

Übung 10 – Algorithmen II

Moritz Laupichler, Nikolai Maas – {moritz.laupichler, nikolai.maas}@kit.edu
https://algo2.iti.kit.edu/AlgorithmenII_WS23.php

Institut für Theoretische Informatik - Algorithm Engineering

```
    result = current_weight;
    return true;
}

for( EdgeID eid = graph.edgeBegin( current ); eid != graph.edgeEnd( current ); ++eid ){
    const Edge & edge = graph.getEdge( eid );
    COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::TOUCHED_EDGES ); )
    if( edge.forward ){
        COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::RELAXED_EDGES ); )
        weight new_weight = edge.weight + current_weight;
        GUARANTEE( new_weight >= current_weight, std::runtime_error, "Weight overflow detected." );
        if( !priority_queue.isReached( edge.target ) ){
            COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::SUCCESSFULLY_RELAXED_EDGES ); )
            COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::REACHED_NODES ); )
            priority_queue.push( edge.target, new_weight );
        } else {
            if( priority_queue.getCurrentKey( edge.target ) > new_weight ){
                COUNTING( statistic_data.inc( DijkstraStatisticData::SUCCESSFULLY_RELAXED_NODES ); )
                priority_queue.decreaseKey( edge.target, new_weight );
            }
        }
    }
}
```

- Geometrische Algorithmen
 - Graham's Scan

- Gegeben drei Punkte $P_0, P_1, P_2 \Rightarrow$ bestimme Orientierung

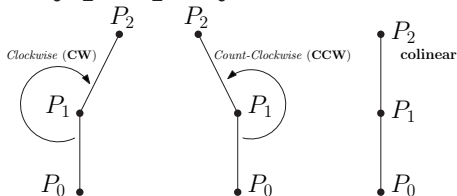
- Sei $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_0$

- $CCW(P_0, P_1, P_2) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$

- $CCW(P_0, P_1, P_2) > 0 \Rightarrow$ **CCW**

- $CCW(P_0, P_1, P_2) = 0 \Rightarrow$ **Colinear**

- $CCW(P_0, P_1, P_2) < 0 \Rightarrow$ **CW**

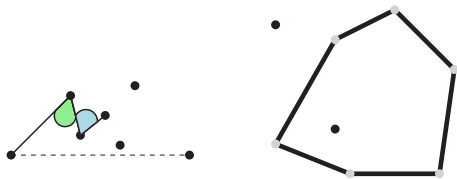


- Unterproblem von Algorithmen

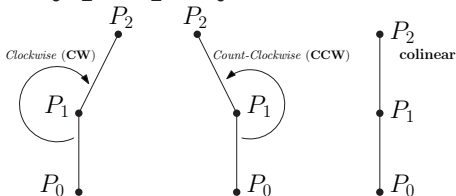
- Graham Scan

- Test auf Enthaltensein

Punkt in konvexem Polygon

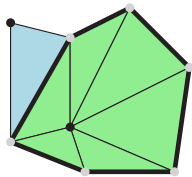
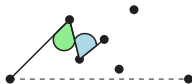


- Gegeben drei Punkte $P_0, P_1, P_2 \Rightarrow$ bestimme Orientierung
- Sei $\vec{a} = \overrightarrow{P_0P_1} = \vec{P}_1 - \vec{P}_0$ und $\vec{b} = \overrightarrow{P_0P_2} = \vec{P}_2 - \vec{P}_0$
- $CCW(P_0, P_1, P_2) = a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$
- $CCW(P_0, P_1, P_2) > 0 \Rightarrow$ **CCW**
- $CCW(P_0, P_1, P_2) = 0 \Rightarrow$ **Colinear**
- $CCW(P_0, P_1, P_2) < 0 \Rightarrow$ **CW**



■ Unterproblem von Algorithmen

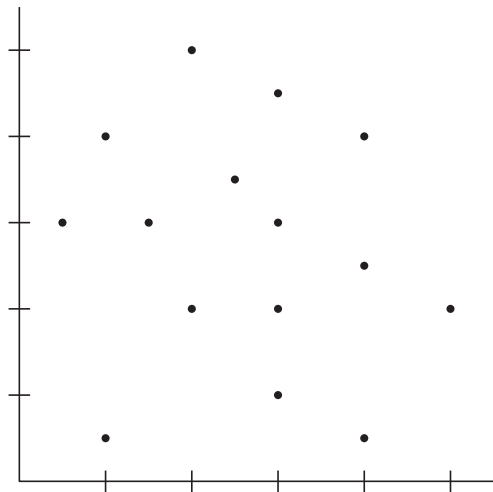
- Graham Scan
- Test auf Enthaltensein
Punkt in konvexem Polygon



