Karlsruher Institut für Technologie

Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 7 – Classic Hash Tables

Randomisierte Algorithmik

Aufgabe 1 – 2–Unabhängigkeit vs. 1-Universalität

Sei $\mathcal{H} \subseteq [m]^D$ eine Familie von Hashfunktionen von D nach $[m]$. Zeige oder widerlege, dass folgende Implikationen gelten:

(a) $\mathcal{H}$ ist 2-unabhängig $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ist 1-universell.

(b) $\mathcal{H}$ ist 1-universell $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ ist 2-unabhängig.

Hinweis: In einem Fall lässt sich die Implikationen leicht zeigen. Im anderen Fall kann man dämliche Gegenbeispiele finden.

Aufgabe 2 – d-Unabhängigkeit ohne Unabhängigkeit

Alice und Bob drehen beide an einem Glücksrad, das 10 gleich große Segmente mit den Zahlen von 0 bis 9 hat. Seien A und B die Ergebnisse von Alice und Bob. Sei $C = (A + B) \bmod 10$.

(a) Zeige: A, B, C sind paarweise unabhängig.

(b) Zeige: A, B, C sind nicht unabhängig.

(c) Finde für beliebiges $d \in \mathbb{N}$ eine Familie von Zufallsvariablen, die d-unabhängig ist aber nicht unabhängig ist.

Aufgabe 3 – Konzentrationsschranken für Summen d-unabhängiger Zufallsvariablen

Sei $d \in \mathbb{N}$ gerade und $\{X_1, \ldots, X_n\}$ eine d-unabhängige Familie von Zufallsvariablen, die alle Verteilung $\mathrm{Ber}(p)$ mit $p = \Omega(1/n)$ haben. Wir betrachten die Summe $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Beachte: Weil $X_1, \ldots, X_n$ nicht unabhängig sind ist X nicht unbedingt binomialverteilt!

Ziel dieser Aufgabe ist es, eine Konzentrationsschranke für X zu zeigen, nämlich, dass für beliebige $\delta > 0$ gilt:

$$\Pr[X - \mathbb{E}[X] \geq \delta \mathbb{E}[X]] = \mathcal{O}(\delta^{-d}(np)^{-d/2}).$$

Dazu schauen wir die „zentrierten“ Zufallsvariablen $Y_i := X_i - p$ an, deren Summe $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$ und den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y^d]$.

(i) Zum Aufwärmen: Sei $d \geq 3$ und $n \geq 3$. Überzeuge dich, dass Folgendes gilt und erkläre kurz warum.

(a) $\mathbb{E}[Y_1^5 Y_2^{42}] = \mathbb{E}[Y_1^5]\mathbb{E}[Y_2^{42}]$

(b) $\mathbb{E}[Y_1^5 Y_2^{42} Y_3] = 0$

(c) $\mathbb{E}[Y_1^5] \leq \mathbb{E}[Y_1^2]$

Im weiteren Verlauf darfst du die zugrundeliegenden Einsichten ohne weitere Begründung verallgemeinert verwenden.

(ii) Zeige: $\mathbb{E}[Y_1^2] \leq p$.

(iii) Seien $i_1, \ldots, i_d \in [n]$ (nicht notwendig verschieden) sowie $S = \{i_1, \ldots, i_d\}$. Zeige:

- Falls $|S| > d/2$ dann gilt $\mathbb{E}[Y_{i_1} \cdot \ldots \cdot Y_{i_d}] = 0$.
- Andernfalls gilt $\mathbb{E}[Y_{i_1} \cdot \ldots \cdot Y_{i_d}] \leq p^{|S|}$.

(iv) Zeige $\mathbb{E}[Y^d] = O((np)^{d/2})$. Du darfst annehmen, dass $d = O(1)$ gilt.
Hinweis: Multipliziere $(\sum_{i=1}^n Y_i)^d$ aus. Ja, das ergibt n^d Terme.

(v) Beweise das ursprüngliche Ziel dieser Aufgabe indem du die Markov Ungleichung auf Y^d anwendest.