Karlsruher Institut für Technologie

Übung 2 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Nikolai Maas – *{moritz.laupichler, nikolai.maas}@kit.edu*
`https://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithm Engineering

Inhalt

Themenübersicht für heute

- Ganzzahlige *Priority Queues*
  - *Bucket Queues*
  - *Radix Heaps*
- Bidirektionale Suche
- A*-Suche
- All-to-All Suche

Spezielle *Priority Queues*
monoton, ganzzahlig

Warum das Ganze?

- spezialisierte Datenstruktur $\longrightarrow$ schneller
- Dijkstras Algorithmus

Idee

- speichere Schlüssel in *Buckets* statt Bäumen

Spezielle *Priority Queues*
Dijkstras Algorithmus

Laufzeit Dijkstras Algorithmus

- $T_{Dijkstra} = O(m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot (T_{deleteMin} + T_{insert}))$

amortisierte Laufzeiten

$O(\cdot)$	*Bin. Heap*	*Fib. Heap*	*Bkt. Queue*	*Radix Heap*
$T_{decreaseKey}$	$\log n$	1	1	1
T_{insert}	$\log n$	1	1	$\log C$
$T_{deleteMin}$	$\log n$	$\log n$	C	$\log C$
$T_{Dijkstra}$	$(m+n)\log n$	$m + n \log n$	$m + nC$	$m + n \log C$

Spezielle *Priority Queues*

monoton, ganzzahlig

Bedingungen

- positive, ganzzahlige Schlüssel
- neue/geänderte Schlüssel $k \geq$ minimaler Schlüssel *min*
- maximales Schlüsselinkrement $C \longrightarrow \mathit{min} \leq k \leq \mathit{min} + C$

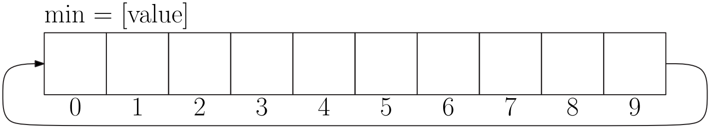
Bucket Queues

Aufbau:

- zirkuläre Liste aus Buckets $B[\cdot]$
- Variable mit minimalem Schlüssel *min*
  (der in die Datenstruktur aufgenommen werden kann)
- *min*: letzter `deleteMin`-Schlüssel, initialisiert mit 0

gegeben:

- max. Schlüsselinkrement $C \longrightarrow$ # Buckets $|B| = C + 1$



$$C = 9 \longrightarrow |B| = C + 1 = 10$$

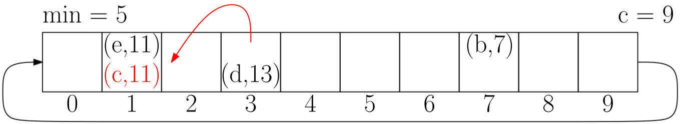
Bucket Queues

Ablauf:

`insert`:	Einfügen in Bucket $B[key \bmod (C+1)]$	$O(1)$
`deleteMin`:	Entfernen aus Bucket $B[min \bmod (C+1)]$	$O(C)$
	(bzw. aus erstem nicht-leeren Folgebucket)	
`decreaseKey`:	Verschieben von altem in neuen Bucket	$O(1)$

Beispiel:

- `insert(a,5)`
- `insert(b,7)`
- `deleteMin()`
- `insert(c,13)`
- `insert(d,13)`
- `insert(e,11)`
- `decreaseKey(c,11)`



Spezielle *Priority Queues*

Dijkstras Algorithmus

Laufzeit Dijkstras Algorithmus

- $T_{Dijkstra} = O(m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot (T_{deleteMin} + T_{insert}))$

amortisierte Laufzeiten

$O(\cdot)$	Bin. Heap	Fib. Heap	Bkt. Queue	Radix Heap
$T_{decreaseKey}$	$\log n$	1	1	1
T_{insert}	$\log n$	1	1	$\log C$
$T_{deleteMin}$	$\log n$	$\log n$	C	$\log C$
$T_{Djkstra}$	$(m + n) \log n$	$m + n \log n$	$m + nC$	$m + n \log C$