Konvexe Hülle

Graham-Scan

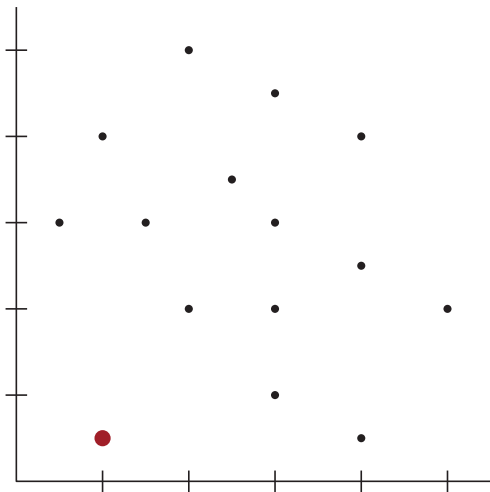
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

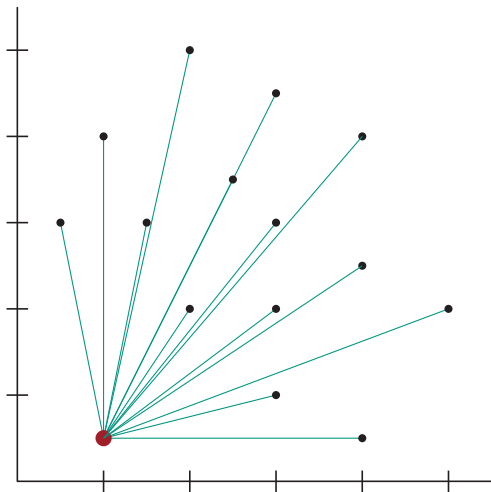
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

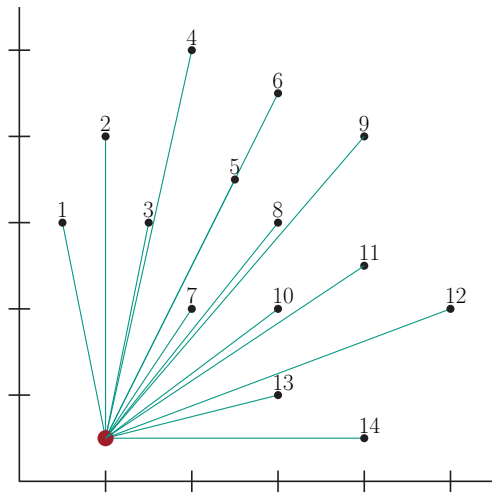
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

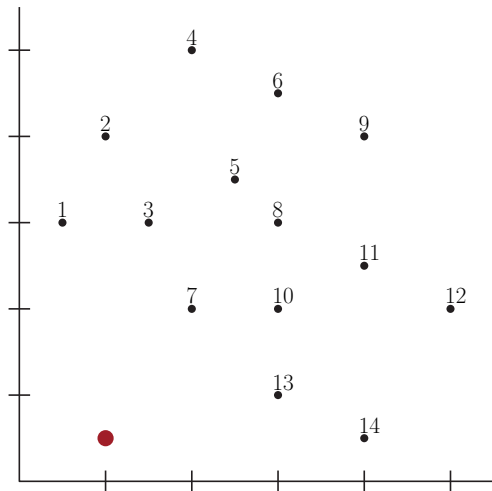
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

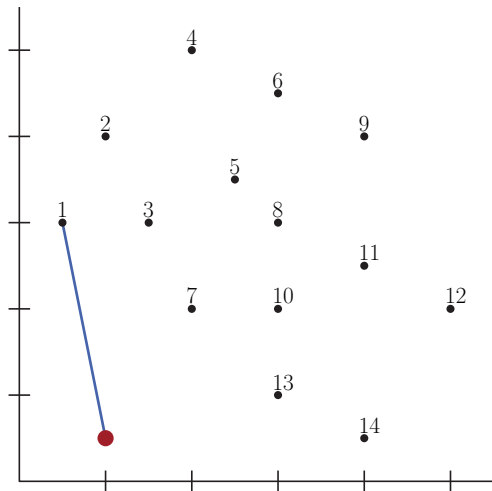
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

