Übungsblatt 11
Game Theory & Yao's Principle

Randomisierte Algorithmik

Aufgabe 1 – Untere Schranken für randomisiertes Sortieren

Sei $n \in \mathbb{N}$ und **Inputs** die Menge aller Permutation von $\{1, \ldots, n\}$. Sei **Algos** die Menge aller vergleichsbasierten *deterministischen* Sortieralgorithmen.

(i) Nenne ein $A \in \textbf{Algos}$ (ohne Beweis) mit $\max_{I \in \textbf{Inputs}} C(A, I) = \mathcal{O}(n \log n)$.

(ii) Fingerübung: Für $n = 3$ gibt es einen randomisierten Algorithmus $\mathcal{A}$ der jeden deterministischen Algorithmus in folgendem Sinne schlägt:

$$\min_{A \in \textbf{Algos}} \max_{I \in \textbf{Inputs}} C(A, I) = 3 > 2 + \tfrac{2}{3} = \max_{I \in \textbf{Inputs}} \mathbb{E}_{A \sim \mathcal{A}}[C(A, I)].$$

Unser Plan im Folgenden ist zu zeigen, dass dieser Vorteil in $\mathcal{O}$-Notation verschwindet.

(iii) Zeige, dass es keine „schwierige Eingabe“ gibt, dass nämlich gilt:

$$\max_{I \in \textbf{Inputs}} \min_{A \in \textbf{Algos}} C(A, I) = n - 1.$$

Um gleich die bestmöglichen Kosten für eine Eingabe*verteilung* in den Blick nehmen, benötigen wir etwas Vorbeitung:

(iv) Zeige, dass in einem Binärbaum mit k Blättern die durchschnittliche Tiefe eines Blattes mindestens $\lfloor \log_2(k) \rfloor$ beträgt.
Hinweis: Zeige dafür, dass die durchschnittliche Blatttiefe bei balancierten Bäumen minimal ist, genauergesagt, dass sich jeder Baum, in dem sich die Blatttiefen um mindestens 2 unterscheiden, so umbauen lässt, dass die durchschnittliche Blatttiefe sinkt, die Anzahl der Blätter aber gleichgeblieben ist.

(v) Folgere nun mithilfe von Yaos Prinzip, dass gilt:

$$\min_{\mathcal{A} \text{ Vert. auf } \textbf{Algos}} \max_{I \in \textbf{Inputs}} \mathbb{E}_{A \sim \mathcal{A}}[C(A, I)] = \Omega(n \log n).$$

Aufgabe 2 – Yaos Prinzip ohne Schnick-Schnack(-Schnuck)

Beweise Yaos Prinzip ohne auf spieltheoretische Sätze zurückzugreifen (kein Satz von Nash, Loomis, etc). Beweise also, dass im Setting der Vorlesung für eine beliebige Verteilung $\mathcal{A}_0$ auf **Algos** und eine beliebige Verteilung $\mathcal{I}_0$ auf **Inputs** gilt:

$$\max_{I \in \textbf{Inputs}} \mathbb{E}_{A \sim \mathcal{A}_0}[C(A, I)] \geq \min_{A \in \textbf{Algos}} \mathbb{E}_{I \sim \mathcal{I}_0}[C(A, I)].$$

Hinweis: Der spieltheoretische Vorbau der Vorlesung ist hier nicht erforderlich, weil wir nicht zeigen möchten, dass „=“ möglich ist.

Aufgabe 3 – Empfehlung: Simulating the Evolution of Teamwork

Der Youtube-Kanal *Primer* beschäftigt sich mit evolutionärer Spieletheorie. In folgendem Video geht es unter anderem darum, alle möglichen 2-Spieler-Spiele mit zwei reinen Strategien danach zu klassifizieren, wieviele und welche Arten von Nash-Equilibria für diese existieren. Das Video ist unterhaltsam und lädt zum mitdenken ein, ist aber nur bedingt vorlesungsrelevant.

https://www.youtube.com/watch?v=TZfh8hpJIxo