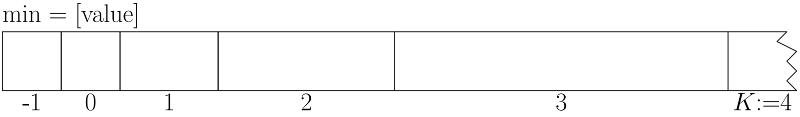
Radix Heaps

Aufbau:

- Liste aus logarithmischer Anzahl Buckets $B[\cdot]$
- Variable mit minimalem Schlüssel *min*
  (der in die Datenstruktur aufgenommen werden kann)

gegeben:

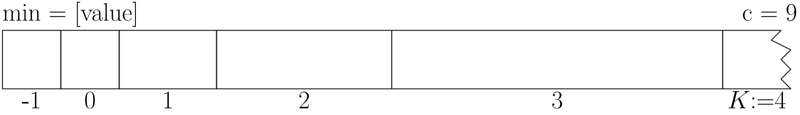
- max. Schlüsselinkrement $C \longrightarrow$ # Buckets $|B| = K + 2$
  $= (\lfloor \log C \rfloor + 1) + 2$



$$C = 9 \longrightarrow K + 2 = (\lfloor \log C \rfloor + 1) + 2 = (3 + 1) + 2 = 6$$

Institut für Theoretische Informatik
Algorithm Engineering

Radix Heaps



Welche Schlüssel kommen in welches Bucket?

Bucket i: hält Elemente mit $i = \min(\mathrm{msd}(\mathit{min}, \mathit{key}), K)$

$\rightarrow$ Bucket K ist *overflow* Bucket

$\rightarrow$ höchstwertiges unterschiedliches Bit ist i

(bzw. -1 wenn $\mathit{key} = \mathit{min}$)

$\rightarrow$ $\max(1,\ 2^i)$ verschiedene Schlüssel

$\rightarrow$ leer, wenn Bit i von *min* gesetzt

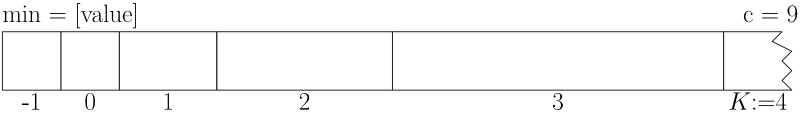
Beispiele

$\mathit{min} := \texttt{00001000}\ (\texttt{08})$

$\mathrm{msd}(\texttt{00001000},\ \texttt{01001000}) = 6$

$\mathrm{msd}(\texttt{00001000},\ \texttt{00001010}) = 1$

Radix Heaps



Welche Schlüssel kommen in welches Bucket?

	Bucket $B[\cdot]$					
min	-1	0	1	2	3	4
1000 (08)	8	9	10..11	12..15	-	16..8+C
1010 (10)	10	11	-	12..15	-	16..10+C
1111 (15)	15	-	-	-	-	16..15+C
1000100 (68)	68	69	70..71	-	72..79 ?	80..68+C ?
1000100 (68)	68	69	70..71	-	72..77 !	- !

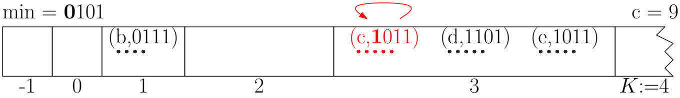
Radix Heaps

Ablauf und Laufzeiten (amortisiert):

`insert`:	Einfügen in Bucket $B[\min(\text{msd}(min, key), K)]$	$O(\log C)$
`deleteMin`:	$min =$ minimaler Schlüssel (aus Bucket i), Elemente aus Bucket i verschieben, Entfernen aus Bucket $B[-1]$	$O(\log C)$
`decreaseKey`:	Verschieben von altem in neues Bucket	$O(1)$

Beispiel:

