Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 13 – Random Graphs

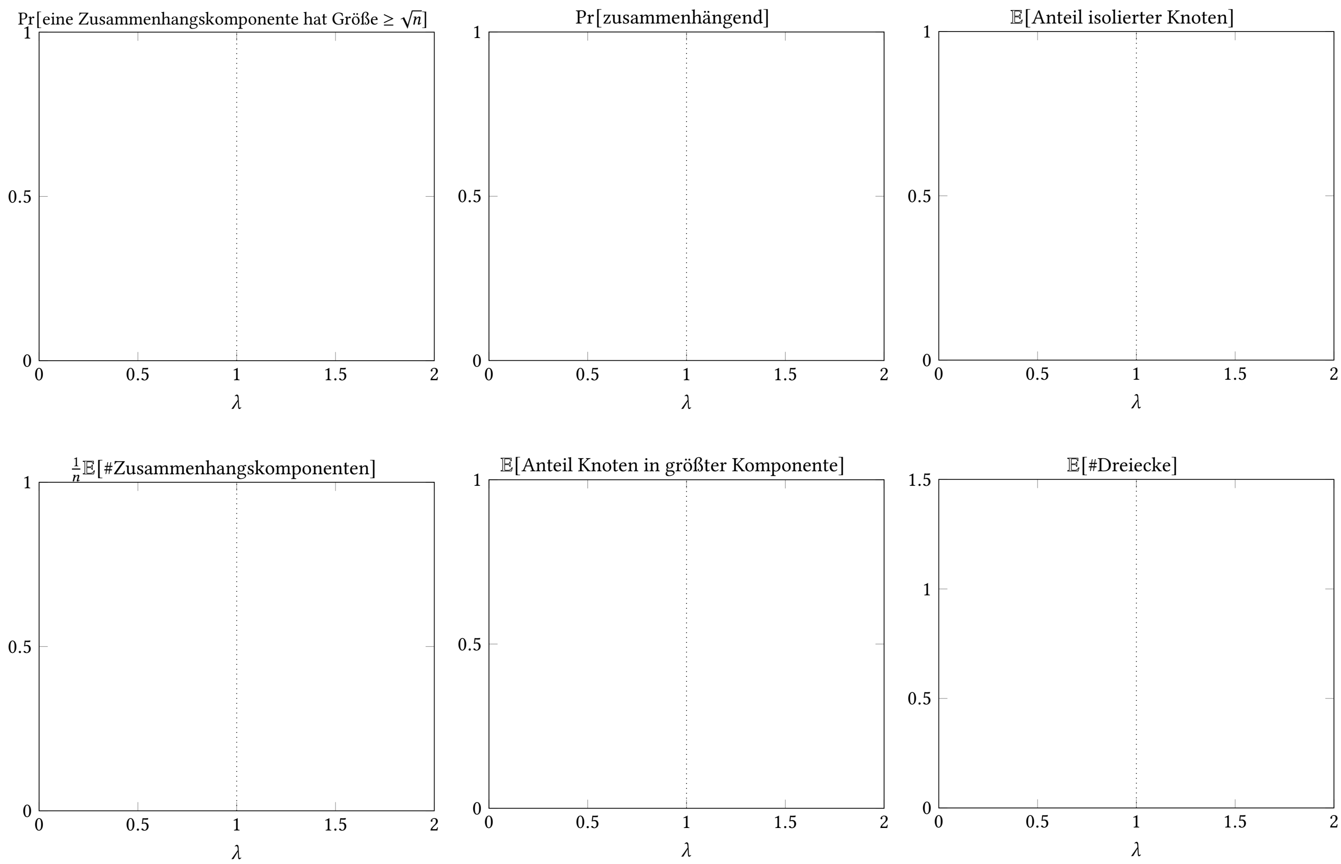
Randomisierte Algorithmik

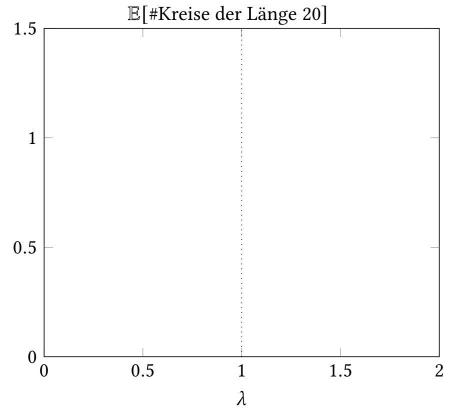
Aufgabe 1 – Intuition für Erdős-Renyi Graphen

