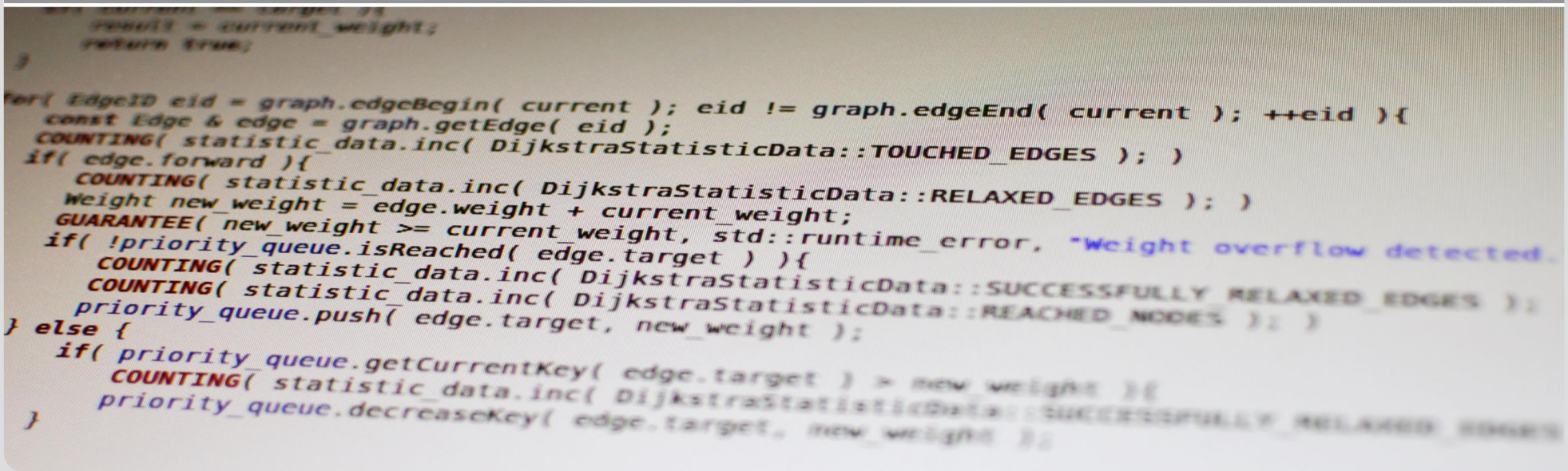
Karlsruher Institut für Technologie

Übung 5 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Nikolai Maas – *{moritz.laupichler, nikolai.maas}@kit.edu*

`https://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php`

Institut für Theoretische Informatik - Algorithmik II



Themenübersicht

- Randomisierte Algorithmen
- Besprechung Übungsblatt 2

Randomisierte Algorithmen

Randomisierte Algorithmen

Übersicht

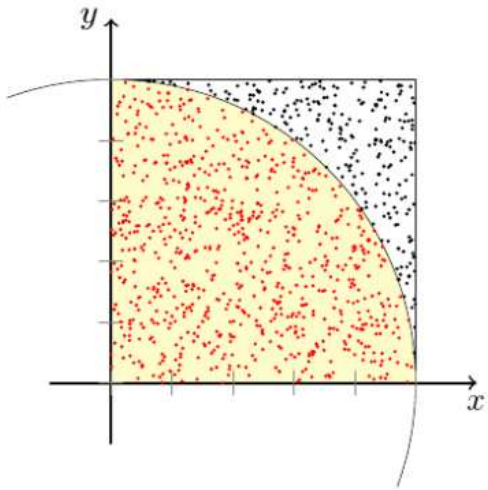
- *Las Vegas Algorithmus*
  - immer korrekte/optimale Lösung
  - Laufzeit ist Zufallsvariable
    $\rightarrow$ erwartete Laufzeit $\mathbb{E}[T]$
  - *Bsp.:* Quicksort