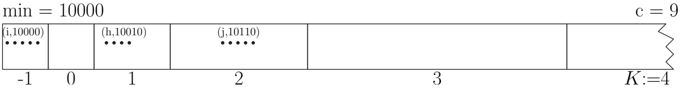
- `insert(a,5)`
- `insert(b,7)`
- `deleteMin()`
- `insert(c,13)`
- `insert(d,13)`
- `insert(e,11)`
- `decreaseKey(c,11)`



Radix Heaps

Beispiel (fortgesetzt):

- `insert(f,14)`
- `deleteMin()`
- `deleteMin()`
- `insert(g,20)`
- `deleteMin()`
- `insert(h,18)`
- `deleteMin()`
- `decreaseKey(g,16)`
- `deleteMin()`
- `deleteMin()`
- `insert(i,24)`
- `insert(j,22)`
- `decreaseKey(i,16)`



Radix Heaps

Warum komplizierte Formel $\min(\mathrm{msd}(min, key), K)$*?*

- viel anschaulicher wäre doch

$$i = \lfloor \log(key - min) \rfloor$$

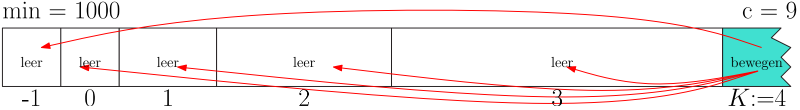
- okay, Anzahl Verschiebungen erhöht sich nicht …
- … aber, jede Änderung von *min* ändert potentiell alle Buckets
  $\rightarrow$ schlechtere Laufzeit!

Beispiel

$min := \mathtt{01000}\ (08) \xrightarrow{\text{deleteMin}} min := \mathtt{01010}\ (10)$

	Bucket $B[\cdot]$					
min	-1	0	1	2	3	4
1000 (08)	8	9	10..11	12..15	16..8+C	-
1010 (10)	10	11	12..13	14..17	18..10+C	-

Radix Heaps



Änderung von min $\longrightarrow$ *Umverteilung eines Bucket genügt*

min $:=$ 01000 (08) $\xrightarrow{\text{deleteMin}}$ *min* $:=$

01001 (09)0101$*$ (10..11)011 $**$ (12..15)$-$, *Bucket* 3 *ist leer*1 $****$ (16..)

	Bucket $B[\cdot]$					
min	-1	0	1	2	3	4
01000 (08)	8	9	10..11	12..15	-	$\geq$ 16
01001 (09)	9	-	10..11	12..15	-	$\geq$ 16
01010 (10)	10	11	-	12..15	-	$\geq$ 16
01011 (11)	11	-	-	12..15	-	$\geq$ 16
01100 (12)	12	13	14..15	-	-	$\geq$ 16
01101 (13)	13	-	14..15	-	-	$\geq$ 16
01110 (14)	14	15	-	-	-	$\geq$ 16
01111 (15)	15	-	-	-	-	$\geq$ 16
10000 (16)	16	17	-	-	-	-
10001 (17)	17	-	-	-	-	-

Spezielle *Priority Queues*
Dijkstras Algorithmus

Laufzeit Dijkstras Algorithmus

- $T_{Dijkstra} = O(m \cdot T_{decreaseKey} + n \cdot (T_{deleteMin} + T_{insert}))$

amortisierte Laufzeiten

$O(\cdot)$	*Bin. Heap*	*Fib. Heap*	*Bkt. Queue*	*Radix Heap*
$T_{decreaseKey}$	$\log n$	1	1	1
T_{insert}	$\log n$	1	1	$\log C$
$T_{deleteMin}$	$\log n$	$\log n$	C	$\log C$
$T_{Djkstra}$	$(m+n)\log n$	$m + n\log n$	$m + nC$	$m + n\log C$

Suche in Graphen

Kürzeste-Wege-Suche

Eigenschaften

- gegeben
  - Graph $G = (V, E)$
  - Kantengewichte $c(u, v) : E \to \mathbb{R}_0^+$
- betrachte Suche von Start s nach Ziel t (One-to-One Query)
  $\to$ kürzeste Distanz $\mu(s, t)$ bestimmen

Übersicht über verschiedene Varianten

- Dijkstras Algorithmus (auch One-to-All Query)
- Bellmann Ford Algorithmus (auch negative Kantengewichte)
- Bidirektionale Suche (Beschleunigungstechnik)
- A*-Suche (Heuristik)
- ...