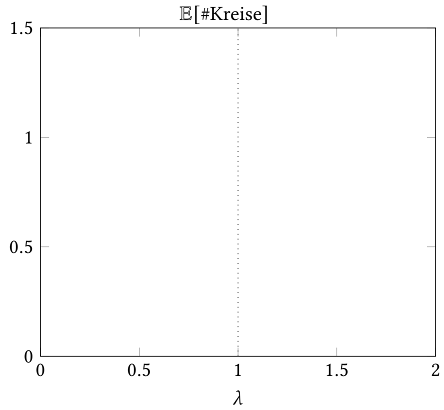
Wir betrachten den Erdős-Renyi Graphen $G(n, \lambda n/2)$ oder den Gilbert Graph $G(n, \lambda/n)$ (beide führen zum selben Ergebnis). Der erwartete Knotengrad ist also $\lambda \pm O(1/n)$.

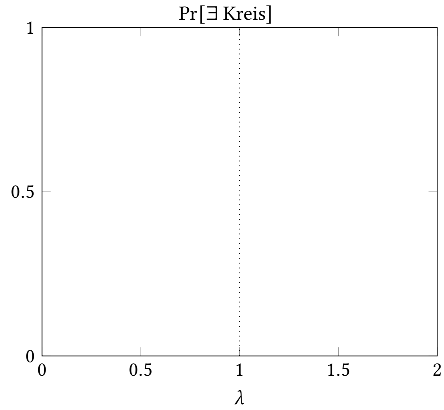
(i) Skizziere den Verlauf der folgender Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte für $n \longrightarrow \infty$ in Abhängigkeit von $\lambda \in [0, 2]$.

Hinweis: Es geht hier nicht um numerische Exaktheit sondern um den qualitativen Verlauf. Wo nimmt die Kurve den Wert 0,1 bzw. ∞ an? Passiert besonderes bei $\lambda = 1$?





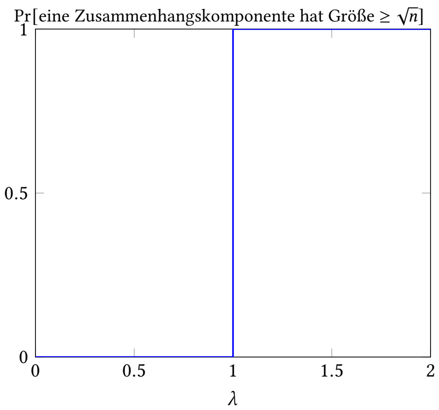




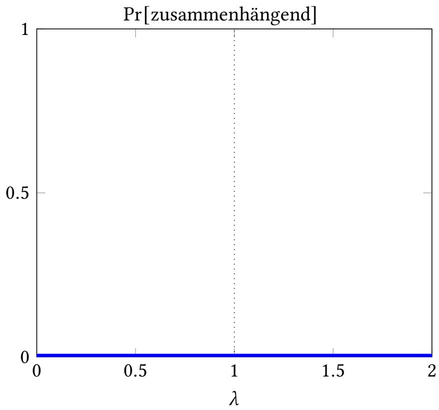
(ii) Sei $\lambda = \Theta(1)$. Rate: Was gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit für (die Größenordnung) des minimalen und maximalen Knotengrads in Abhängigkeit von n?

$$\min_{v\in[n]} \deg(v) = \text{............} \qquad \max_{v\in[n]} \deg(v) = \Theta\big(\text{............}\big)$$

