teil

$$\rightsquigarrow \mathrm{O}\left(1.2738^k + kn\right)$$

[Chen Kanj Xia 2006]

Zusammenfassung

- Wichtige Teilklassen NP-harter Probleme können polynomiell lösbar sein
- Kernbildung is wichtige Vor/Zwischenverarbeitungsstrategie für Optimierungsprobleme – auch polynomiell lösbare. Zum Beispiel Max-Cardinality matching.
- Brute-force Algorithmen weniger brute-force machen bringt beweisbar exponentielle Beschleunigung. $\rightsquigarrow$ nichttriviale Analyse- und Entwurfs-Techniken