Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 2 – The Power of Randomness

Randomisierte Algorithmik

Aufgabe 1 – Polynomgleichungen überprüfen

Sei $\mathbb{F}$ ein Körper, zum Beispiel $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$. Gegeben sei eine Polynomgleichung, zum Beispiel:

$$(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)(x+5)(x-6) \stackrel{?}{=} x^6 - 7x^3 + 25$$

(a) Argumentiere: Für den Fall, dass die Beispielgleichung *nicht* gilt, gibt es höchstens 6 Werte für x, sodass auf beiden Seiten das gleiche herauskommt.

(b) Beschreibe einen randomisierten Algorithmus der entscheidet ob eine Polynomgleichung gilt oder nicht. Dieser darf falsche Polynomgleichungen mit kleiner Wahrscheinlichkeit als korrekt akzeptieren. Was lässt sich über diese Wahrscheinlichkeit sagen?

Aufgabe 2 – Matrixprodukte überprüfen[1]

Seien $\mathbb{F}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

1. Zeige: Falls $C, C' \in \mathbb{F}^{n\times n}$ zwei verschiedene Matrizen sind und $v \in \{0,1\}^n$ uniform zufällig gewählt wird, dann gilt: $\Pr[C \cdot v \neq C' \cdot v] \geq \frac{1}{2}$.

2. Beschreibe einen Algorithmus der bei Eingabe $A, B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ ein Bit X ausgibt mit $X = 1$ falls $A \cdot B = C$ und $\Pr[X = 1] \leq 1/2$ falls $A \cdot B \neq C$. Der Algorithmus soll nur $O(n^2)$ Körperoperationen durchführen.

Aufgabe 3 – Deterministische Auswertung von $\bar{\wedge}$-Bäumen

Sei A ein deterministischer Algorithmus der einen Bitvektor $I \in \{0,1\}^n$ als Eingabe erhält (mit $n = 2^d$) und den Wert des vollständigen balancierten $\bar{\wedge}$-Baums berechnet, dessen Blätter gemäß I beschriftet sind. Zeige: Es gibt eine Eingabe $I_A \in \{0,1\}^n$, sodass A jede Blattbeschriftung inspizieren muss.

[1] Bekannt als Algorithmus von Freivald.