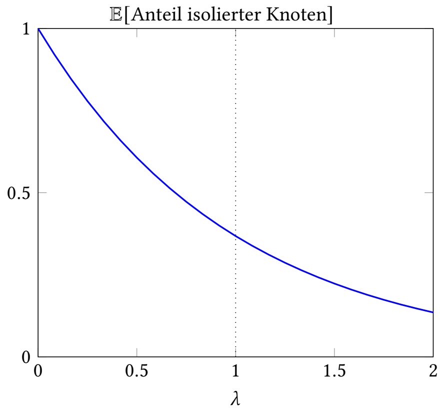
Lösung 1



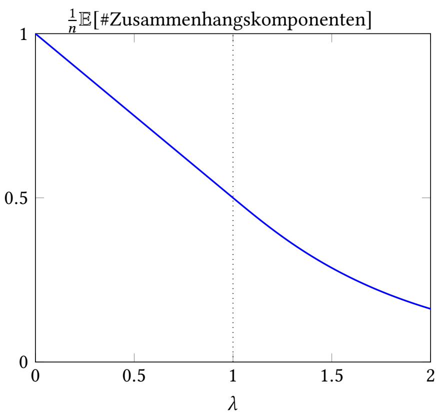
folgt aus „Sudden Emergence“ Ergebnis



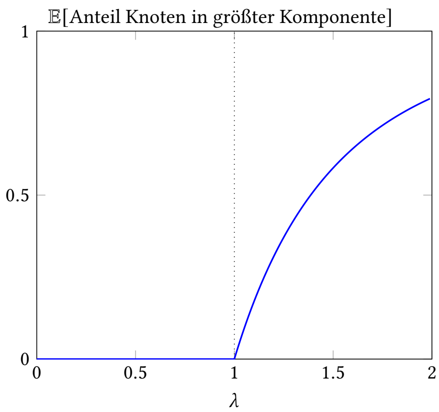
siehe nächste Frage



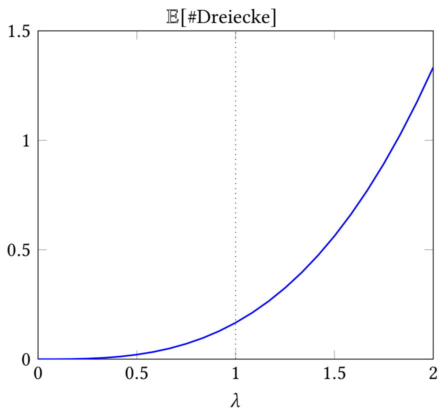
$\Pr_{X\sim \mathrm{Po}(\lambda)}[X = 0] = e^{-\lambda}$



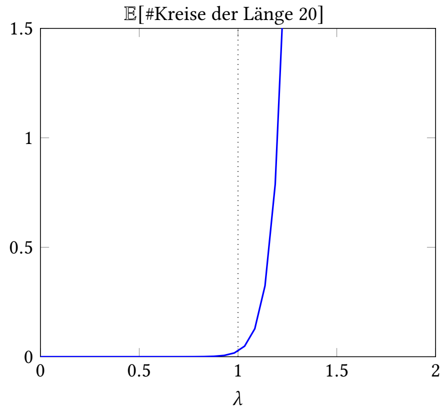
experimentelle Ergebnisse
für $n = 1000000$



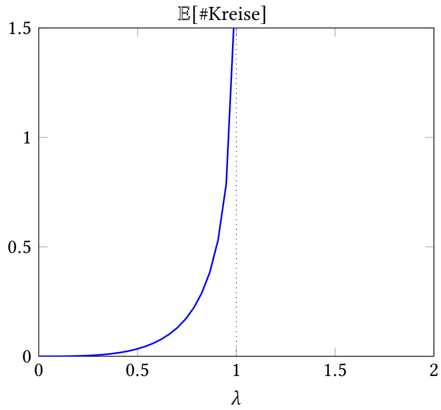
$\frac{\lambda+W(-e^{-\lambda}\lambda)}{\lambda}$ für $\lambda \geq 1$,
siehe Aufgabe 3



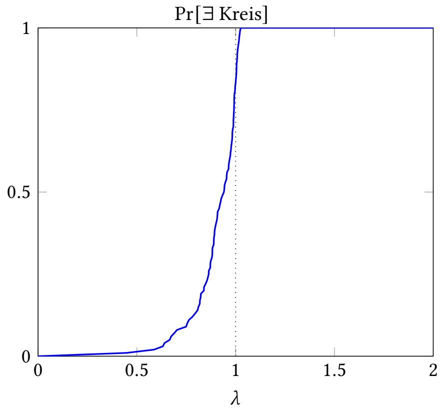
$\binom{n}{3}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^3 \to \lambda^3/6$



$\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-19)}{2\cdot 20}\cdot\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{20} \to \lambda^{20}/40$



$\to \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\lambda^k}{2k} = \frac{1}{4}(-\lambda^2 - 2\lambda - 2\ln(1-\lambda))$



experimentelle Ergebnisse
für $n = 1000000$

(ii) Der minimale Knotengrad ist mit hoher Wahrscheinlichkeit 0. In Aufgabenteil (a) haben wir ja sogar gesehen, dass es erwartet sogar $\Theta(n)$ isolierte Knoten gibt. Ein formaler Beweis könnte etwas trickreich sein.

