Stefan Walzer
ITI Prof. Sanders
Wintersemester 2023/2024

Übungsblatt 13 – Random Graphs

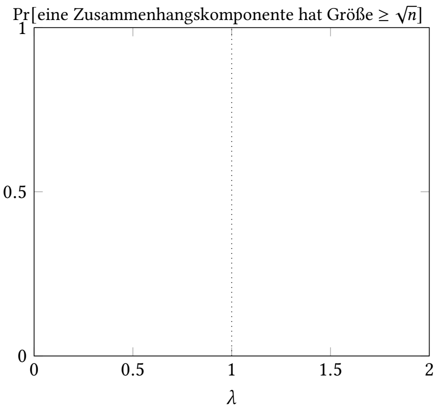
Randomisierte Algorithmik

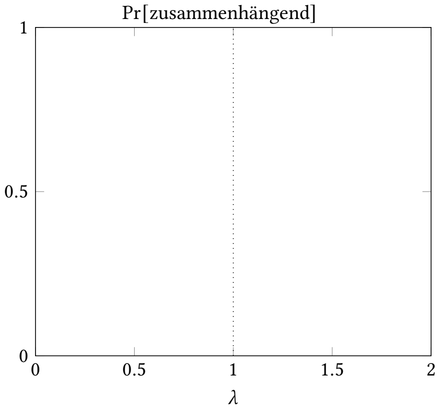
Aufgabe 1 – Intuition für Erdős-Renyi Graphen

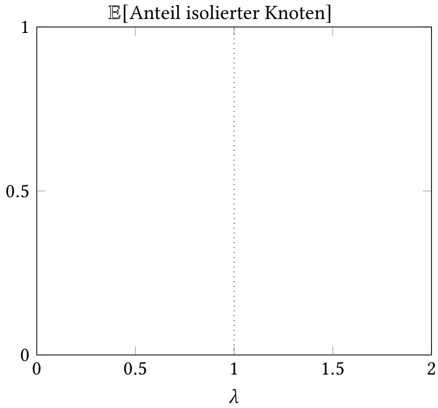
Wir betrachten den Erdős-Renyi Graphen $G(n, \lambda n/2)$ oder den Gilbert Graph $G(n, \lambda/n)$ (beide führen zum selben Ergebnis). Der erwartete Knotengrad ist also $\lambda \pm O(1/n)$.

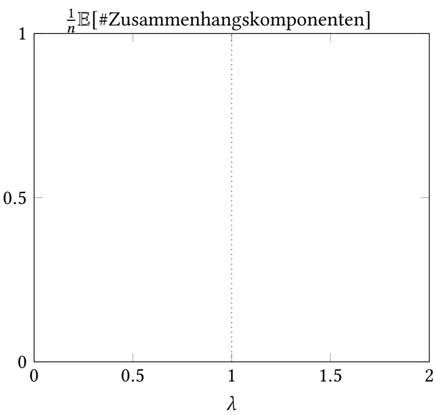
(i) Skizziere den Verlauf der folgender Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte für $n \longrightarrow \infty$ in Abhängigkeit von $\lambda \in [0, 2]$.

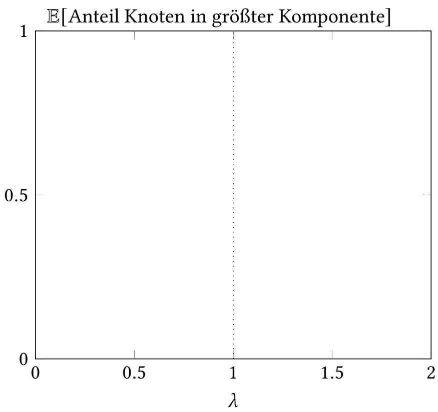
Hinweis: Es geht hier nicht um numerische Exaktheit sondern um den qualitativen Verlauf. Wo nimmt die Kurve den Wert 0,1 bzw. ∞ an? Passiert besonderes bei $\lambda = 1$?