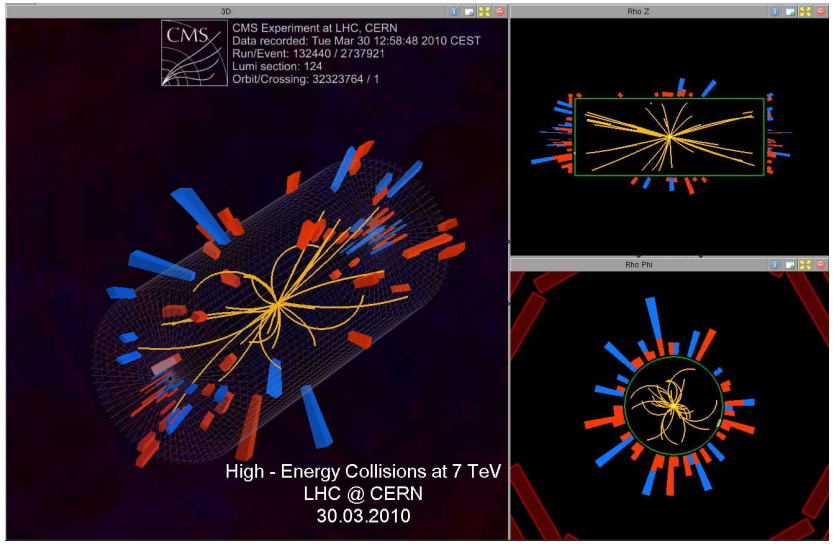
- *Monte Carlo Algorithmus*
  - falsche/suboptimale Lösung möglich
    $\rightarrow$ mit Wahrscheinlichkeit p
  - deterministische Laufzeit
  - *Bsp.:* Miller-Rabin Primzahltest

Randomisierte Algorithmen

Monte Carlo Simulation

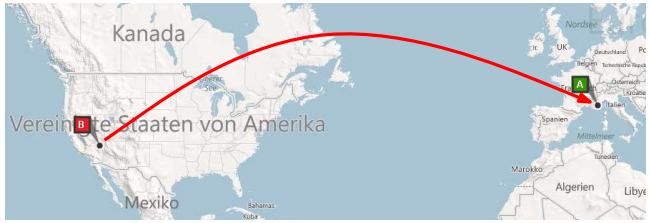
- *Monte Carlo Simulation*
  - nicht zu verwechseln mit *Monte Carlo Algorithmus*!
  - Zufallsexperimente sehr oft ausführen Gesetz der großen Zahlen
  - je länger / öfter ausgeführt, desto bessere Ergebnisse
    - Alternative zur analytischen Lösung
    - 3D-Rendering
    - Nachbildung komplexer Prozesse





Randomisierte Algorithmen

Las Vegas $\rightarrow$ Monte Carlo



geg: Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T] = f(n)$
ges: Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(f(n))$, Fehlerrate p

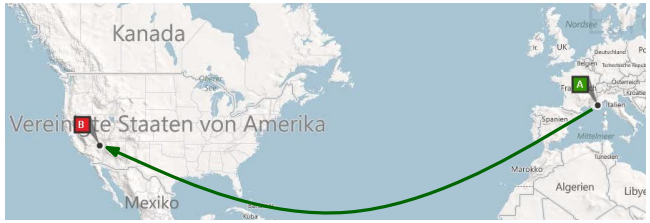
Idee: Abbruch nach Zeit $\alpha f(n)$

- Ausgabe FALSCH, wenn Algorithmus abgebrochen wurde
- $\mathbb{P}[T > \alpha f(n)] \leq 1/\alpha$ Markov Ungleichung

$\rightarrow$ Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\alpha f(n)$ und Fehlerrate $p = 1/\alpha$

Randomisierte Algorithmen

Monte Carlo → Las Vegas



geg: Monte Carlo Algorithmus mit Laufzeit $\mathcal{O}(f(n))$, Fehlerrate p, Korrektheit in $\mathcal{O}(g(n))$ prüfbar
ges: Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T]$

Idee: Wiederhole MC bis korrektes Ergebnis gefunden

- Laufzeit $T \leq i \cdot \mathcal{O}(f(n) + g(n))$ *i Schritte benötigt*
- $\mathbb{E}[T] \leq \mathbb{E}[i] \cdot \mathcal{O}(f(n) + g(n))$
  - $\mathbb{E}[i] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} \cdot (1-p) = \frac{1}{1-p}$
    nach $\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x/(1-x)^2,\ x < 1$

→ Las Vegas Algorithmus mit erwarteter Laufzeit $\mathbb{E}[T] \leq \frac{\mathcal{O}(f(n)+g(n))}{1-p}$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

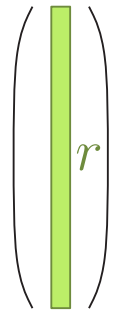
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

