

Übungsblatt 12 – Probabilistic Method

Randomisierte Algorithmik

Aufgabe 1 – Ein Kinderspiel

Alice und Bob spielen ein asymmetrisches Spiel auf einer Reihe von Feldern $0, 1, 2, \dots, n$. Zu Beginn liegen k Tokens auf Feld 0. Jede Runde läuft wie folgt ab.

1. Alice wählt zwei disjunkte Menge T_1 und T_2 von Tokens.
2. Bob wählt daraufhin $i \in \{1, 2\}$.
3. Die Tokens aus T_i werden entfernt.
4. Die Tokens aus T_{2-i} bewegen sich jeweils ein Feld nach rechts.

Alice gewinnt, sobald ein Token Feld n erreicht. Sie verliert, sobald sie zwei leere Mengen wählt. Löse folgende Aufgaben.

- (i) Gib eine Strategie für Alice, mit der sie für $k \geq 2^n$ gewinnt.
- (ii) Benutze die probabilistische Methode, um zu zeigen, dass es eine Gewinnstrategie für Bob gibt wenn $k < 2^n$.
- (iii) Bonus: Konstruiere eine Gewinnstrategie für Bob (ohne probabilistische Methode).

Aufgabe 2 – Größere¹ unabhängige Mengen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Zeige mithilfe der probabilistischen Methode, dass G eine unabhängige Menge der Größe $\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1}$ besitzt.

Hinweis: Zufällige Permutation der Knoten.

¹**Bemerkung:** Sei $d = \frac{2m}{n}$ der Durchschnittsgrad der Knoten. In der Vorlesung haben wir eine unabhängige Menge der Größe $\frac{n}{2d}$ konstruiert. Für die Größe U der unabhängigen Menge, die durch diese Aufgabe garantiert ist, gilt mithilfe einer Ungleichung über arithmetische und harmonische Mittel:

$$U = \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1} = n \cdot \left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v) + 1} \right) \geq n \left(\frac{1}{n} \sum_{v \in V} \deg(v) + 1 \right)^{-1} = \frac{n}{d + 1}.$$

Das ist größer als $\frac{n}{2d}$ für $d > 1$.²

²“Aber was ist wenn $d < 1$ gilt?” Dann ist der Satz der Vorlesung gar nicht anwendbar.

Aufgabe 3 – Reprise: Unabhängige Regenbogenmengen

Sei $G = (V, E)$ ein Graph mit $|V| = kc$ Knoten, die mit c Farben gefärbt sind, wobei jede Farbe genau k mal vertreten ist. Der Maximalgrad sei Δ . Zeige: Falls $k \geq 8\Delta$ so gibt es eine unabhängige Regenbogenmenge.