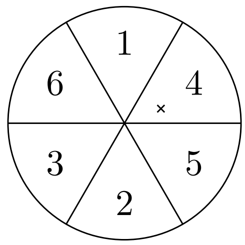
Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 1 – Grundbegriffe

Randomisierte Algorithmik

Aufgabe 1 – Wahrscheinlich weiß ich's noch ...

Eine Darts-Spielerin wirft einen Pfeil auf eine Dartscheibe. Diese ist in 6 gleichgroße Segmente unterteilt, welchen verschiedene Punkte aus $\{1, \ldots, 6\}$ zugeordnet sind. Da sich die Spielerin noch im Training befindet, landet der Pfeil zufällig gleichverteilt auf der Scheibe (jedoch niemals daneben). Im Beispiel rechts hat der Wurf 4 Punkte erzielt.



(a) Modelliere das Zufallsexperiment des Wurfes (nicht das der resultierenden Punktzahl), indem du Ergebnismenge und Wahrscheinlichkeitsmaß eines kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsraumes beschreibst.

(b) Wir interessieren uns nun insbesondere für folgende Eigenschaften eines Wurfes:
- der Abstand der steckenden Pfeilspitze zum Zentrum der Scheibe
- die resultierende Punktzahl
- die resultierende Punktzahl ist gerade
- die resultierende Punktzahl modulo 2

Definiere die zugehörigen Zufallsvariablen und Ereignisse.

(c) Bestimme die Verteilungsfunktion des Abstands aus Teilaufgabe (b).

Im Folgenden interessieren wir uns jetzt nicht mehr für die Position der Pfeilspitze sondern lediglich für die resultierende Punktzahl.

(d) Modelliere dieses Zufallsexperiment, indem einen geeigneten *diskreten* Wahrscheinlichkeitsraumes angibst.

(e) Sei X die Zufallsvariable, die die Punktzahl widerspiegelt. Bestimme folgende Werte:
- Den Erwartungswert von X
- Die Varianz von X
- Den Erwartungswert von $X \cdot \mathbb{1}_{X \text{ is ungerade}}$. Das ist die erwartete Punktzahl einer Spielvariante wo nur ungerade Zahlen gewertet werden.
- Den Erwartungswert eines Wurfes der eine ungerade Punktzahl erzielt hat.

Lösung 1

(a) Die Ergebnismenge ist die Einheitskreisschreibe:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist die Gleichverteilung auf Ω. Mit anderen Worten: Das Wahrscheinlichkeitsmaß weist jeder Teilmenge von Ω mit Flächeninhalt A die Wahrscheinlichkeit A/π zu. Was ein Wahrscheinlichkeitsmaß formal ist, ist nicht Teil der Vorlesung.

(b) Gefragt ist nach folgenden Dingen.

- Die *Zufallsvariable* D, die den Abstand beschreibt. Es gilt $D((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2}$ für $(x, y) \in \Omega$.
- Die *Zufallsvariable* P, die die Punktzahl beschreibt. Wenn wir mit $A_1, A_2, \ldots, A_6 \subseteq \Omega$ die Segmente der Dartscheibe im mathematisch positiven Sinn durchnummerieren, dann gilt:

$$P(\omega) = \begin{cases} 4 & \text{falls } \omega \in A_1 \\ 1 & \text{falls } \omega \in A_2 \\ 6 & \text{falls } \omega \in A_3 \\ 3 & \text{falls } \omega \in A_4 \\ 2 & \text{falls } \omega \in A_5 \\ 5 & \text{falls } \omega \in A_6. \end{cases}$$

- Das Ereignis G, dass die Punktzahl gerade ist, können wir nun auf verschiedene äquivalente Arten hinschreiben. Hier sind drei Vorschläge:

$$G = \{\omega \in \Omega \mid P(w) \in \{2, 4, 6\}\} = \{P \in \{2, 4, 6\}\} = A_1 \cup A_3 \cup A_5.$$

  Beachte: Im mittleren Fall haben die geschweiften Klammern nicht die gewöhnliche Semantik von Mengenklammern, sondern zeigen an, dass hier ein Ereignis definiert wird.

- Die Zufallsvariable $G(\omega) = P(\omega) \bmod 2$ ist besonders insofern als sie nur die Werte 0 und 1 annehmen kann. Solche Zufallsvariablen nennt man Indikatorzufallsvariablen. Es gilt $\mathbb{E}[G] = \Pr[G = 1]$.

(c) Für $d \leq 0$ gilt $\Pr[D \leq d] = 0$. Für $d \geq 1$ gilt $\Pr[D \leq d] = 1$. Für $0 \leq d \leq 1$ betrachten wir das Ereinis $E_d = \{(x, y) \in \Omega \mid x^2 + y^2 \leq d^2\}$. Dieses hat einen Flächeninhalt von $d^2\pi$. Also:

$$\Pr[D \leq d] = \Pr[E_d] = d^2\pi/\pi = d^2.$$

(d) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit Gleichverteilung.

(e) Gefragt war nach folgenden Größen:

- $\mathbb{E}[X] = (1+2+3+4+5+6)/6 = 3.5$.
- $\mathrm{Var}(X) = ((1-3.5)^2+(2-3.5)^2+(3-3.5)^2+(4-3.5)^2+(5-3.5)^2+(6-3.5)^2)/6 \approx 2.92$.
- $\mathbb{E}[X \cdot \mathbb{1}_{X \text{ ist ungerade}}] = (1+0+3+0+5+0)/6 = 1.5$.
- $\mathbb{E}[X \mid X \text{ ist ungerade}] = (1+3+5)/3 = 3$.