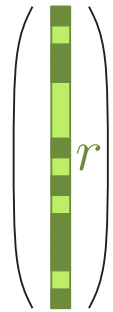
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

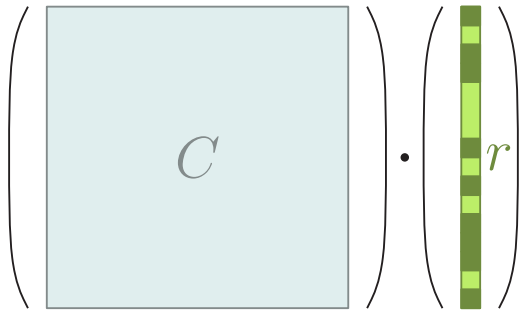
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

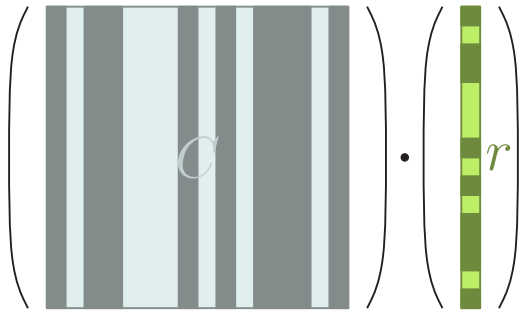
Aufgabe: Überprüfe, ob $X \cdot Y = Z$ für Matrizen X, Y, Z

- deterministisch:
  - berechne $X \cdot Y$ und vergleiche mit Z

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^3)$ (naiv), $\mathcal{O}(n^{2.37})$ (best)

- randomisiert:
  - Wähle 0-1 Vektor $r = (r_1, \ldots, r_n)$ zufällig
  - Wenn $X(Yr) = Zr$ dann KORREKT, sonst FALSCH

  $\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(n^2)$



Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$

Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ A_i: i'te Zeile von A
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \beta + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

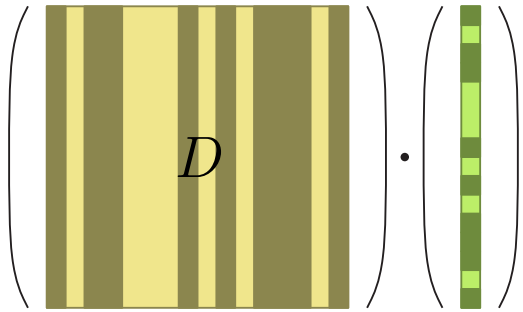
Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$

Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?



- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ A_i: i'te Zeile von A
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \beta + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

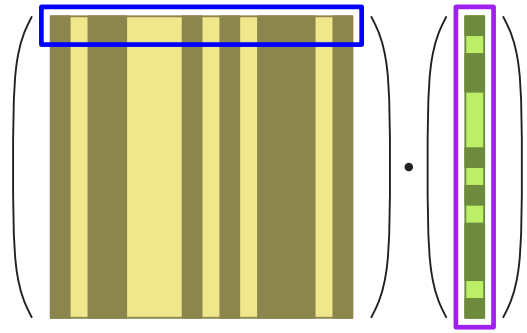
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$



Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ A_i: i'te Zeile von A
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \beta + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

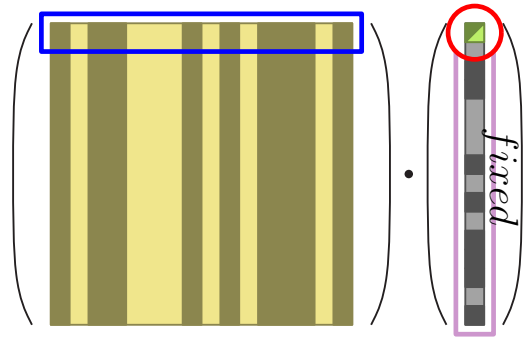
Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

Behauptung: Wenn $XY \neq Z$ dann $\mathbb{P}[XYr = Zr] \leq 0.5$

Definitionen:

- $A := XY$, $B := Z$



Annahme: $A \neq B$; Wann ist dann $Ar = Br$?