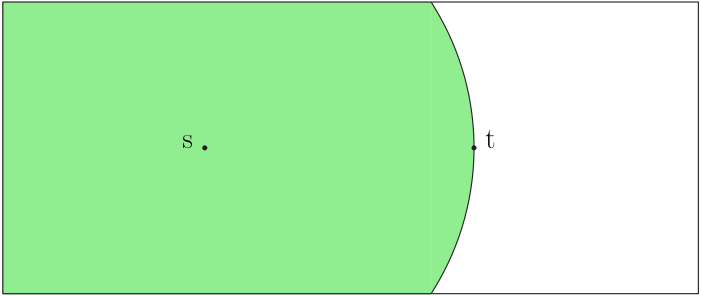
Suche in Graphen

Übersicht über verschiedene Varianten

Dijkstras Algorithmus → Bidirektionale Suche

↓ ↓

A^* Suche → Bidirektionale A^* Suche

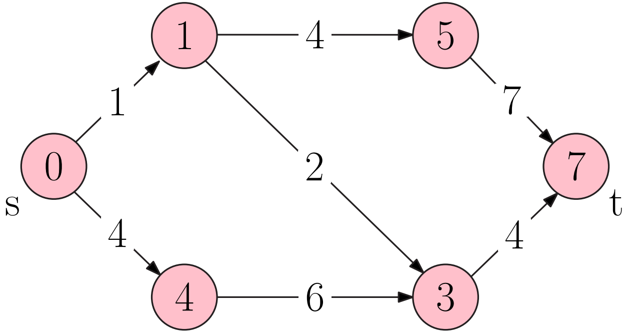


Suche in Graphen
Dijkstras Algorithmus

Einige Eigenschaften

- benötigt nicht-negative Kantengewichte
- verwaltet vorläufige Distanzen $d[\cdot]$ in *Priority Queue*
  $\rightarrow$ unterscheide *erreichte* Knoten und *gescannte* Knoten

Beispiel



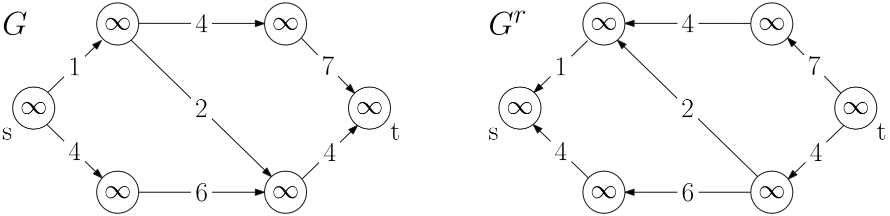
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Eigenschaften

- führt zweimal Dijkstras Algorithmus aus
  $\rightarrow$ Vorwärtssuche ($s \rightarrow t$) auf normalem Graph G,
  $\rightarrow$ Rückwärtssuche ($t \rightarrow s$) auf Rückwärtsgraph G^r

Beispiel

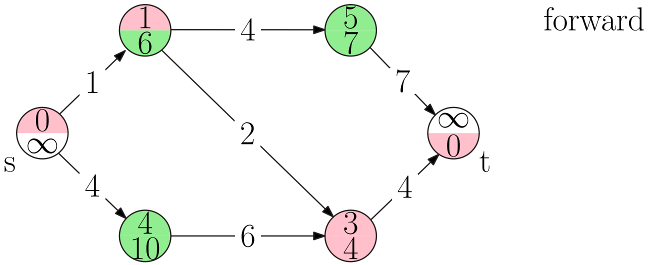


Suche in Graphen
Bidirektionale Suche

Eigenschaften (weiter)

- wechselt Suchrichtung in jedem Schritt
  (alternativ: wähle Richtung mit kleinerem `pq.min`)
- Abbruch, wenn ein Knoten in beiden Suchen gescannt wurde
  (aufpassen bei alternativer Wahl der Suchrichtung!)