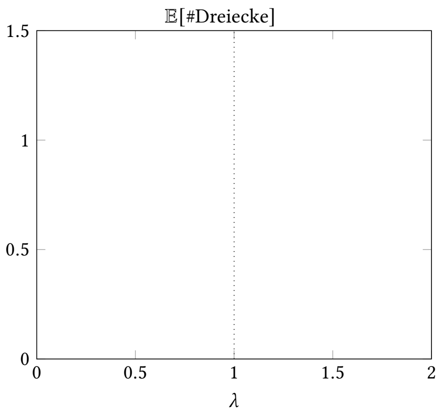


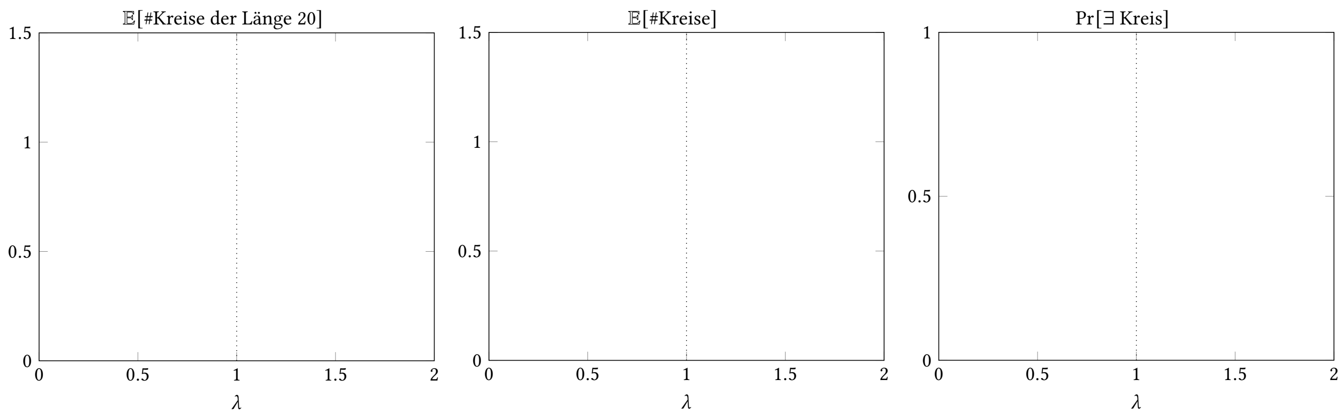












(ii) Sei $\lambda = \Theta(1)$. Rate: Was gilt mit hoher Wahrscheinlichkeit für (die Größenordnung) des minimalen und maximalen Knotengrads in Abhängigkeit von n?

$$\min_{v \in [n]} \deg(v) = \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \max_{v \in [n]} \deg(v) = \Theta\Big(\ldots\ldots\ldots\ldots\Big)$$

Aufgabe 2 – Knotengrade in Erdős-Renyi Graphen

Auf Folie 15 des Abschnitts über Balls-Into-Bins und Poissonisierung haben wir gezeigt, dass $\mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ *für* $n \to \infty$ *gegen* $\mathrm{Pois}(\lambda)$ *konvergiert (bzw. die CDFs entsprechend konvergieren). Du darfst in folgender Aufgabe ohne Beweis verwenden:*

Lemma. Sei $t_1, t_2, \ldots \in \mathbb{N}$ und $p_1, p_2, \ldots \in (0,1)$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Sei ferner $X_n \sim \mathrm{Bin}(t_n, p_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Falls $t_n \longrightarrow \infty$ und $t_n \cdot p_n \longrightarrow \lambda$ für $n \to \infty$ gilt dann folgt $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$ für $n \to \infty$.

Sei $\lambda > 0$ und $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Wir betrachten Varianten von Erdős-Renyi Graphen aus der Vorlesung. Wir stellen den erwarteten Knotengrad auf ungefähr λ und wollen (mit obigem Lemma) zeigen, dass die Verteilung eines Knotens sich asymptotisch $\mathrm{Pois}(\lambda)$ nähert wenn $n \to \infty$ geht (während λ konstant bleibt).

(i) Sei X_n der Grad von Knoten 1 in $G(n,p)$ mit $p = \lambda/n$. Zeige $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

(ii) Sei X_n der Grad von Knoten 1 in $G^{\mathrm{UE}}(n,m)$ mit $m = \lfloor \lambda n/2 \rfloor$. Zeige $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

(iii) Sei X_n der Grad von Knoten 1 in $G(n,m)$ mit $m = \lfloor \lambda n/2 \rfloor$. Zeige $X_n \xrightarrow{\mathrm{d}} X$.

Hinweis: Der letzte Aufgabenteil ist mit Abstand der schwierigste. Es bietet sich an $G(n,m)$ mithilfe eines Couplings zwischen zwei Gilbert Graphen $G^- = (n, p^-)$ und $G^+ = (n, p^+)$ „einzusperren“.

Aufgabe 3 – Aussterbewahrscheinlichkeit in Galton-Watson Bäumen

Sei $\mathrm{GWT}(\lambda)$ der Galton-Watson Baum, dem die Verteilung $\mathrm{Pois}(\lambda)$ zugrunde liegt.

(i) Sei n_i die Anzahl der Knoten in Ebene i von $\mathsf{GWT}(\lambda)$. Die Wurzelebene sei Ebene 0. Was ist $\mathbb{E}[n_i]$?

(ii) Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei p_i die Wahrscheinlichkeit, dass $\mathsf{GWT}(\lambda)$ mindestens einen Knoten auf Ebene i hat. Drücke p_{i+1} in Abhängigkeit von p_i aus.
Hinweis: Verwende Aufgabe 3 (iv) von Blatt 9.

(iii) Bestimme für $\lambda \in \{0, 0.5, 1, 1.1, 1.5\}$ (oder für beliebige λ) jeweils eine Approximationen für die Wahrscheinlichkeit $s(\lambda)$, dass $\mathsf{GWT}(\lambda)$ unendlich ist. Ein Computeralgebrasystem könnte nützlich sein (z.B. Wolfram Alpha.

Zusatzüberlegung: Was ist die Erwartete Anzahl von Knoten auf Ebene i?