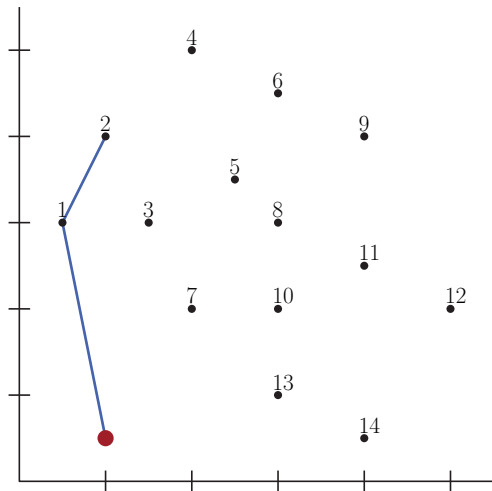
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

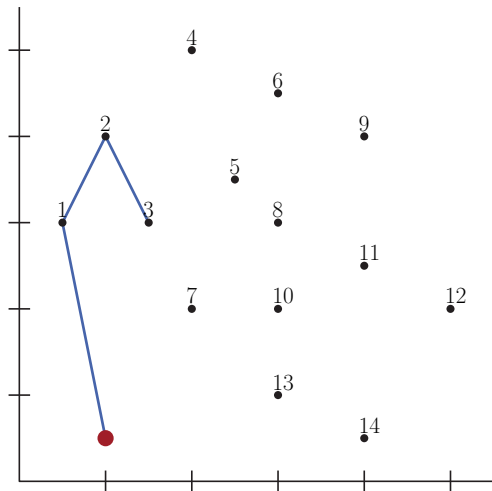
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

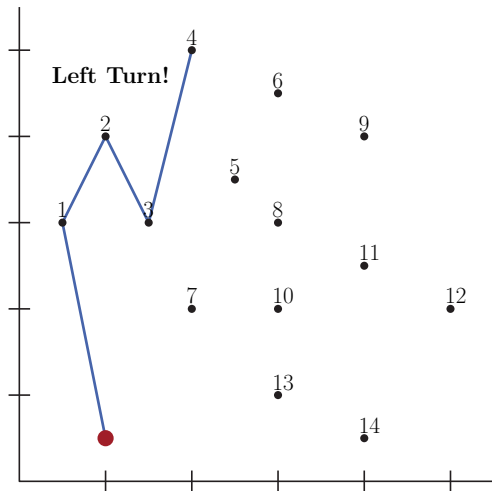
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

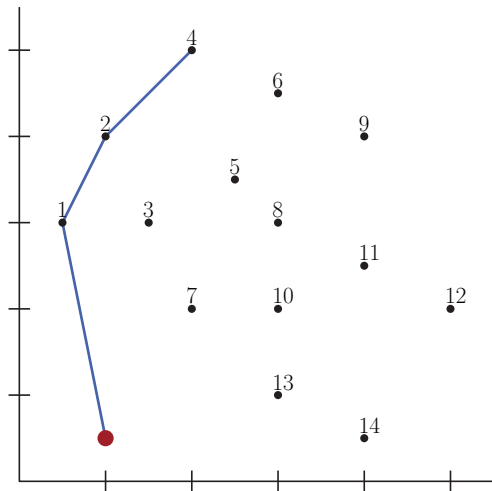
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

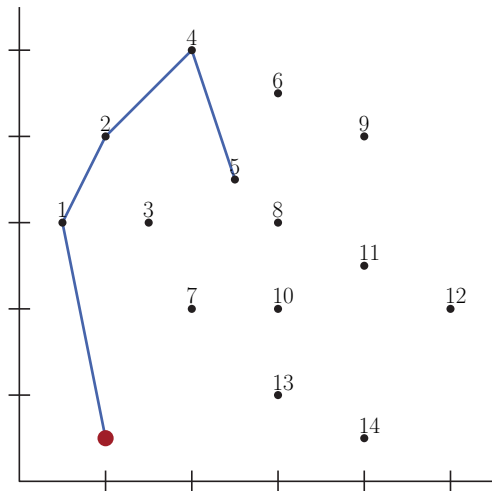
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

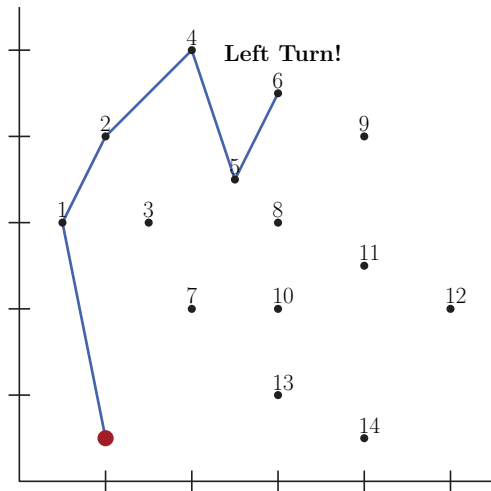
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