Beispiel



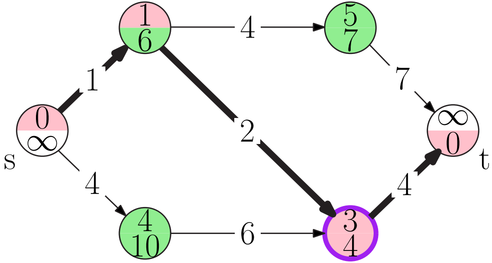
Suche in Graphen

Bidirektionale Suche

Wie wissen wir kürzeste Distanz und Weg nach Abbruch?

- wenn sich $d_{fwd}[v]$ oder $d_{bwd}[v]$ ändert,
  - aktualisiere Vorgänger u,
  - falls vorläufige kürzeste Distanz $d[s,t] > d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v]$
    $\rightarrow$ aktualisiere $d[s,t]$,
    $\rightarrow$ aktualisiere Treffpunkt v

Beispiel



forward

$d[s,t] = 7$

Suche in Graphen

A*-Suche

Eigenschaften

- zielgerichtete Suche
- benötigt Potentialfunktion $\text{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
  - reduzierte Kantengewichte $\overline{c}(u, v) := c(u, v) + \text{pot}(v) - \text{pot}(u)$ bzw.
  - modifizierte Schlüssel $\overline{d}[v] := d[v] + \text{pot}(v)$

$\rightarrow$ Abarbeitung der Knoten wird geändert (verbessert?)
$\rightarrow$ kürzeste Pfade bleiben erhalten

Suche in Graphen

A^*-Suche – Potentialfunktionen

Eigenschaften

- Potentialfunktion $\mathrm{pot}(\cdot) : V \longrightarrow \mathbb{R}$
- heuristische Funktion
  - modelliert vorhandenes Wissen über Graph
  - schätzt Distanz zum Ziel $\rightarrow \overline{d}[v]$ schätzt $\mu(s, t)$

gültige Potentialfunktion $\mathrm{pot}(\cdot)$

- untere Schranke für Distanz zum Ziel t
  $\rightarrow \mathrm{pot}(u) \leq \mu(u, t) \quad \forall u \in V$
  (beendet Suche sobald t gescannt wurde)
- nicht-negative reduzierte Kantengewichte
  $\rightarrow \overline{c}(u, v) := c(u, v) + \mathrm{pot}(v) - \mathrm{pot}(u) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in E$
  (für Dijkstras Algorithmus)

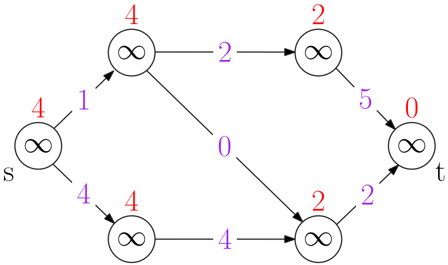
Suche in Graphen

A*-Suche – Potentialfunktionen

Woher nehmen?

- Manhattan-Distanz (nur Gittergraphen), euklidischer Abstand, ...
  (benötigt geometrische Einbettung des Graphen)
- Distanzen zu Landmarken und Dreiecksungleichung
  (funktioniert ohne Einbettung)
- Erfahrungswerte
  (z.B. Bewertung von Spielsituationen)

