Karlsruher Institut für Technologie

Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt X – Gemischtes

Randomisierte Algorithmik

Aufgabe 1 – Alles hängt mit allem zusammen

Wir betrachten Zufallsgraphen im Gilbert Modell. Für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$ sei

$$z(n, p) := \Pr[G(n, p) \text{ ist zusammenhängend}].$$

Zeige: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $z(n, p)$ monoton steigend in p.

Aufgabe 2 – Gilbert Graphen Sampeln

Sei $p = \frac{\lambda}{n-1}$ für $\lambda = \Theta(1)$. Beschreibe, wie man $G(n, p)$ in erwarteter Zeit $O(n)$ sampeln kann.

Hinweis: Seien $X_1, X_2, \ldots \sim \mathrm{Ber}(p)$ und $Y = \min\{i \in \mathbb{N} \mid X_i = 1\}$. Sample Y in Zeit $O(1)$.

Aufgabe 3 – Konzentration um unbekannten Erwartungswert

Für zwei Strings S und T sei $\mathrm{lcs}(S, T)$ die größtmögliche Länge eines Strings L den man sowohl aus S als auch aus T durch das Löschen von Zeichen erhalten kann. Zum Beispiel gilt für $S =$ ELEFANT und $T =$ ELLENLANG dass $\mathrm{lcs}(S, T) = 5$ wegen $L =$ ELEAN. Man nennt L eine *Longest Common Subsequence*.

Im Folgenden sei $n \in \mathbb{N}$ und $S, T \sim \mathcal{U}(\{0, 1\}^n)$ zufällige Bitstrings.

(a) Zeige, dass $\mathbb{E}[\mathrm{lcs}(S, T)] \geq n/2$.

Mitteilung: Die Zahl $\gamma_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}[\mathrm{lcs}(S, T)]$ ist eine sogenannte Chvátal–Sankoff Zahl. Man weiß, dass sie existiert und dass gilt $\gamma_2 \in [0.788071, 0.826280]$. Der genaue Wert ist unbekannt (Simulationen suggerieren $\gamma_2 \approx 0.811$).

(b) Sei $\varepsilon > 0$. eine beliebige Konstante. Zeige $\Pr[|\mathrm{lcs}(S, T) - \mathbb{E}[\mathrm{lcs}(S, T)]| \geq \varepsilon n] \leq \exp(-\varepsilon^2 n)$.

Aufgabe 4 – Ein Leckerbissen zum Abschluss

Ein kreisrunder Kuchen steht auf einem Drehteller. Ein *Zufallsschnitt* bedeutet, dass wir den Kuchen zufällig drehen und dann von der Mitte aus nach Norden schneiden.

(a) Wir schneiden zweimal zufällig. Was ist die erwartete Größe des kleineren Stückes (als Anteil vom ganzen Kuchen)?

(b) Im Kuchen ist eine Kirsche (punktförmig, nicht genau mittig). Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kirsche nach den zwei zufälligen Schnitten im kleineren Stück ist?