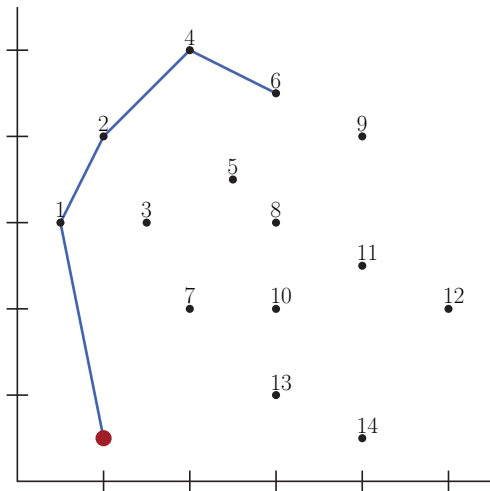
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

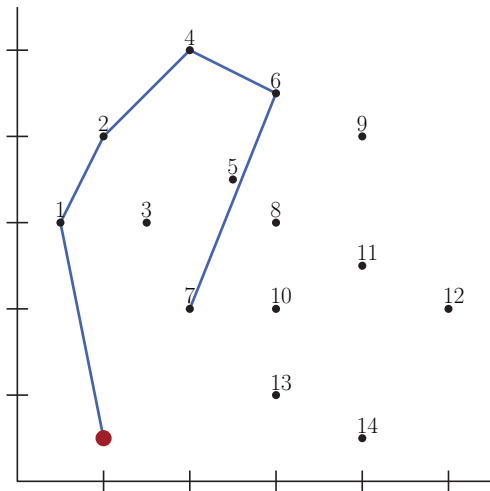
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

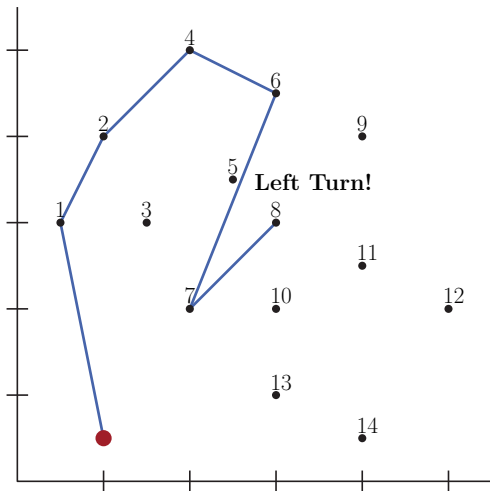
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

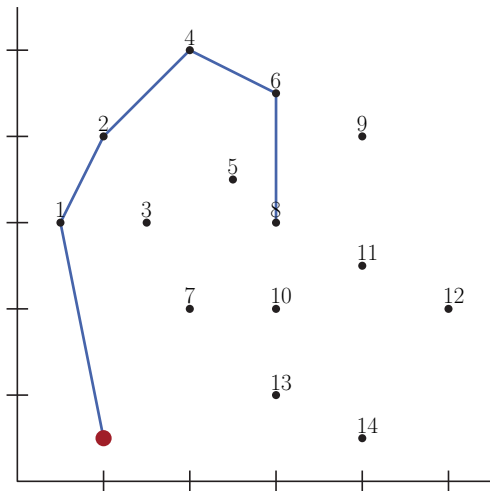
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

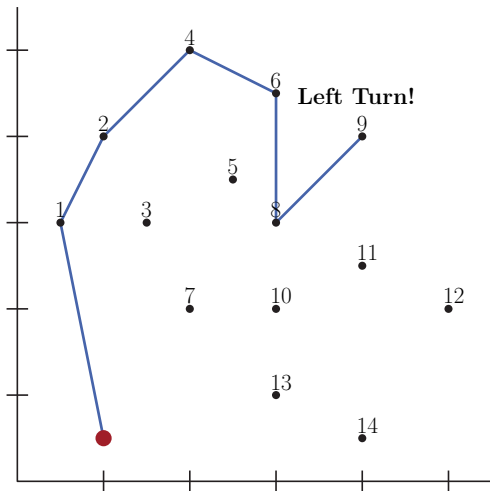
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