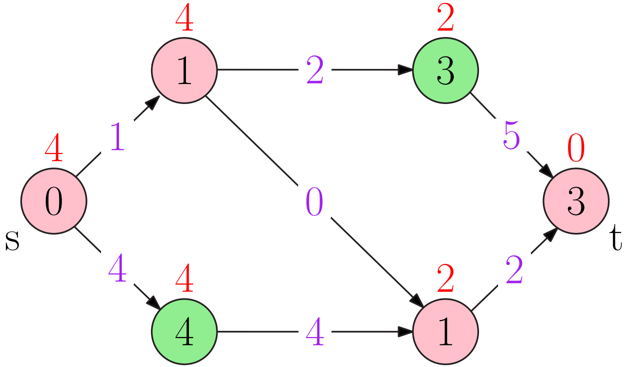
Beispiel



Suche in Graphen
A*-Suche

Beispiel

- Suche mit reduzierten Kantengewichten

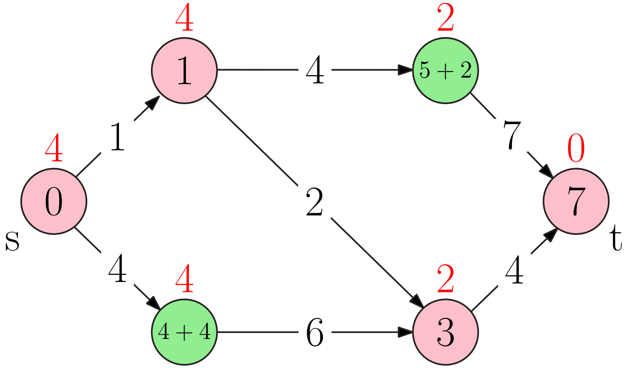


Suche in Graphen

A*-Suche

Beispiel

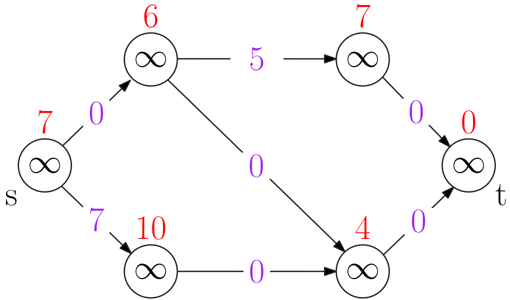
- Suche mit geänderten Schlüsseln in *Priority Queue*



Erster Ansatz

- pot$(v) := \mu(v, t)$ sei optimales Potential
  - Algorithmus besucht nur Knoten auf kürzesten Pfaden
  - zu hoher Speicherverbrauch → benötigt alle kürzesten Distanzen!

Beispiel



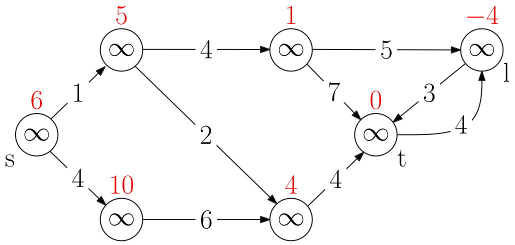
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Kompromiss

- berechne Potential für einige Knoten l (Landmarken)
- bei konkreter Anfrage:
  - wähle Landmarke l hinter dem Ziel t (heuristisch)
  - verwende Potential $\text{pot}(v) := \mu(v, l) - \mu(t, l)$

Beispiel



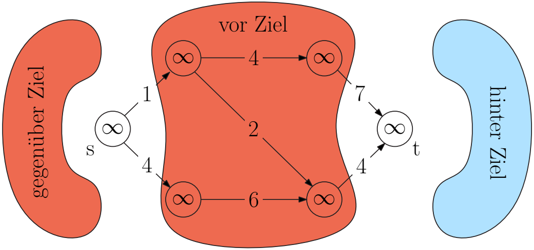
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Was passiert bei schlechter Landmarke (vor/gegenüber Ziel)?
  → Korrektheit?
  → Laufzeit?