Der maximale Knotengrad ist mit hoher Wahrscheinlichkeit $\Theta(\frac{\log n}{\log\log n})$. Darauf kommt man, wenn man berücksichtigt, dass die erwartete Anzahl von Knoten von Grad d etwa $\mathbb{E}[N_d] \approx n \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^d}{d!}$ beträgt. Setzt man $\mathbb{E}[N_d] = 1$ so kriegt man $d = \Theta(\frac{\log n}{\log\log n})$. Die hauptsächliche ist hier welches d man braucht damit $d! \approx n$ gilt.

Aufgabe 2 – Knotengrade in Erdős-Renyi Graphen

Auf Folie 15 des Abschnitts über Balls-Into-Bins und Poissonisierung haben wir gezeigt, dass $\mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ *für* $n \to \infty$ *gegen* $\mathrm{Pois}(\lambda)$ *konvergiert (bzw. die CDFs entsprechend konvergieren). Du darfst in folgender Aufgabe ohne Beweis verwenden:*

> **Lemma.** Sei $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{N}$ und $p_1, p_2, \ldots \in (0,1)$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Sei ferner $X_n \sim \mathrm{Bin}(t_n, p_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Falls $t_n \longrightarrow \infty$ und $t_n \cdot p_n \longrightarrow \lambda$ für $n \to \infty$ gilt dann folgt $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ für $n \to \infty$.

Sei $\lambda > 0$ und $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Wir betrachten Varianten von Erdős-Renyi Graphen aus der Vorlesung. Wir stellen den erwarteten Knotengrad auf ungefähr λ und wollen (mit obigem Lemma) zeigen, dass die Verteilung eines Knotens sich asymptotisch $\mathrm{Pois}(\lambda)$ nähert wenn $n \to \infty$ geht (während λ konstant bleibt).

(i) Sei X_n der Grad von Knoten 1 in $G(n,p)$ mit $p = \lambda/n$. Zeige $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

(ii) Sei X_n der Grad von Knoten 1 in $G^{\mathrm{UE}}(n,m)$ mit $m = \lfloor \lambda n/2 \rfloor$. Zeige $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

(iii) Sei X_n der Grad von Knoten 1 in $G(n,m)$ mit $m = \lfloor \lambda n/2 \rfloor$. Zeige $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

Hinweis: Der letzte Aufgabenteil ist mit Abstand der schwierigste. Es bietet sich an $G(n,m)$ mithilfe eines Couplings zwischen zwei Gilbert Graphen $G^- = (n,p^-)$ und $G^+ = (n,p^+)$ „einzusperren“.

Lösung 2

(i) Weil jede der $n-1$ zu Knoten 1 inzidenten Kanten mit Wahrscheinlichkeit λ/n vorhanden ist gilt $X_n \sim \text{Bin}(n-1, \lambda/n)$. Wir verwenden das Lemma mit $t_n = n-1$ und $p_n = \lambda/n$. Offenbar gilt $t_n \to \infty$ und $t_n p_n \to \lambda$. Also folgt $X_n \to X$ wie gewünscht.

(ii) Weil jeder der $2m$ Kantenendpunkte mit Wahrscheinlichkeit $1/n$ an Knoten 1 angeschlossen wird gilt $X_n = \text{Bin}(2m, \frac{1}{n})$. Wir wenden das Lemma an mit $t_n = 2m = 2\lfloor \lambda n/2 \rfloor$ und $p_n = 1/n$. Offenbar gilt dann $t_n \to \infty$ und $t_n p_n \to \lambda$. Also folgt $X_n \to X$ wie gewünscht.

(iii) Sei $G = G(n, m)$. Wir betrachten außerdem die Gilbert Graphen $G^- = G(n, p^-)$ sowie $G^+ = G(n, p^+)$ wobei $p^- := \frac{\lambda}{n} - n^{-4/3}$ und $p^+ := \frac{\lambda}{n} + n^{-4/3}$. Weil sich p^- und p^+ nur geringfügig von $p = \lambda/n$ unterscheiden konvergiert der Grad X_n^- von Knoten 1 in G^- sowie der Grad X_n^+ von Knoten 1 in G^+ wie in Aufgabenteil (i), es gilt also $X_n^- \xrightarrow{\text{d}} X$ sowie $X_n^+ \xrightarrow{\text{d}} X$. Um den Grad X_n zwischen X_n^- und X_n^+ „einzusperren", verwenden wir ein Coupling.