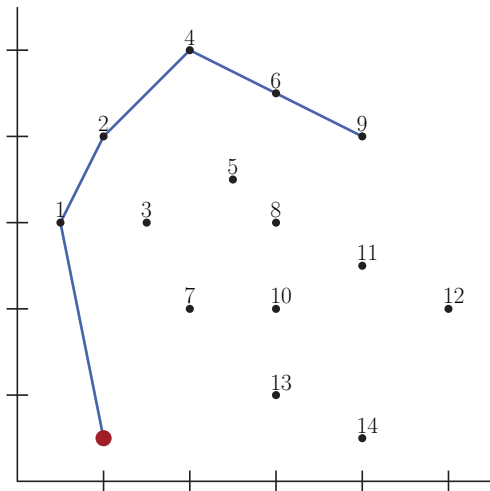
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

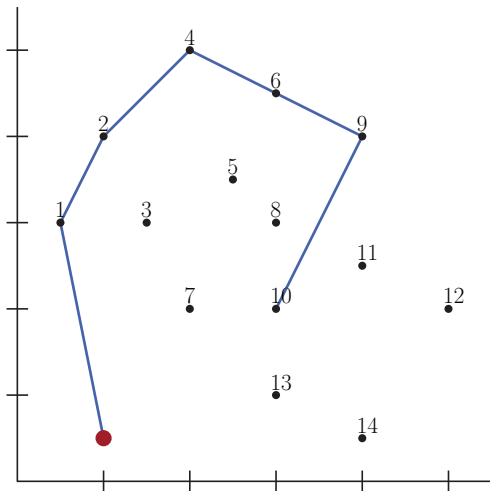
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

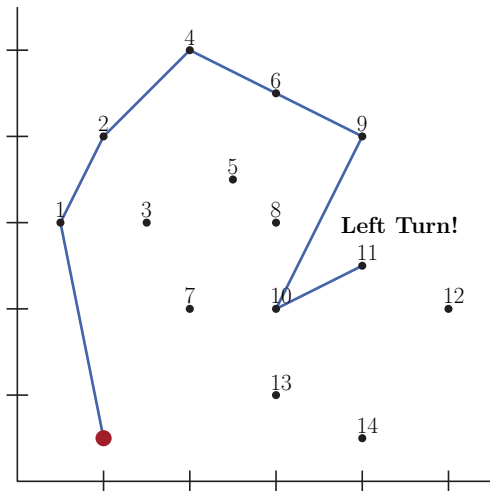
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

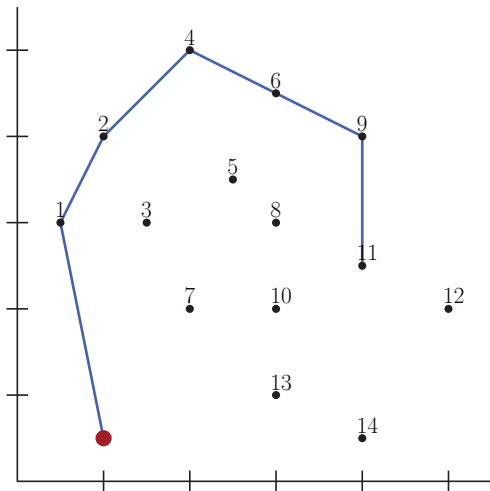
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

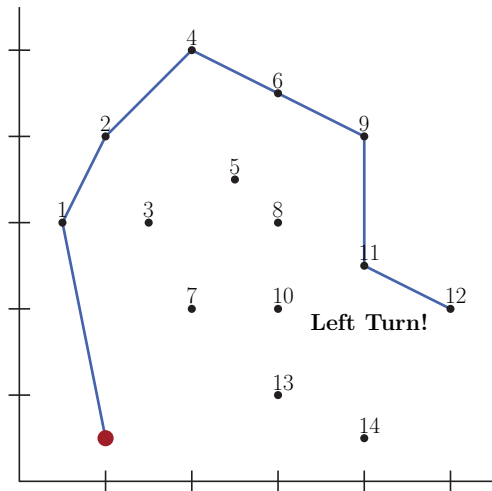
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

