Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 6 – Concentration Bounds

Randomisierte Algorithmik

Aufgabe 1 – Rechenregeln für Varianz

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen deren Varianz existiert. Seien ferner $s, t > 0$. Zeige, dass gilt:

(a) $\mathrm{Var}(sX) = s^2\mathrm{Var}(X)$

(b) $\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)$

(c) $\mathrm{Var}(sX + tY) = s^2\mathrm{Var}(X) + t^2\mathrm{Var}(Y)$

Hinweis: Nutze $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$. Wenn du Lust hast, kannst du das auch nochmal aus der Definition von Unabhängigkeit (für diskrete Zufallsvariablen) herleiten, die lediglich $\Pr[X = i \wedge Y = j] = \Pr[X = i] \cdot \Pr[Y = j]$ für alle i, j garantiert.

Aufgabe 2 – Chernoff in noch einfacher für starke Abweichung

Sei $X = X_1 + \cdots + X_n$ eine Summe von unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ und sei $b \geq 6\mu$. Zeige

$$\Pr[X \geq b] \leq 2^{-b}.$$

Hinweis: Benutze die Chernoff Schranke $\Pr[X \geq (1 + \delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$.

Aufgabe 3 – Vergleich von Konzentrationsschranken

Für $n \in \mathbb{N}$ sei X_n die Anzahl der Sechsen bei n-maligem Würfeln eines gewöhnlichen Würfels. Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass X_n seinen Erwartungswert um mindestens 10% übersteigt. Finde jeweils eine Schranke an p_n mit…

(a) … der Markov-Ungleichung.

(b) … der Tschebyscheffschen Ungleichung (engl. „Chebyshev's Inequality").

(c) … der Chernoff-Ungleichung (oder einer Variante davon).

(d) Vergleiche die asymptotische Stärke der Schranken.