Beispiel



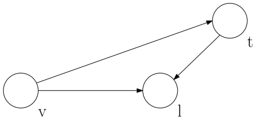
Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Korrektheit:
  immer korrekt dank Dreiecksungleichung
  - untere Schranke für Distanz zum Ziel t
    $\mathrm{pot}(v) = \mu(v, l) - \mu(t, l) \leq \mu(v, t) \quad \Leftrightarrow \quad \mu(v, l) \leq \mu(v, t) + \mu(t, l)$
  - nicht-negative reduzierte Kantengewichte

$$
\begin{aligned}
\overline{c}(u, v) &= c(u, v) + \mathrm{pot}(v) - \mathrm{pot}(u) \\
&= c(u, v) + \mu(v, l) - \mu(t, l) - \mu(u, l) + \mu(t, l) \\
&= c(u, v) + \mu(v, l) - \mu(u, l) \geq 0 \quad \forall (u, v) \in E
\end{aligned}
$$

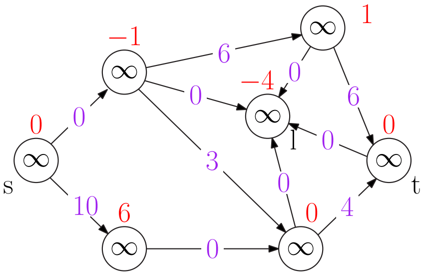


Suche in Graphen

A*-Suche – Landmarken

Qualität der Landmarken

- Laufzeit:
  Algorithmus sucht in falscher Richtung → langsam!
- Beispiel



Legende

$\xrightarrow{4}$	Kante mit Gewicht 4
$\xrightarrow{4}$	Kante mit Gewicht 4, wird gerade in Vorwärtsrichtung betrachtet
$\xrightarrow{4}$	Kante mit Gewicht 4, wird gerade in Rückwärtsrichtung betrachtet
$\xrightarrow{1}$	Kante mit reduziertem Gewicht 1
$\xrightarrow{4}$	neu eingefügte Kante mit Gewicht 4
2 ∞ v	Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = \infty$ und Potential $pot[v] = 2$
2	erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 2$ (in *Priority Queue*)
1	erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 1$ (in *Priority Queue*) (obere Schranke gerade verkleinert)
1	gescannter Knoten v mit exakter Distanz vom Start $d[v] = 1$ (aus *Priority Queue* entfernt)
1 / 3	Knoten in Vorwärtsrichtung gescannt mit exakter Distanz vom Start $d_{fwd}[v] = 1$, in Rückwärtsrichtung erreicht mit oberer Schranke für Distanz zum Ziel $d_{bwd}[v] = 3$
1 / 2	Knoten in Vorwärtsrichtung gescannt mit $d_{fwd}[v] = 1$, in Rückwärtsrichtung erreicht mit $d_{bwd}[v] = 2$ (obere Schranke in Rückwärtsrichtung gerade verkleinert)
1 / 2	aktueller Treffpunkt von Vorwärts- und Rückwärtssuche mit minimalem $d_{fwd}[v] + d_{bwd}[v] = 3$
2 / 3 + 2	erreichter Knoten v mit oberer Schranke für Distanz vom Start $d[v] = 2$ (in *Priority Queue*) (Schlüssel in *Priority Queue* ist $d[v] + \text{pot}[v] = 3 + 2$)

←	Zeiger auf Vorgänger (in Vorwärtsrichtung)
←	Zeiger auf Vorgänger (in Rückwärtsrichtung)
∞	neu eingefügter Knoten

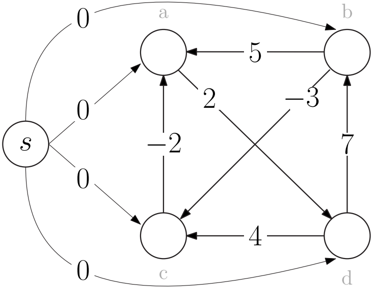
Suche in Graphen

All-to-all

- n-mal Dijkstra
- Negative Kantengewichte (aber keine negativen Kreise)
  - n-mal Bellman-Ford
    - Langsam $O(n^2 m)$
  - $\rightarrow$ Kombiniere Dijkstra, Bellman-Ford und Knotenpotentiale
  - $O(nm + n^2 \log n)$

Suche in Graphen

All-to-all



Ende!

Feierabend!