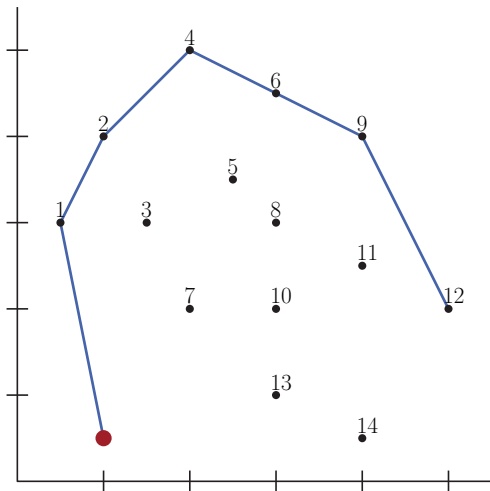
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

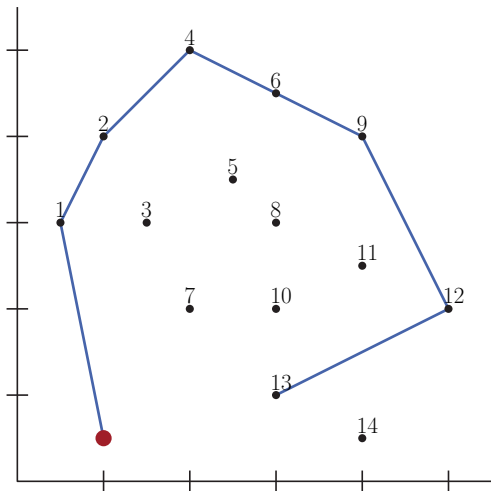
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

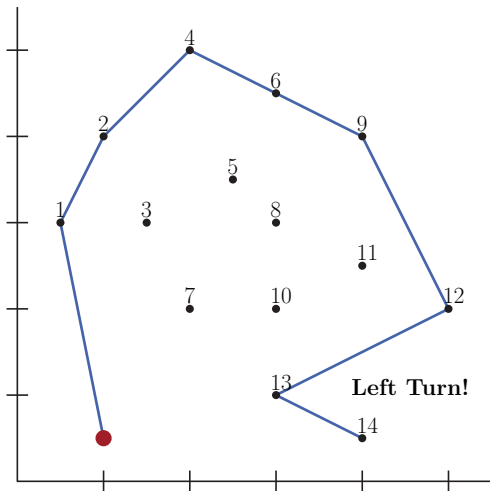
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

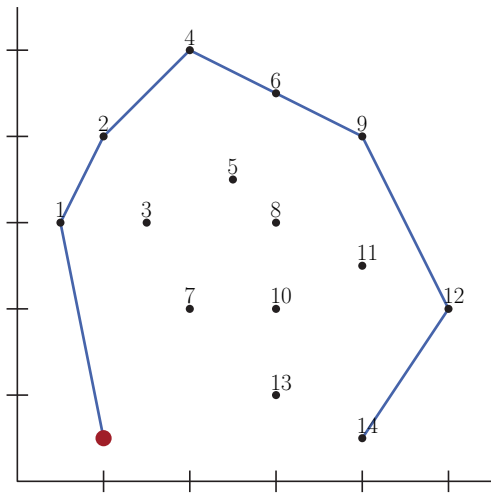
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

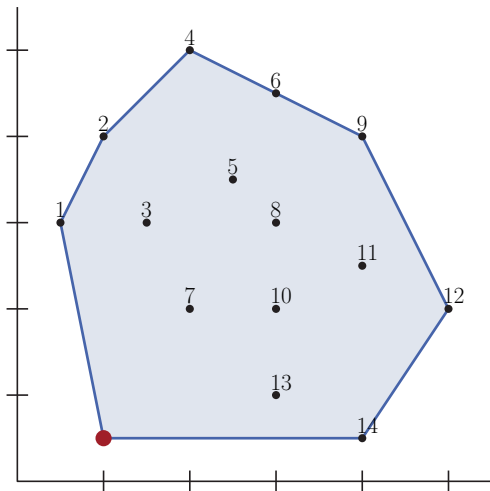
1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Konvexe Hülle

Graham-Scan

1. Finde Punkt P_0 mit kleinster y -Koordinate
 - Gibt es mehrere Punkte mit gleicher y -Koordinate, dann nehme Punkt mit kleinster x -Koordinate
2. Sortiere alle Punkte in absteigendem Winkel relativ zu P_0
3. Iteriere über alle Punkte P_i ($i > 2$) und betrachte Dreieck $H_{k-1}H_kP_i$ (wobei H_i i -ter Punkt in der aktuellen konvexen Hülle)
 - *Rechtsknick*: Füge P_i zur konvexen Hülle H hinzu
 - *Linksknick*: Lösche H_k aus bisheriger konvexen Hülle H



Ende!



Feierabend!