Sei dazu $\mathcal{E}$ die Menge der $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten. Im gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum gibt es unabhängig für jedes $e \in \mathcal{E}$ eine Zufallsvariable $Z_e \sim \mathcal{U}([0,1])$. Die Kantenmenge von E^-, E und E^+ von G^-, G und G^+ (bzw. formal von deren „Kopien" $G^{-\prime}$, G' und $G^{+\prime}$ mit gleicher Verteilung) seien:

$$\begin{aligned}
E^- &= \{e \in \mathcal{E} \mid Z_e \le p^-\}\\
E \; &= \{e \in \mathcal{E} \mid Z_e \text{ gehört zu den } m \text{ kleinsten Zahlen in } (Z_e)_{e\in\mathcal{E}}\}\\
E^+ &= \{e \in \mathcal{E} \mid Z_e \le p^+\}
\end{aligned}$$

Es dürfte klar sein, dass sich so die richtigen Verteilungen ergeben, es sich also um ein gültiges Coupling handelt. Sei nun $m^- = |E^-|$ und $m^+ = |E^+|$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
m^- &\sim \text{Bin}\left(\tbinom{n}{2}, p^-\right)\\
\mathbb{E}[m^-] &= \tbinom{n}{2}, p^- = \tfrac{n(n-1)}{2}\left(\tfrac{\lambda}{n} - n^{-4/3}\right) = \tfrac{\lambda n}{2} - \Theta(n^{2/3}) = m - \Theta(n^{2/3})\\
\Pr[m^- \ge m] &\le \Pr[|m^- - \mathbb{E}[m^-]| \ge \Theta(n^{2/3})] \overset{\text{Cheb.}}{\le} \frac{\text{Var}(m^-)}{\Theta(n^{4/3})} = \frac{\Theta(n)}{\Theta(n^{4/3})} = \Theta(n^{-1/3}).
\end{aligned}$$

Analog zeigt man, dass $\Pr[m^+ \le m] = \Theta(n^{-1/3})$. Wir betrachten nun das Ereignis $\text{succ} = \{m^- \le m \le m^+\}$. Tritt succ ein, so gilt nach Konstruktion $E^- \subseteq E \subseteq E^+$ und damit $X_n^- \le X_n \le X_n^+$. Nach Rechnung von eben und Union Bound gilt $\Pr[\text{succ}] = 1 - \Theta(n^{-1/3})$. Es folgt für $i \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\Pr[X_n \le i] &= \Pr[X_n \le i \wedge \text{succ}] + \Pr[X_n \le i \wedge \overline{\text{succ}}] \le \Pr[X_n^- \le i \wedge \text{succ}] + \Theta(n^{-1/3})\\
&\le \Pr[X_n^- \le i] + \Theta(n^{-1/3}) \longrightarrow \Pr[X \le i]. \quad \text{// weil } X_n^- \xrightarrow{\text{d}} X
\end{aligned}$$

Sehr ähnlich folgt auch

$$\begin{aligned}
\Pr[X_n \le i] &\ge \Pr[X_n \le i \wedge \text{succ}] \ge \Pr[X_n^+ \le i \wedge \text{succ}] = \Pr[X_n^+ \le i] - \Pr[X_n^+ \le i \wedge \overline{\text{succ}}]\\
&\ge \Pr[X_n^+ \le i] - \Theta(n^{-1/3}) \longrightarrow \Pr[X \le i]. \quad \text{// weil } X_n^+ \xrightarrow{\text{d}} X
\end{aligned}$$

Damit gilt $\Pr[X_n \le i] \longrightarrow \Pr[X \le i]$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und es folgt $X_n \xrightarrow{\text{d}} X$.

Aufgabe 3 – Aussterbewahrscheinlichkeit in Galton-Watson Bäumen

Sei $\mathrm{GWT}(\lambda)$ der Galton-Watson Baum, dem die Verteilung $\mathrm{Pois}(\lambda)$ zugrunde liegt.

(i) Sei n_i die Anzahl der Knoten in Ebene i von $\mathrm{GWT}(\lambda)$. Die Wurzelebene sei Ebene 0. Was ist $\mathbb{E}[n_i]$?

(ii) Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei p_i die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathrm{GWT}(\lambda)$ mindestens einen Knoten auf Ebene i hat. Drücke p_{i+1} in Abhängigkeit von p_i aus.
Hinweis: Verwende Aufgabe 3 (iv) von Blatt 9.

