Karlsruher Institut für Technologie

Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

# Übungsblatt 12 – Probabilistic Method

**Randomisierte Algorithmik**

## Aufgabe 1 – Ein Kinderspiel

Alice und Bob spielen ein asymmetrisches Spiel auf einer Reihe von Feldern $0, 1, 2, \ldots, n$. Zu Beginn liegen $k$ Tokens auf Feld 0. Jede Runde läuft wie folgt ab.

1. Alice wählt zwei disjunkte Menge $T_1$ und $T_2$ von Tokens.
2. Bob wählt daraufhin $i \in \{1, 2\}$.
3. Die Tokens aus $T_i$ werden entfernt.
4. Die Tokens aus $T_{2-i}$ bewegen sich jeweils ein Feld nach rechts.

Alice gewinnt, sobald ein Token Feld $n$ erreicht. Sie verliert, sobald sie zwei leere Mengen wählt. Löse folgende Aufgaben.

(i) Gib eine Strategie für Alice, mit der sie für $k \geq 2^n$ gewinnt.

(ii) Benutze die probabilistische Methode, um zu zeigen, dass es eine Gewinnstrategie für Bob gibt wenn $k < 2^n$.

(iii) Bonus: Konstruiere eine Gewinnstrategie für Bob (ohne probabilistische Methode).

## Lösung 1

(i) Ohne Einschränkung sei $k = 2^n$, denn Alice kann zusätzliche Tokens ignorieren. Alices Strategie ist es, die verbleibenden Tokens stets gleichmäßig auf $T_1$ und $T_2$ aufzuteilen. Dann wird stets die Hälfte der Tokens weiterwandern und die andere Hälfte wird entfernt. Eine einfache Induktion zeigt, dass nach $0 \leq i \leq n$ Runden genau $2^{n-i}$ Tokens auf Feld $i$ liegen. Also hat Alice nach $n$ Runden gewonnen.

(ii) Bob spielt uniform zufällig. Für Alice betrachten wir eine beliebige Strategie. Wir können das Spiel nun aus Sicht eines einzelnen Tokens $t$ betrachten. Jedes mal, wenn $t$ von Alice ausgewählt wird, wandert es mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ einen Schritt nach rechts und wird mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ entfernt. Wir können uns ohne Einschränkung vorstellen, dass Alice nie verliert (d.h. zwei leere Menge wählt) solange noch Tokens existieren und weiterspielt selbst wenn sie bereits gewonnen hat. Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass Token $t$ jemals Position $i \in \mathbb{N}$ erreicht exakt $2^{-i}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass $t$ jemals Position $n$ erreicht ist damit $2^{-n}$. Die erwartete Anzahl von Tokens die Position $n$

erreichen ist damit $2^{-n} \cdot k$, was nach Vorraussetzung $< 1$ ist. Damit ist es möglich, dass kein Token Position $n$ erreicht. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Bob gewinnt positiv. Also ist Alices Strategie keine Gewinnstrategie. Weil Alices Strategie beliebig war, gibt es keine Gewinnstrategie für Alice. Also gibt es eine Gewinnstrategie für Bob.

(iii) Wir stellen uns vor, dass ein Token, das auf Feld $i$ liegt, einen Wert von $2^i$ hat, das heißt der Wert eines Tokens verdoppelt sich wenn es ein Feld nach rechts wandert. Wenn Alice nun zwei Mengen $T_1$ und $T_2$ wählt, von Wert $w_1$ und $w_2$, dann sollte Bob stets die Menge der Tokens von größerem Wert entfernen. Ohne Einschränkung sei das $T_1$. Er lässt damit zu, dass sich der Wert der Tokens in $T_2$ verdoppelt. Weil für $w_1 \geq w_2$ aber $2w_2 \leq w_1 + w_2$ gilt kann der Gesamtwert nicht gewachsen sein. Weil am Anfang ein Wert von $k$ vorhanden ist und ein Sieg von Alice einen Wert von mindestens $2^n$ vorraussetzt, kann Alice nicht gewinnen falls $k < 2^n$ gilt.