Aufgabe 2 – Analogien zu den Rechenregeln

Sei Ω die Menge der Bewohner des fernen Landes Omegon. Betrachte folgende vier Aussagen und erkenne zu welcher der fünf Rechenregeln der Folien die Aussage analog ist. Überlege dir zur verbleibenden Rechenregel selbst eine Verbildlichung. Argumentiere (formal oder intuitiv, wie du möchtest) warum die Rechenregeln gelten.

1. Sei h der Anteil der Hundebesitzer, k der Anteil der Katzenbesitzer und t der Anteil der Bewohner mit Hund oder Katze. Dann gilt: $t \leq h + k$.

2. Angenommen 40% der Bewohner leben im Westen, der Rest im Osten. Wenn g_1 die Durchschnittsgröße der Wessis ist und g_2 die Durchschnittsgröße der Ossis dann ist $g_1 \cdot 0.4 + g_2 \cdot 0.6$ die Durchschnittsgröße in Omegon.

3. Angenommen 40% der Bewohner leben im Westen, der Rest im Osten. Sei k_1 der Anteil der Katzenbesitzer unter Wessis und k_2 der Anteil der Katzenbesitzer unter Ossis. Dann beträgt der Anteil der Katzenbesitzer insgesamt $k = k_1 \cdot 0.4 + k_2 \cdot 0.6$.

4. Wenn ein Bewohner pro Jahr im Schnitt w weiße und b braune Hühnereier verspeist, dann verspeist ein Bewohner pro Jahr im Schnitt $w + b$ Hühnereier.

Lösung 2

1. Vereinigungsschranke / Union Bound. Um sie zu zeigen brauchen wir, dass für disjunkte Ereignisse A und B gilt: $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]$ und dass Wahrscheinlichkeiten nicht negativ sind. Für zwei Ereignisse E_1, E_2 gilt dann:

$$\begin{aligned}
\Pr[E_1 \cup E_2] &= \Pr[E_1 \cup (E_2 \setminus E_1)] = \Pr[E_1] + \Pr[E_2 \setminus E_1] \\
&\leq \Pr[E_1] + \Pr[E_2 \setminus E_1] + \Pr[E_1 \cap E_2] \\
&= \Pr[E_1] + \Pr[(E_2 \setminus E_1) \cup (E_1 \cap E_2)] = \Pr[E_1] + \Pr[E_2].
\end{aligned}$$

   Für mehr als zwei Ereignisse kann man Induktion verwenden.

2. Satz vom totalen Erwartungswert. Hier ein informeller Beweis:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X \mid E_i] \cdot \Pr[E_i] \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x} x \cdot \Pr[X = x \mid E_i] \cdot \Pr[E_i] && \text{(Definition bedingter Erwartungswert)} \\
&\quad = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x} x \cdot \Pr[\{X = x\} \cap E_i] && \text{(Definition bedingte Wahrscheinlichkeit)} \\
&\quad = \sum_{x} x \cdot \sum_{i=1}^{n} \Pr[\{X = x\} \cap E_i] = \sum_{x} x \cdot \Pr[X = x] && \text{(Disjunktheit } E_1, \dots, E_n\text{)} \\
&\quad = \mathbb{E}[X] && \text{(Definition Erwartungswert)}
\end{aligned}$$

3. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit. Das ist ein Spezialfall vom Satz vom totalen Erwartungswert für eine Indikatorzufallsvariable $X = \mathbb{1}_F$, denn dann ist $\Pr[F] = \mathbb{E}[X]$ und $\Pr[F \mid E_i] = \mathbb{E}[X \mid E_i]$.

4. Linearität des Erwartungswertes. Die Aussage wird durch einen Beweis kaum klarer. Hier trotzdem ein Versuch. Für diskrete Wahrscheinlichkeitsräume ergibt sich durch herunterbrechen auf alle möglichen Ergebnisse:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X + Y] &= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + Y(\omega)) \cdot \Pr[\{\omega\}] \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \Pr[\{\omega\}] + \sum_{\omega \in \Omega} Y(\omega) \Pr[\{\omega\}] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

5. Es fehlte: Tail Sum Formula. Analogie:

   > Jeder Bewohner ω schafft eine bestimmte Anzahl ℓ_ω Liegestütze. Sei z_j die Anzahl der Bewohner, die mindestens z_j Liegestütze schaffen. Dann gilt: $\sum_{\omega \in \Omega} \ell_\omega = \sum_{j \geq 1} z_j$ und damit auch $\frac{1}{|\Omega|} \sum_{\omega \in \Omega} \ell_\omega = \sum_{j \geq 1} \frac{z_j}{|\Omega|}$. Die linke Summe ist die mittlere Anzahl Liegestütze und $\frac{z_j}{|\Omega|}$ ist der Anteil der Bewohner, die j Liegestütze schaffen.

   Die Formel lässt sich durch vertauschen von Summen herleiten. Für beliebige nicht-negative reelle Zahlen $(x_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ gilt: $\sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{j} x_{i,j} = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq i} x_{i,j}$, denn in beiden Fällen wird $x_{i,j}$ genau dann gezählt wenn $j \geq i$ gilt. Wir wenden das an für $x_{i,j} = \Pr[X = i]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{j \geq 1} j \cdot \Pr[X = j] = \sum_{j \geq 1} \sum_{i=1}^{j} \Pr[X = j] \\
&= \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq i} \Pr[X = j] = \sum_{i \geq 1} \Pr[X \geq i].
\end{aligned}$$