- $\exists i, j : A_{i,j} \neq B_{i,j}$
- Sei $a := A_i$ und $b := B_i$ A_i: i'te Zeile von A
  $\alpha := \sum_{k \neq j} a_k r_k$ und $\beta := \sum_{k \neq j} b_k r_k$
  $\Rightarrow ar = \alpha + a_j r_j$ und $br = \beta + b_j r_j$
  $\Rightarrow ar - br = (\alpha - \beta) + (a_j - b_j) r_j$
- Annahme: Werte für $r_{1 \ldots j-1, j+1 \ldots n}$ bereits festgelegt
  $\rightarrow$ noch 2 Möglichkeiten für r_j, Gleichheit bei maximal einer
  $\Rightarrow \mathbf{Pr}[ar - br = 0] = \mathbf{Pr}[r_j = \frac{\beta - \alpha}{a_j - b_j}] \leq \frac{1}{2}$

$\rightarrow$ Fehlerrate $p \leq 0.5$

Randomisierte Algorithmen

Matrix-Matrix Multiplikation

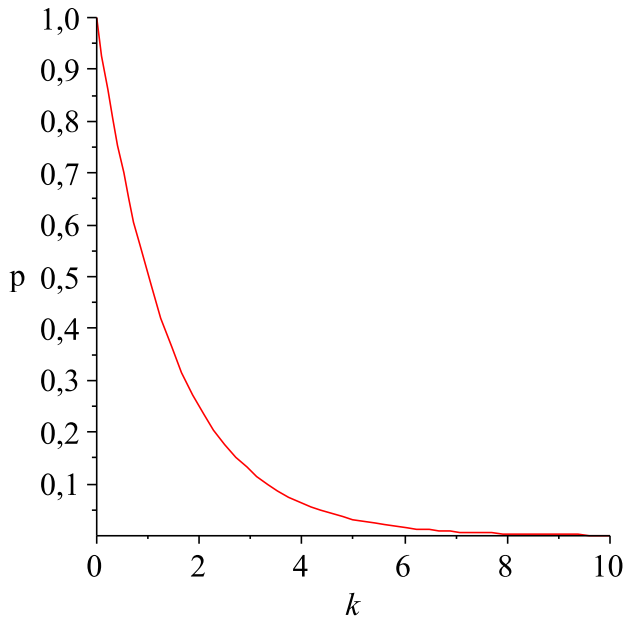
Beschleunigung durch *probability boosting*

nur bei $p \leq 0.5$ schnelle Konvergenz

- Wiederhole Test k mal mit unterschiedlicher Wahl von r
  - Ein Test liefert FALSCH
    $\rightarrow AB \neq C$, fertig
  - Alle Tests liefern KORREKT
    $\rightarrow$ *false positive* mit Wahrscheinlichkeit
    $\mathbb{P}[ABr = Cr] \leq 0.5^k$

$\rightarrow$ Laufzeit $\mathcal{O}(kn^2)$

linear längere Laufzeit bei exponentiell weniger Fehler



Coupon Collector

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- X = # Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, mit X_i = # Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
  - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
  - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
  $= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Coupon Collector

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- X = # Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, mit X_i = # Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
  - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
  - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
  $= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Coupon Collector

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- X = # Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, mit X_i = # Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
  - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
  - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
  $= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Coupon Collector

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- X = # Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, mit X_i = # Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
  - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
  - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
  $= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Coupon Collector

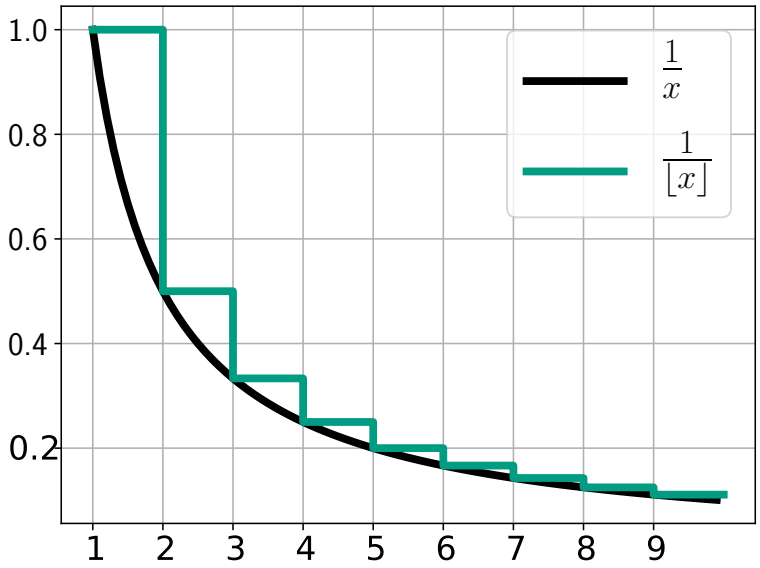
Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