## Aufgabe 2 – Größere[1] unabhängige Mengen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $n$ Knoten und $m$ Kanten. Zeige mithilfe der probabilistischen Methode, dass $G$ eine unabhängige Menge der Größe $\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$ besitzt.

**Hinweis:** Zufällige Permutation der Knoten.

## Lösung 2

Wir permutieren die Knoten zufällig. Sei anschließend

$$I = \{v \in V \mid v \text{ kommt in der Permutation vor all seinen Nachbarn}\}.$$

Es dürfte klar sein, dass $I$ eine unabhängige Menge ist. Es ist ebenfalls klar, dass $v$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{\deg(v)+1}$ in $I$ aufgenommen wird, denn dafür muss $v$ in der zufälligen Permutation unter $\deg(v) + 1$ Knoten der Erste sein. Damit gilt

$$\mathbb{E}[|I|] = \mathbb{E}\Big[\sum_{v \in V} [v \in I]\Big] = \sum_{v \in V} \Pr[v \in I] = \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1}.$$

Nach dem Expectation Argument existiert also insbesondere eine unabhängige Menge der geforderten Größe.

---

[1]**Bemerkung:** Sei $d = \frac{2m}{n}$ der Durchschnittsgrad der Knoten. In der Vorlesung haben wir eine unabhängige Menge der Größe $\frac{n}{2d}$ konstruiert. Für die Größe $U$ der unabhängigen Menge, die durch diese Aufgabe garantiert ist, gilt mithilfe einer Ungleichung über arithmetische und harmonische Mittel:

$$U = \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1} = n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1}\right) \geq n\left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg(v)+1\right)^{-1} = \frac{n}{d + 1}.$$

Das ist größer als $\frac{n}{2d}$ für $d > 1$.[2]

[2]"*Aber was ist wenn $d < 1$ gilt?*" Dann ist der Satz der Vorlesung gar nicht anwendbar.

## Aufgabe 3 – Reprise: Unabhängige Regenbogenmengen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = kc$ Knoten, die mit $c$ Farben gefärbt sind, wobei jede Farbe genau $k$ mal vertreten ist. Der Maximalgrad sei $\Delta$. Zeige: Falls $k \geq 8\Delta$ so gibt es eine unabhängige Regenbogenmenge.

## Lösung 3

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine einfache Verallgemeinerung der Perlenketten-Analyse der Vorlesung.

Wir wählen die Regenbogenmenge $R$ wieder, indem wir aus jeder Farbklasse einen Knoten uniform zufällig ziehen. Ziel ist zu zeigen, dass $R$ mit positiver Wahrscheinlichkeit eine unabhängige Menge ist.

Dafür definieren wir ein schlechtes Ereignisse $B_{\{u,v\}}$ für jede Kante $\{u, v\}$ des Graphen, das besagt, dass sowohl $u$ als auch $v$ in $R$ gelandet sind. Es gilt wieder $\Pr[B_{\{u,v\}}] \leq \frac{1}{k^2} =: p$.

Ein anderes Ereignis $B_{\{u',v'\}}$ kann mit $B_{\{u,v\}}$ nur dann zu tun haben, wenn $u'$ oder $v'$ eine Farbe hat, die auch $u$ oder $v$ hat. Es gibt also höchstens $d = 2k\Delta - 2$ solche Ereignisse (2 relevante Farben, jeweils $k$ relevante Knoten, jeweils $\Delta$ inzidente Kanten, wobei $\{u, v\}$ selbst von $u$ und $v$ aus jeweils nicht mitgezählt wird).

Damit gilt $4pd = 4\frac{1}{k^2}(2k\Delta - 2) < \frac{8\Delta}{k} \leq 1$. Damit können wir Lovász Local Lemma anwenden.