(iii) Bestimme für $\lambda \in \{0, 0.5, 1, 1.1, 1.5\}$ (oder für beliebige λ) jeweils eine Approximationen für die Wahrscheinlichkeit $s(\lambda)$, dass $\mathrm{GWT}(\lambda)$ unendlich ist. Ein Computeralgebrasystem könnte nützlich sein (z.B. Wolfram Alpha.

Zusatzüberlegung: Was ist die Erwartete Anzahl von Knoten auf Ebene i?

Lösung 3

(i) Jeder Knoten hat erwartet λ Kinder in der nächsten Ebene. Es ist recht intuitiv, dass daher $\mathbb{E}[n_i] = \lambda^i$ gilt. Formal kann man bedingte Erwartungswerte und Induktion verwenden. Kompakt aufgeschrieben ergibt sich:

$$\mathbb{E}[n_i] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[n_i \mid n_{i-1}]] = \mathbb{E}[\lambda n_{i-1}] = \lambda \mathbb{E}[n_{i-1}] \overset{\text{Ind.}}{=} \lambda \lambda^{i-1} = \lambda^i.$$

(ii) Sei $\mathrm{depth}(T) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ die Tiefe eines Baumes T. Sei $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$ die Anzahl von Kindern der Wurzel von $\mathrm{GWT}(\lambda)$ und seien $T^{(1)}, T^{(2)}, \ldots, T^{(X)}$ die bei diesen Kindern startenden Unterbäume. Sei $Y = |\{i \in \{1, \ldots, X\} \mid \mathrm{depth}(T^{(i)}) \geq i - 1\}|$ die Anzahl der Unterbäume mit Tiefe mindestens $i - 1$. Weil die Unterbäume die selbe Verteilung wie $\mathrm{GWT}(\lambda)$ haben, gilt $\Pr[\mathrm{depth}(T^{(i)}) \geq i - 1] = p_{i-1}$ für alle $i \in \{1, \ldots, X\}$. Weil Unterbäume unabhängig voneinander sind, gilt ferner $Y \sim \mathrm{Bin}(X, p_{i-1})$. Damit folgt $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda p_{i-1})$ aus Aufgabe 3 (iv) von Blatt 9. Also gilt:

$$\begin{aligned} p_i &= \Pr[\mathrm{depth}(\mathrm{GWT}(\lambda)) \geq i] = \Pr[\exists j \in \{1, \ldots, X\} : \mathrm{depth}(T^{(j)}) \geq i - 1] \\ &= \Pr[Y > 0] = 1 - \Pr[Y = 0] = 1 - e^{-\lambda p_{i-1}}. \end{aligned}$$

(iii) Es ist intuitiv, dass $s(\lambda) = \lim_{i\to\infty} p_i$ gilt, aber wir zeigen es trotzdem formal. Die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathrm{GWT}(\lambda)$ *genau* i Ebenen hat ist $q_i = p_i - p_{i+1}$. Offenbar gilt dann $s(\lambda) + q_0 + q_1 + \ldots = 1$. Es folgt:

$$s(\lambda) = 1 - \lim_{i\to\infty} \sum_{j=0}^{i-1} q_j = \lim_{i\to\infty} \left(p_0 - \sum_{j=0}^{i-1} (p_j - p_{j+1})\right) = \lim_{i\to\infty} p_i.$$

Nach (ii) gilt $p_0 = 1$ und $p_{i+1} = 1 - e^{-\lambda p_i}$ für alle $i \geq 0$. Es bietet sich an, die Funktion $f(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ zu betrachten. Iteriertes Anwenden der Funktion startend bei $x = 1$

generiert die Folge $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Weil f monoton fallend ist und unser Startwert $f(p_0) < p_0$ erfüllt, folgt, dass die Folge monoton fallend ist. Damit ist $s(\lambda) = \lim_{i\to\infty} p_i$ der größten Fixpunkt von f. Für $\lambda \leq 1$ ist $f(x) = 1 - e^{-\lambda x} \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - (1-x) = x$ mit Gleichheit genau für $x = 0$. Für solche λ gilt also $s(\lambda) = 0$.

Für $\lambda > 1$ ist die größte Lösung von $x = 1 - e^{-\lambda x}$ verschieden von der trivialen Lösung $x = 0$. Ein Computeralgebrasystem kann diese als $s(\lambda) = \frac{\lambda + W(-\lambda e^{-\lambda})}{\lambda}$ bestimmen wobei W die sogenannte Labertsche W-Funktion ist. Numerisch kann man dann $s_{1.1} = 0.176134$ und $s_{1.5} = 0.582812$ berechnen. Ein Plot ist in Aufgabe 1 zu finden.