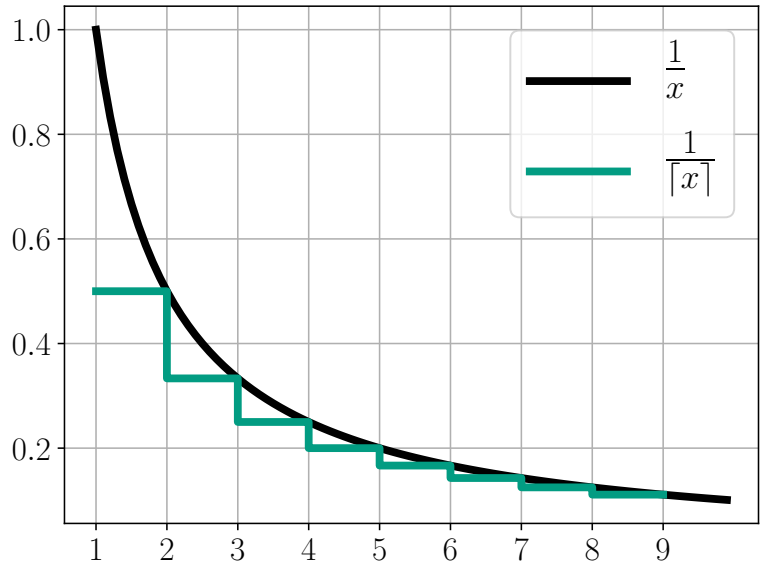
- X = # Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, mit X_i = # Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
  - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
  - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
  $= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

Harmonische Zahlen

- $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$

$$\ln n = \int_{x=1}^{n} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \qquad \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i} \leq \int_{x=1}^{n} \frac{1}{x} dx = \ln n$$





- $\ln n \leq H_n \leq \ln n + 1$

Coupon Collector

Müslipackungen enthalten jeweils eine von n verschiedenen Sammelkarten. Wie viele Packungen muss ich kaufen um alle Karten beisammenzuhaben?

- X = # Packungen bis mind. eine von jeder Karte
- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, mit X_i = # Packungen während ich $i-1$ Karten hatte
  - X_i sind geometrische Zufallsvariablen mit $p_i = 1 - \frac{i-1}{n}$
  - $\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n-i+1}$
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$ Linearität des Erwartungswertes
  $= \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n-i+1} = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = nH_n \leq n \ln n + n$

Perfekte Hashfunktionen

Retrieval-Datenstrukturen

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe r-bit Wert

x	f(x)
Marvin	4 🎁 = 100
Florian	2 🎁 = 010
Tobias	4 🎁 = 100
Daniel	0 🎁 = 000
Sascha	6 🎁 = 101

Retrieval-Datenstrukturen

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe r-bit Wert
- Kleine Menge an zulässigen Eingabewerten
- Rest undefiniert

x	f(x)
Marvin	4 🎁 = 100
Florian	2 🎁 = 010
Tobias	4 🎁 = 100
Daniel	0 🎁 = 000
Sascha	6 🎁 = 101

Retrieval-Datenstrukturen

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe *r*-bit Wert
- Kleine Menge an zulässigen Eingabewerten
- Rest undefiniert

x	f(x)
Marvin	4 = 100
Florian	2 = 010
Tobias	4 = 100
Daniel	0 = 000
Sascha	6 = 101

h(x)	f(x)
010001	100
100100	010
111000	100
000011	000
111110	101

Retrieval-Datenstrukturen

- Repräsentation einer (statischen) Funktion
- Ausgabe r-bit Wert
- Kleine Menge an zulässigen Eingabewerten
- Rest undefiniert
- Lösung: Hashen und Gleichungssystem lösen

