Übung 6 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Nikolai Maas – *{moritz.laupichler, nikolai.maas}@kit.edu*

https://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php

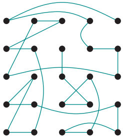
Institut für Theoretische Informatik - Algorithm Engineering

Approximationsalgorithmen

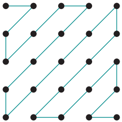
Grundlagen

Warum Lösungen abschätzen?

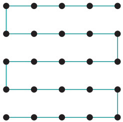
- es gibt “schwierige” Probleme z.B. TSP mit exponentieller Laufzeit
  - $\rightarrow$ exakte Berechnung nicht möglich zu unseren Lebzeiten
- vernünftige Näherungen effizient berechnen
  - $\rightarrow$ exakte/optimale Ergebnisse nicht immer wichtig
  - $\rightarrow$ “gute” Lösungen genügen oft
  - $\rightarrow$ aber Abstand zur korrekten Lösung wissenswert



Weglänge “lang”



Weglänge $8 + 16\sqrt{2}$



Weglänge 24

Approximationsalgorithmen

Gütemaß

- Ein Algorithmus *ALG* hat einen Approximationsfaktor ρ, wenn gilt

$$\frac{w\left(ALG(I)\right)}{w\left(OPT(I)\right)} \leq \rho$$

f.a. Probleminstanzen I, *OPT* optimale Lösung, w Bewertungsfunktion

für Minimierungsprobleme $\Rightarrow \rho > 1$, für Maximierungsprobleme $\Rightarrow \rho < 1$

Beispiel:

- *ALG* schätzt Distanz von Strecke x auf nächste Zweierpotenz $2^{\lceil \log |x| \rceil}$
- *OPT* bestimmt korrekte Distanz $|x|$

$$\Rightarrow \quad \frac{w(ALG)}{w(OPT)} = \frac{2^{\lceil \log |x| \rceil}}{|x|} \leq \frac{2^{\log |x| + 1}}{|x|} = \frac{2|x|}{|x|} = 2 = \rho$$

Zahlenbeispiel: $|x| = 2^{10} + 1 \quad \rightarrow \quad \frac{2^{11}}{2^{10}+1} = 2 - \frac{2}{2^{10}+1} \approx 2$

Approximationsalgorithmen
Klassen

Approximationsprobleme klassifzierbar durch

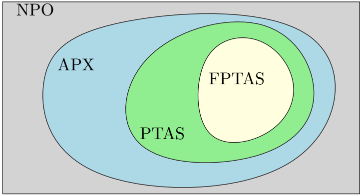
- Laufzeit $T(n, \varepsilon)$
- Approximationsfaktor $\rho(n, \varepsilon)$

Klassen an Approximationsproblemen

APX *approximable*
$\rho = \mathit{const.}$, T polynomiell in n

PTAS *polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n

FPTAS *fully polynomial time approximation scheme*
$\rho = 1 \pm \varepsilon$, bel. $\varepsilon \in (0, 1)$, T poly. in n, $\frac{1}{\varepsilon}$



Beispiele:

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 2$ (APX)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = n^{\frac{1}{\varepsilon}}$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ (PTAS)

$\Rightarrow$ $T(n, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} n$, $\rho(n, \varepsilon) = 1 + 2\varepsilon$ (FPTAS)

Approximationsalgorithmen
TSP

Hamiltonkreis
- Besucht alle Knoten genau 1x
- Ohne Kantengewichte
- Trivial auf vollständigem Graph, sonst NP-hart

Minimum Traveling Salesman Problem
- Kürzester Hamiltonkreis
- Selbst auf vollständigem Graph NP-hart

Approximationsalgorithmen

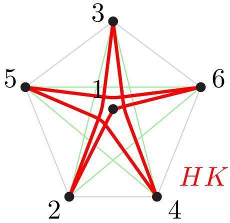
Minimum Metric TSP NP-hart

Problemstellung

- Gegeben eine Menge an Punkten V in der Ebene
- Vollständiger Graph
- Kantengewichte erfüllen Dreiecks-Ungleichung
- Finde Kreis minimaler Länge, der alle Punkte abläuft

Wiederholung 2-Approximation (Algorithmus)

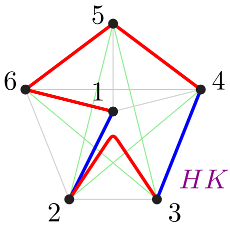
- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T $w(T) \leq w(OPT)$
- verdopple Kanten von $T \rightarrow T'$ $w(T') \leq 2w(OPT)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T' $w(EK) = w(T')$
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) \leq 2w(OPT)$



Approximationsalgorithmen
Minimum Metric TSP

$3/2$-Approximation (Algorithmus) Christofides-Heuristik

- Graph $G = (V, E)$ vollständig, ungerichtet
- bestimme MST T
- bestimme Knoten U mit ungeradem Grad in T
- finde *minimales perfektes Matching* M auf (U, E)
  alle Knoten gematcht, Summe der Gewichte der Matchingkanten minimal
- füge Kanten M zu $T \rightarrow T'$
  $w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$
- bestimme Eulerkreis EK auf T'
  alle Knoten haben geraden Grad
- wandle EK zu Hamiltonkreis HK
  $w(HK) \leq w(EK) = w(T') \leq w(OPT) + w(M)$



Laufzeit durch Matching dominiert, $\mathcal{O}(n^3)$

3/2-Approximation (Beweis) Christofides-Heuristik

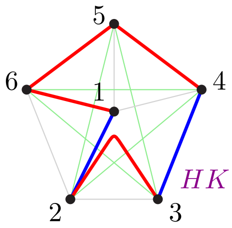
- Abschätzungen: analog zu vorherigem Beweis
  $\Rightarrow \; w(HK) \leq w(EK) = w(T') = w(T) + w(M) \leq w(OPT) + w(M)$

- Bestimmung von $w(M)$:
  - sei HK' Hamiltonkreis auf U (U: Knoten mit ungeradem Grad in T)
    erzeugt durch Überspringen aller Knoten $V \setminus U$ in OPT
  - definiere alternierende perfekte Matchings M_1, M_2 auf HK'
    existiert, da $|U|$ gerade, $HK' = M_1 \cup M_2$

  $\Rightarrow \; w(M) \leq w(M_1), w(M) \leq w(M_2)$ $\quad M$ min. Matching!

  $\Rightarrow \; 2 \cdot w(M) \leq w(M_1) + w(M_2) = w(HK') \leq w(OPT)$
  Überspringen gerader Knoten und Dreiecks-Ungleichung

$\Rightarrow \; w(HK) \leq \frac{3}{2} w(OPT)$



- Existiert immer perfektes Matching M?
  Zeige, dass $|U|$ immer gerade ist!

Approximationsalgorithmen
Zusammenfassung

Wissenswert nicht erschöpfend!

- Approximationsfaktor ρ
- APX, PTAS, FPTAS, pseudopolynomiell
- es gibt nicht gut approximierbare Probleme z.B. minimum TSP

Typische Fragestellungen

- Zu welcher Klasse gehört Algorithmus X mit $T(n, \varepsilon)$, $\rho(n, \varepsilon)$?
- Zeigen/Widerlegen Sie Approximationsfaktor ρ für Algorithmus X.
- (Bestimmen Sie einen Algorithmus mit Approximationsfaktor ρ)

Klausuraufgabe

Aufgabe zu Approximationsalgorithmen aus Klausur vom WS2020

Ende!

Feierabend!