  Mit schlauer Wahl der Hashfunktion $n \cdot (1 + o(1))$ Zeilen

x	f(x)
Marvin	4 🎁 = 100
Florian	2 🎁 = 010
Tobias	4 🎁 = 100
Daniel	0 🎁 = 000
Sascha	6 🎁 = 101

h(x)	f(x)
010001	100
100100	010
111000	100
000011	000
111110	101

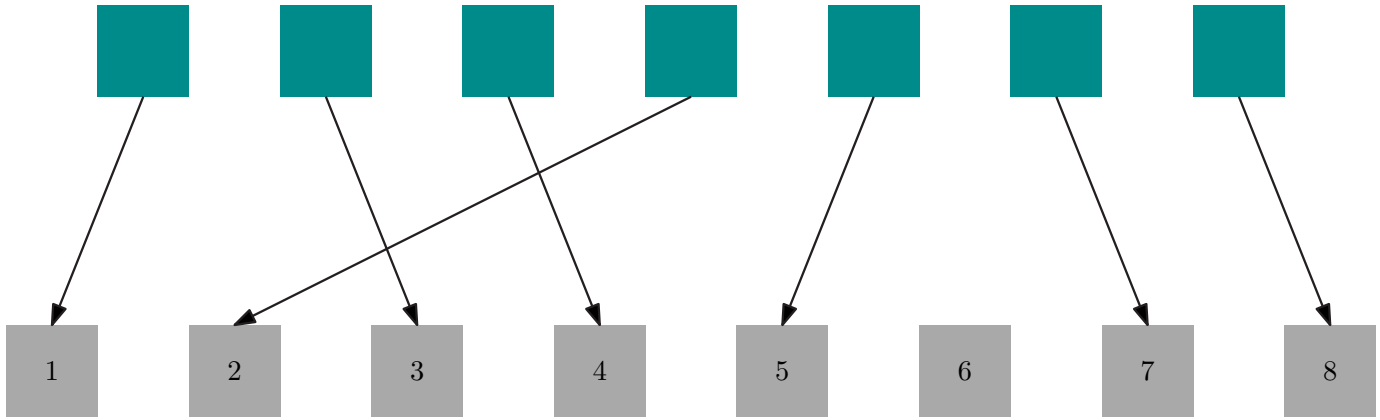
$$h(x) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = f(x)$$

Perfekte Hashfunktionen

Problemstellung

- Eingabe: n Objekte
- Gesucht: Zuordnung Objekt$\rightarrow$Zahl
- Abbildung soll injektiv sein

  z.B. Speicherplätze, Kurze Identifier



Perfekte Hashfunktionen

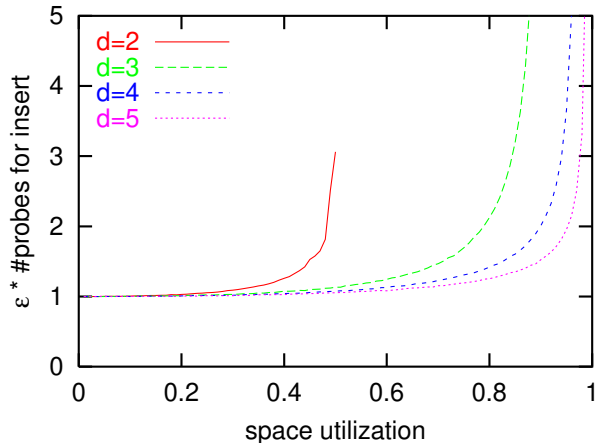
Cuckoo Hashing

- Cuckoo Hashing gibt jedem Objekt eine von 2 Positionen
- Baue Cuckoo-Hashtabelle
- Speichere je 1 Bit in Retrieval-Datenstruktur

Perfekte Hashfunktionen

Cuckoo Hashing

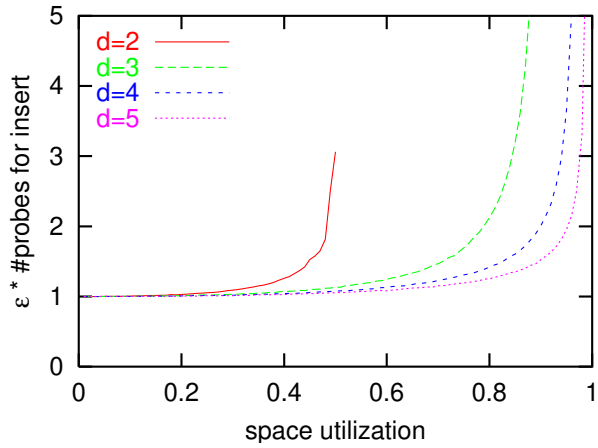
- Cuckoo Hashing gibt jedem Objekt eine von 2 Positionen
- Baue Cuckoo-Hashtabelle
- Speichere je 1 Bit in Retrieval-Datenstruktur



Perfekte Hashfunktionen

Cuckoo Hashing

- Cuckoo Hashing gibt jedem Objekt eine von 2 Positionen
- Baue Cuckoo-Hashtabelle
- Speichere je 1 Bit in Retrieval-Datenstruktur



4-äres Cuckoo Hashing:
$\Rightarrow$ Retrieval-Datenstruktur mit 2 bits pro Eintrag
$\Rightarrow$ Perfekte Hashfunktion mit 2 bits pro Objekt

Perfekte Hashfunktionen

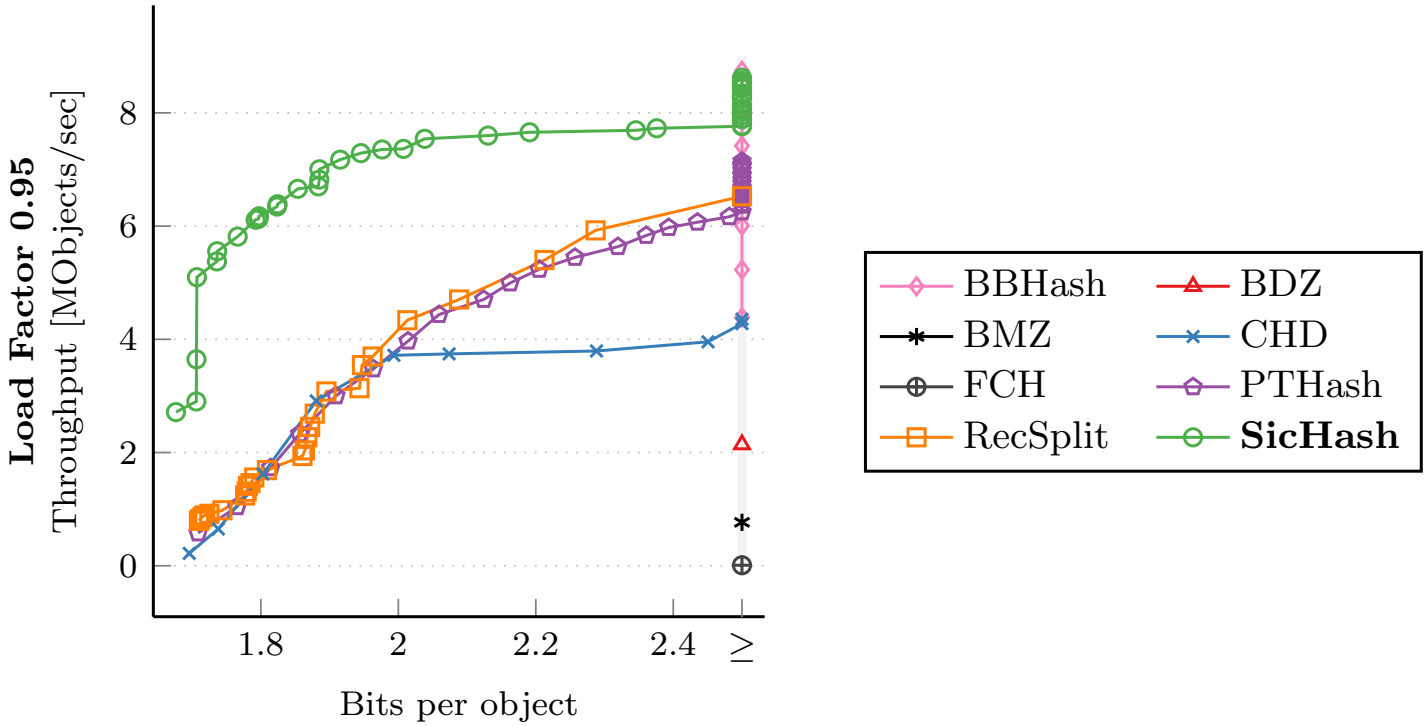
SicHash

- Irreguläres cuckoo hashing
  - Einige Objekte bekommen 2 Positionen, einige 4, und einige 8
- Mehrere Retrieval Datenstrukturen
  - 1-, 2- und 3-bit

Perfekte Hashfunktionen

SicHash

- Irreguläres cuckoo hashing
  - Einige Objekte bekommen 2 Positionen, einige 4, und einige 8
- Mehrere Retrieval Datenstrukturen
  - 1-, 2- und 3-bit



Übungsblatt 2

Ende!

Feierabend!